

ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

DAVID R. McDONALD

Local limit theorems for non-identical integer valued random variables, to appear theory probability. Applications

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 67, série *Mathématiques*, n° 17 (1979), p. 94-95

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1979__67_17_94_0>

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LOCAL LIMIT THEOREMS FOR NON-IDENTICAL INTEGER VALUED RANDOM
VARIABLES, TO APPEAR THEORY PROBABILITY. APPLICATIONS

par

David R. McDONALD

Université d'OTTAWA

Soit V une variable aléatoire à valeurs entières. Soit

$$q_V = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{minimum} \{ \text{Prob}(V = k), \text{Prob}(V = k+1) \}.$$

Lemme Il existe des variables aléatoires (définies sur un nouvel espace de probabilité) Y, ϵ et L

t.q. (a) $V \equiv Y + \epsilon L$ (\equiv indique l'équivalence en loi)

(b) $\text{Prob}(\epsilon = 1) = 1 - \text{Prob}(\epsilon = 0) = q_V$

(c) $\text{Prob}(L = 1) = \text{Prob}(L = 0) = 1/2$

(d) L est indépendante de (Y, ϵ) .

Soit $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs entières (pas forcément identiques).

Corollaire Il existe une décomposition de $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$

t.q.

(a) $S_n \equiv X_n + \sum_{k=1}^{N_n} L_k$

(b) $\{L_k\}_{k=1}^{\infty}$ est une suite de variables Bernouilli indépendantes

t.q. (i) $\text{Prob}(L_k = 1) = \text{Prob}(L_k = 0) = 1/2$

(ii) $\{L_k\}_{k=1}^{\infty}$ est indépendante de (Z_n, N_n)

(c) $N_n = \sum_{k=1}^n \epsilon_k$ où

(i) $\text{Prob}(\epsilon_k = 1) = 1 - \text{Prob}(\epsilon_k = 0) = q_{X_k}$

(ii) $\{\epsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ est une suite de v.a. indépendantes.

$\sum_{k=1}^{N_n} L_k$ est la composante de Bernouilli de S_n . $Q_n = EN_n = \sum_{k=1}^n q_{X_k}$ est une mesure du nombre de variables Bernouilli L_k que l'on puisse extraire de S_n . L'on démontre les théorèmes suivants à l'aide des estimées bien connues de la loi Binomiale appliquées à la composante de Bernouilli.

Théorème
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\text{Prob}(S_n = K) - \text{Prob}(S_n = K+1)| \leq \frac{C}{\sqrt{Q_n}}$$

où C est une constante universelle.

Théorème Si $B_n^2 = \text{Var } S_n$, $A_n = ES_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \infty$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{Q_n}}{B_n} > 0$

alors
$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n \left| \text{Prob}(S_n = x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi} B_n} \exp \left\{ -\frac{(x-A_n)^2}{2 B_n^2} \right\} \right| = 0.$$

Cette limite est uniforme en x (un entier).

Soit $\{Y_k\}_{k=1}^{\infty}$ une suite de v.a. indépendantes à valeurs entières. Pour extraire la composante de Bernouilli de la somme des Y_k il est parfois avantageux de grouper les Y_k par block. Soit $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ une partition des entiers de la forme

$$K_n = \{t_{n-1} + 1, t_{n-1} + 2, \dots, t_n\} \quad t_0 = 0$$

Soit $X_k = \sum_{i \in K_k} Y_i$. Donc

$$\sum_{k=1}^{t_n} Y_k = \sum_{k=1}^n X_k = Z_n + \sum_{k=1}^{N_n} L_k$$

par le Corollaire. Il s'agit donc de trouver une partition telle que Q_n soit aussi grand que possible. Evidemment, si les Y_k ont tous période $p > 1$, aucun regroupement n'est possible et $Q_n = 0$ pour tout n.