ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

RENÉ CARMONA

Étude probabiliste de l'opérateur de Schrödinger

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 67, série *Mathématiques*, n° 17 (1979), p. 5-18

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1979__67_17_5_0>

ETUDE PROBABILISTE DE L'OPERATEUR DE SCHRÖDINGER

René CARMONA

Université de Saint-Etienne

RESUME

L'objet de cette note est de présenter les résultats sur l'opérateur de Schrödinger (définition, auto-adjonction, propriétés spectrales, régularité des fonctions propres ...) récemment démontrée à l'aide de techniques probabilistes.

I INTRODUCTION

Un des problèmes mathématiques les plus importants de la Mécanique Quantique (non relativiste) est la définition d'opérateurs auto-adjoints sur les espaces de Hilbert et leur étude spectrale (propriétés du spectre et des fonctions propres). A titre d'illustration rappelons que démontrer qu'un Hamiltonien H est auto-adjoint est moralement équivalent à l'existence et l'unicité des solutions L^2 de l'équation de Schrödinger :

$$: \frac{\partial\Psi}{\partial t} = H\Psi \qquad \Psi(0,.) = \Psi_0. \tag{1.1}$$

En effet si le système d'unités est choisi pour que $H = -\frac{1}{2}\Delta + V$ où Δ désigne l'opérateur Laplacien sur $\mathbb{R}^n$ et V est une fonction réelle mesurale sur $\mathbb{R}^n$, et si H est auto-adjoint sur $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$ (en fait, dans la pratique, l'expression qui définit H ci-dessus n'est que formelle et la difficulté est de mettre en évidence, et de choisir parmi, les extensions auto-adjointes de l'opérateur formel donné) , et si nous posons :

$$U(t) = e^{itH}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

La famille $\{U(t);\ t \in \mathbb{R}\}$ est un groupe unitaire à un paramètre d'opérateurs sur $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$ (i.e. :

i) pour tout $\Psi \in L^2(\mathbb{R}^n, dx)$ $\quad t \longrightarrow U(t)\Psi$ est continue

ii) $U(0) = I$ et pour tous réels set t, $\quad U(s+t) = U(s)U(t)$

iii) pour tout réel t et $\Psi \in L^2(\mathbb{R}^n, dx)$ $\quad ||U(t)\Psi|| = ||\Psi||$)

qui permet pout toute condition initiale $\Psi_0 \in L^2(\mathbb{R}^n, dx)$ de résoudre l'équation de Schrödinger (1.1) en posant :

$$\Psi(t,.) = U(t)\Psi_0. \qquad 1.3)$$

Inversement, si il y a existence et unicité d'une solution verifiant

$$\Psi(t,.) \in L^2(\mathbb{R}^n, dx)$$

pour tout $t \in \mathbb{R}^n$, chaque fois que la condition initiale Ψ_0 est elle même de carré intégrable, la formule (1.3) définit une famille d'opérateurs U(t) qui vérifie (i) et (ii), et si la "loi de conservation des probabilités", est satisfaite, (iii) est aussi vérifiée. Le théorème de Stone assure alors l'existence d'un opérateur auto-adjoint H satisfaisant (1.2) et donc (1.1).

L'étude de l'existence et du choix des extensions auto-adjointes est à l'origine de nombreux travaux (voir par exemple [21], [31], [28] et [12]). Nous nous limiterons ici à l'étude d'Hamiltoniens H définis à partir de l'addition de formes quadratiques. Pour illustrer l'importance de l'étude spectrale nous nous contenterons de rappeler le titre de la serie des articles originaux de E. Schrödinger : "Quantification comme un Problème aux Valeurs Propres".

Depuis l'article fondamental de M. Kac [20] quelque chose comme une industrie s'est développée et les démonstrations probabilistes (de résultats déjà connus ou non) se sont multipliées. Le but de cette note est de faire le point en essayant de dégager ce qui caractérise la "stratégie probabiliste" dans l'étude de l'opérateur de Schrödinger.

Pour terminer cette introduction signalons que c'est volontairement que nous ne dirons mot de tout ce qui concerne l'intégrale de Feynman et certains travaux non directement reliés aux problèmes soulevés ci-dessus (voir par exemple [15], [10], [11] et [1]).

II <u>DEFINITION DE L'OPERATEUR ET REGULARITE DU SEMI-GROUPE ENGENDRE</u> :

Nous appellerons <u>potentiel de classe</u> $\mathcal{V}$ <u>toute fonction</u> V <u>définie et mesurable sur</u> $\mathbb{R}^n$, <u>à valeurs réelles et qui possède une décomposition</u> $V = V_1 - V_2$ <u>avec</u> V_1 <u>mesurable et bornée inférieurement sur</u> $\mathbb{R}^n$, $V_2 \geq 0$ <u>de puissance</u> p-<u>ième intégrable pour un</u> $p > \max\{1, \frac{n}{2}\}$ (V_1 et V_2 sont bien évidemment à valeurs réelles).

Soit maintenant V un tel potentiel de classe $\mathcal{V}$ et soit

$$H = -\frac{1}{2}\Delta + V$$

l'opérateur auto-adjoint sur $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$ défini comme somme de formes quadratiques. (Voir [21.Chapitre VI], [31], [12], [28.II.Chapitre X], l'ouvrage le plus élémentaire nous semblant être [12] où les raisons du choix de la technique des formes quadratiques sont clairement exposées).

En utilisant les théorèmes de convergences monotone et dominée pour les intégrales et pour les formes quadratiques il est possible d'étendre la formule de Feynman-Kac (qu'il est facile de démontrer pour des fonctions V bornées) au cas des potentiels de classe $\mathcal{V}$ (voir par exemple [13] ou [28.II.Section X.11]). De façon précise, pour tout $t > 0$, pour chaque $f \in L^2(\mathbb{R}^n, dx)$ et pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$ nous avons :

$$[e^{-tH}f](x) = E_x\{f(\xi_t)e^{-\int_0^t V(\xi_s)ds}\}$$

où $\{\xi_t; t \geq 0\}$ est un processus de mouvement brownien dans $\mathbb{R}^n$ et où E_x est l'espérance prise sur les trajectoires qui partent de x à l'instant $t = 0$.

La stratégie probabiliste pour définir l'opérateur de Schrödinger H est la suivante. Posons, pour $t > 0$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ mesurable et $x \in \mathbb{R}^n$:

$$[T_t f](x) = E_x\{f(\xi_t)e^{-\int_0^t V(\xi_s)ds}\} \tag{2.1}$$

chaque fois que le membre de droite a un sens, essayons de vérifier que $\{T_t; t \geq 0\}$ constitue un semi-groupe fortement continu, exponentiellement borné, d'opérateurs auto-adjoints sur $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$, et essayons d'identifier le générateur infinitésimal (qui est un opérateur auto-adjoint borné inférieurement) à ce que l'on attend d'un opérateur de Schrödinger. Cette approche a souvent été suivie (voir par exemple [2], [14] et [23]) mais les difficultés éprouvées à contrôler l'intégrale du membre de droite de (2.1) ont limité les résultats au cas de $V \geq 0$ (notons que dans l'article [14] et encore plus en [23], l'exigence de forte-continuité du semi-groupe sur tout $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$ n'est pas respectée). En fait la méthode probabiliste s'avère efficace en toute généralité grace au résultat suivant :

Lemme [5.theorem 2.1]

Si U est une fonction positive sur $\mathbb{R}^n$, *de puissance p-ième intégrable pour un* $p > \max\{1, \frac{n}{2}\}$ *nous avons* :

$$\forall t \geq 0,\quad \mathrm{Sup}_{x \in \mathbb{R}^n}\ E_x\{\exp[\int_0^t U(\xi_s)ds]\} \leq e_{1-n/2p}(c(p)||U||_p t^{\varepsilon})$$

où $||.||_p$ *désigne la norme de l'espace* $L^p(\mathbb{R}^n,dx)$, *où* e_ε *est pour* $\varepsilon > 0$ *la fonction de Mittag-Leffler définie par* :

$$e_\varepsilon(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{\Gamma(1+k\varepsilon)} \qquad , \qquad x \in \mathbb{R},$$

et où la constante $c(p)$ *est définie par* :

$$c(p) = (2\pi)^{-n/2p}\ (1-p^{-1})^{(1-p^{-1})n/2}\ \Gamma(1-\frac{n}{2p})\ .$$

Le résultat du lemme implique (et c'est sous cette forme qu'il sera utilisé) qu'il existe une constante $c(U,p)$ qui tend vers 0 quand U tend vers 0 dans L^p, qui ne dépend que de p et de $||U||_p$, et telle que :

$$\forall t \geq 0 \quad \sup_{x \in \mathbb{R}^n}\ E_x\{\exp[\int_0^t U(\xi_s)ds]\} \leq e^{c(U,p)t} \tag{2.2}$$

Cette dernière estimation n'est qu'un raffinement d'un résultat existant déjà dans la littérature probabiliste depuis 1974 (voir [26]) et qui a été redécouvert indépendamment par A.M. Berthier et B. Gaveau dont le grand mérite a été de montrer la pertinence de telles estimations pour l'étude de l'opérateur de Schrödinger (voir [4]).

Ainsi, si V est un potentiel de classe $\mathcal{V}$, pour tout $r > 0$ et pour tout $t > 0$:

$$K(r,t) := \sup_{x \in \mathbb{R}^n}\ E_x\{\exp[-\int_0^t rV(\xi_s)ds]\} \quad < +\infty \tag{2.3}$$

le membre de droite étant borné par une fonction exponentielle de t. Du théorème d'interpolation de Riesz-Thorin et de (2.3) on déduit que :

(i) *pour tout* $q \in [1,\infty]$ *les opérateurs* T_t *définis par* (2.1) *sont bornés sur* $L^q(\mathbb{R}^n,dx)$ *et pour tout* $t > 0$, $||T_t||_{q,q} \leq K(1,t)$.

Le propriété de Markov (simple) des processus de mouvements browniens implique que :

(ii) <u>pour tout</u> $q \in [1,\infty]$ <u>les opérateurs</u> T_t <u>constituent un semigroupe d'opérateur sur</u> $L^q(\mathbb{R}^n,dx)$, <u>qui est exponentiellement borné d'après</u> (i).

De plus, une propriété classique des processus de mouvements browniens relativement au renversement du temps implique :

(iii) <u>si</u> q <u>et</u> q' <u>sont deux exposants conjugués, si</u> $f \in L^q(\mathbb{R}^n,dx)$ <u>et</u> $g \in L^{q'}(\mathbb{R}^n,dx)$ <u>nous avons</u> :

$$\int_{\mathbb{R}^n} [T_t f](x)\,\overline{g(x)}\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\overline{[T_t g](x)}\,dx$$

ce qui prouve que, sur $L^2(\mathbb{R}^n,dx)$ les opérateurs T_t sont auto-adjoints. De plus :

(iv) <u>si</u> $q \in [1,\infty[$, <u>si</u> $r \in [1,\infty]$ <u>et si</u> $q \leqslant r$, <u>pour tout</u> $t > 0$, T_t <u>est un opérateur borné de</u> $L^q(\mathbb{R}^n,dx)$ <u>dans</u> $L^r(\mathbb{R}^n,dx)$, <u>et si</u> $f \in L^q(\mathbb{R}^n,dx)$;

$$\lim_{|x| \to \infty} [T_t f](x) = 0.$$

Notons enfin qu'il est possible de généraliser certaines démonstrations de [27] et [14] et de démontrer :

(v) <u>si</u> $\lim_{|x|\to\infty} V_1(x) = +\infty$, <u>pour tout</u> $t > 0$ <u>et pour tout</u> $q \in [1,\infty]$ T_t <u>est un opérateur compact sur</u> $L^q(\mathbb{R}^n,dx)$.

(vi) <u>si</u> $V_1 \in L^{\bar{p}}_{loc}(\mathbb{R}^n,dx)$ <u>pour un nombre réel</u> $\bar{p} > \max\{1,\frac{n}{2}\}$, <u>pour tout</u> $t > 0$, <u>pour tout</u> $q \in [1,\infty]$ <u>et pour tout</u> $f \in L^q(\mathbb{R}^n,dx)$, $T_t f$ <u>est une fonction continue sur</u> $\mathbb{R}^n$.

(vii) <u>si</u> $V_1 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n,dx)$, <u>pour tout</u> $q \in [1,\infty[$, <u>le semi-groupe</u> $\{T_t;\ t \geqslant 0\}$ <u>est fortement continu sur</u> $L^q(\mathbb{R}^n,dx)$.

Pour les démonstrations des résultats (i) - (vii) nous renvoyons à [5. Paragraphe III]. Ainsi, si $V_1 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n,dx)$, $\{T_t, t \geqslant 0\}$ est un semi-groupe fortement continu, exponentiellement borné, d'opérateurs sur $L^q(\mathbb{R}^n,dx)$; notons H_q l'opposé du générateur infinitésimal. Remarquons que (iii) et la borne exponentielle du semi-groupe impliquent que H_2 est auto-adjoint et borné inférieurement, et par conséquent, il est bien égal à l'opérateur de

Schrödinger H défini comme somme de formes quadratiques. Dans le cas général il est possible d'obtenir des informations importantes sur les opérateurs H_q, à savoir :

(viii) Si $V \in L^{q'}_{loc}(\mathbb{R}^n, dx)$ nous avons :

$$\mathcal{D}(H_q) \subset \{f \in L^q ; -\frac{1}{2}\Delta f + Vf \in L^q\}$$

(avec égalité si $\mathcal{V}$ est borné inférieurement) et

$$f \in \mathcal{D}(H_q) \Rightarrow H_q f = -\frac{1}{2}\Delta f + Vf$$

(ix) Si $V \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^n, dx)$ nous avons :

$$C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}(H_q) \text{ et } f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \Rightarrow H_q f = -\frac{1}{2}\Delta f + Vf.$$

(pour les démonstrations nous renvoyons à [5. Proposition 4.1]). Ces résultats ne sont pas entièrement satisfaisant car ils sont incomplets et leurs démonstrations sont purement analytiques.

Le problème de la définition d'un opérateur $-\frac{1}{2}\Delta + V$ sur les espaces de Banach $L^q(\mathbb{R}^n, dx)$ a été étudié en [30] par des méthodes de l'analyse fonctionnelles et les résultats obtenus sont similaires quoi-que non-comparables à (viii) et (ix).

Notons aussi que des résultats voisins, et parfois plus fins parce que s'appliquant à des potentiels plus généraux, à (iii), (iv), (vii) et (vi) ont été obtenus dans le cas q = 2 (voir [17]) au moyen de la formule de Trotter.

Il est clair que toute généralisation de l'estimation "à la Berthier-Gaveau" (2.2) - même si elle n'est obtenue que pour t suffisamment petit - à des potentiels plus généraux que ceux de la classe $\mathcal{V}$, permet immédiatement la généralisation des résultats (i) - (ix) à cette nouvelle famille de potentiels. Ainsi B. Simon a montré ([34]) que l'indépendance des projections du pouvement brownien sur des sous espaces orthogonaux de $\mathbb{R}^n$ permet d'étendre l'estimation aux "potentiels à N-corps" et que - ce qui est bien moins évident - le cas $V_2 \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n, dx)$ pour un $p > \max\{1, \frac{n}{2}\}$ et V_2 périodique pouvait aussi être englobé dans cette théorie.

Notons enfin qu'il est possible de généraliser les résultats sur le semi-groupe $\{T_t ; t \geqslant 0\}$ en remplaçant, dans la formule (2.1), la quantité $\int_0^t V(\xi_s)ds$ par une fonctionnelle additive continue $A_t = A_t^1 - A_t^2$ du mouvement brownien telle que A^2 soit positive et satisfasse :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} E_x\{\exp[A_t^2]\} < + \infty$$

pour $t > 0$ suffisamment petit. Ceci permet de traiter par la méthode probabiliste le cas de certains potentiels V qui ne sont plus des fonctions mais des distributions (voir [17]) comme par exemple, en dimension n = 1, des combinaisons linéaires finies de mesures de Dirac.

III ETUDE DU SPECTRE :

Soit $\sigma(H)$ le spectre de $H = -\frac{1}{2}\Delta + V$ défini comme somme de formes quadratiques. Le premier résultat probabiliste sur le spectre de H se trouve dans l'article fondamental de M. KAC [20] :

$$\operatorname{Inf} \sigma(H) = - \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \operatorname{Log} E_x\{\exp[- \int_0^t V(\xi_s)ds]\} \tag{3.1}$$

Il semble que la démonstration de Kac suppose :

(i) $V \geqslant 0$

(ii) V continu

(iii) $\operatorname{Lim}_{|x| \to \infty} V(x) = + \infty$

Pour une démonstration complète de ce résultat nous renvoyons à [8]. En utilisant une méthode d'approximation il est possible de montrer à partir de (3.1) que :

$$\inf \sigma(H) \geqslant - \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \operatorname{Log} E_x\{\exp[-\int_0^t V(\xi_s)ds]\} \tag{3.2}$$

dans le cas général, et il serait intéressant de connaître les potentiels V pour lesquels (3.1) est vraie. En effet inf $\sigma(H)$ est une quantité importante (énergie fondamentale du système quantique étudié) et son estimation (numérique) est un problème difficile (voir par exemple [3]) que la formule (3.1) permettrait peut être de mieux appréhender. Enfin remarquons que le résultat de Kac (sous sa forme (3.2)) a permit à A.M. Berthier et B. Gaveau d'obtenir de nouveaux critères d'absence d'états liés (i.e., de valeurs propres négatives) en donnant des conditions sur V pour que le membre de droite de l'inégalité (3.2) soit positif ou nul (voir [4]).

Nous ne pouvons terminer ce paragraphe sans parler de la remarquable démonstration qu'a donnée E. H. Lieb de l'inégalité suivante, vraie en dimension $n \geqslant 3$:

$$N(V) \leqslant a_n \int V_-(x)^{n/2} dx$$

pour une constante universelle a_n, (qui ne dépend que de n), où N(V) est le nombre de valeurs propres - niveaux d'énergie - négatives de l'opérateur de Schrödinger $H = -\frac{1}{2}\Delta + V$. La démonstration repose sur une utilisation astucieuse de l'intégration par rapport à la mesure de Wiener conditionnelle. Elle est annoncée en [22] et donnée de façon détaillée, avec de nombreux compléments, en [34].

IV <u>ETUDE DES FONCTIONS PROPRES</u> :

Une fonction propre associée à la valeur propre λ décrit l'état du système lorsque la mesure de son énergie a donné pour résultat λ. De plus, comme le carré de son module est interprété comme une densité de probabilité que le système a d'être dans l'état "dx", il est important de connaître les propriétés éventuelles de régularité et de concentration de ces densités de probabilité. Le prototype d'estimation ponctuelle, connue dans bien des cas, et souhaité en général est :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad |\Psi(x)| \leqslant De^{-\delta|x|} \tag{4.1}$$

où Ψ est une fonction propre et D et δ deux constantes positives - en fait il faut remarquer que les bornes ponctuelles ont été obtenues avec plus de difficultés que les bornes L^2 qui sont plus répendues dans la littérature existant sur ce sujet. De plus, lorsque le potentiel V tend vers $+\infty$ avec $|x|$ des arguments du type W.K.B. (pas toujours rigoureux) permettent de deviner le comportement à l'infini des fonctions propres en fonction de celui de V. Par exemple, en dimension n = 1, il faut s'attendre à ce que, plus ou moins grossièrement, nous ayons :

$$|\Psi(x)| \sim De^{-\delta\int_0^{|x|}\sqrt{V(t)}dt}.$$

Mais il existe une nouvelle motivation pour l'étude du comportement de certaines fonctions propres en fonction de celui du potentiel. En effet très souvent l'opérateur de Schrödinger est unitairement équivalent à l'opérateur de Dirichlet d'une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^n$ (voir par exemple [16] et[5]) et certaines propriétés du semi-groupe d'opérateurs qu'il engendre (hypercontractivité et supercontractivité) sont "équivalentes" à une inégalité du type :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \Psi(x) \geqslant De^{-\delta V(x)} \tag{4.2}$$

où Ψ est une fonction propre associée à la borne inférieure du spectre de H. Plus que dans l'étude de l'hyper - ou de la super - contractivité du semi-groupe ([24], [18], [32] [28.II.Section X.9]) c'est lors de l'étude équivalente des inégalités de Sobolev Logarithmiques que l'intérêt des estimations du type (4.2) est apparue ([16], [9], [29], [33.III] et [5]).

En ce qui concerne l'étude des fonctions propres de l'opérateur de Schrödinger le stratégie probabiliste est la suivante (voir [6]) :

Ψ est fonction propre de H associée à la valeur propre λ si et seulement si pour tout $t > 0$, Ψ est fonction propre de T_t associée à la valeur propre $e^{-t\lambda}$, et donc, si et seulement si :

$$\forall t > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \Psi(x) = e^{\lambda t} E_x\{\Psi(\xi_t) \exp\left[-\int_0^t V(\xi_s)ds\right]\} \tag{4.3}$$

(où pour ne pas avoir de problème avec le $\forall x \in \mathbb{R}^n$, nous supposerons que V est un potentiel de classe $\mathcal{V}$ tel que $V_1 \in L^{\bar{p}}_{loc}(\mathbb{R}^n, dx)$ pour un nombre réel $\bar{p} > \max\{1, \frac{n}{2}\}$). Il découle immédiatement de (iv), (vi) et (vii) que :

(x) - <u>toute fonction propre est continue, bornée et tend vers 0 quand</u> $|x| \to \infty$.

De plus, si l'on substitue à t certaines fonctions de x choisies d'après les hypothèses faites sur la valeur propre λ et le potentiel V il est facile de démontrer des résultats (déjà connus ou non) du type (4.1), W.K.B. ou encore (4.2). (Voir [6] ou encore [34]). En régle générale, bien que ne donnant pas les meilleurs constantes D et δ des inégalités ci-dessus, il est surprenant de noter que la méthode probabiliste permet de supprimer, chaque fois qu'elle est applicable, toutes les hypothèses de régularités inutiles sur le potentiel V.

REFERENCES

[1] S. ALBEVERIO, R. HOEGH-KROHN and L. STREIT - Energy Forms, Hamiltonians and Distorted Brownian Paths. J. Math. Phys. 18 (1977) 907-917.

[2] D. W. BABBIT - The Wiener Integral and Perturbation of the Schrödinger Operator. Bull. Amer. Math. Soc. 70 (1964) 254-259.

[3] J. F. BARNES, H. J. BRASCAMP and E. H. LIEB - Lower Bound for the Ground State Energy of the Schrödinger Equation Using the Sharp Form of Young's Inequality. Studies in Math. Phys. Essays in Honour of V. Bargman. Princeton Univ. Press (1976).

[4] A. M. BERTHIER et B. GAVEAU - Critère de convergence des fonctionnelles de Kac et application en mécanique quantique et en géometrie. J. Funct. Anal. (à paraître).

[5] R. CARMONA - Regularity Properties of Schrödinger and Dirichlet Semi-groups. J. Funct. Anal. (à paraître).

[6] R. CARMONA - Pointwise Bounds for Schrödinger Eigenstates. Comm. Math. Phys. 62 (1978) 97-106.

[7] P. DEIFT and B. SIMON - On the Decoupling of Finite Singularities from the Question of Asymptotic Completeness in Two-Body Quantum Systems. J. Funct. Anal. 23 (1976) 218-238.

[8] M. D. DONSKER and S.R.S. VARADHAN - Asymptotic Evaluation of Certain Wiener Integrals for Large Time. Proc. Int. Conf. on Function Space Integration.

[9] J. P. ECKMANN - Hypercontractivity for Anharmonic Oscillators. J. Funct. Anal. 16 (1974) 388-404.

[10] H. EZAWA, J. R. KLAUDER and L. A. SHEPP - A Path Space Picture for Feynman - Kac averages. Ann. Phys. 88 (1974) 588-620.

[11] H. EZAWA, J. R. KLAUDER and L. A. SHEPP - Vestigial Effects of Singular Potentials in Diffusion Theory and Quantum Mechanics. J.Math.Phys. 16

[12] W.G. FARIS - Self-Adjoint Operators. Lect. Notes in Math. # 433 (1975). Springer-Verlag.

[13] W.G. FARIS and B. SIMON - Degenerate and Non-Degenerate Ground States for Schrödinger Operators. Duke Math. J. 42 (1975) 559-567.

[14] J. FELDMAN - On the Schrödinger and Heat Equations for Non-Negative Potentials. Trans. Amer. Math. Soc. 108 (1963) 251-264.

[15] J. GINIBRE - Some Applications of Functional Integration in Statistical Mechanics. Dans "Statistical Mechanics and Quantum Field Theory" (C. De Witt et R. Stora Edts.) p. 327-427. Gordon and Breach - New York (1970).

[16] L. GROSS - Logarithmic Sobolev Inequalities. Amer. J. Math. 97 (1976) 1061-1083.

[17] I. W. HERBST and A. D. SLOAN - Perturbation of Translation Invariant Positivity Preserving Semi-groups on $L^2(\mathbb{R}^n)$. Trans. Amer.Math.Soc. 236 (1978) 238-360.

[18] R. HOEGH-KROHN and B. SIMON - Hypercontractive Semigroups and Two Dimensional Bose Fields. J. Funct. Anal. 9 (1972) 121-180.

[19] K. ITO and H. P. McKEAN - Diffusion Processes and their Sample Paths. Springer-Verlag (1974) 2nd Printing.

[20] M. KAC - On some Connection between Probability Theory and Differential and Integral Equations. Proc. 2nd Berk. Symp. on Math. Stat. and Prob. (1951) 189-215.

[21] T. KATO - Perturbation Theory for Linear Operators. Springer-Verlag (1966).

[22] E. H. LIEB - Bounds on the Eigenvalues of the Laplace and Schrödinger Operators. Bull. Amer. Math. Soc. 82 (1976) 751-753.

[23] H. P. McKEAN - $-\Delta$ plus a bad potential. J. Math. Phys. 18 (1977) 1277-1279.

[24] E. NELSON - The Free Markov Field. J. Funct. Anal. 13 (1973) 211-227.

[25] J. NEVEU - Sur l'esperance conditionnelle par rapport à un mouvement brownien. Ann. Inst. H. Poincaré. Sect.B. 12 (1976) 105-109.

[26] N. I. PORTENKO - Diffusion Processes with Unbounded Drift Coefficient. Theor. Prob. Appl. 20 (1975) 27-37.

[27] D. RAY - On the Spectra of Second Order Differential Operators. Trans. Amer. Math. Soc. 77 (1954) 299-321.

[28] M. REED and B. SIMON - Methods of Modern Mathematical Physics.
I. Functional Analysis (1972)
II. Fourier Analysis and Self-Adjointness (1975)
IV. Analysis of Operators (1978)
Academic Press.

[29] J. S. ROSEN - Sobolev Inequalities for Weight Spaces and Supercontractivity. Trans. Amer. Math. Soc. 222 (1976) 367-376.

[30] Yu. A. SEMENOV - Schrödinger Operators with L^{p}_{loc} - Potentials. Comm. Math. Phys. 53 (1977) 277-284.

[31] B. SIMON - Quantum Mechanics for Hamiltonians Defined as Quadratic Forms. Princeton Series in Physics. (1971) Princeton Univ. Press.

[32] B. SIMON - The $P(\emptyset)_2$ Euclidean Field Theory. Princeton Series in Physics. (1973) Princeton Univ. Press.

[33] B. SIMON - Pointwise Bounds on Eigenfunctions and Wave-Packets in N.Body Quantum Systems.
II. Proc. Amer. Math. Soc. 45 (1974) 454-456
III. Trans. Amer. Math. Soc. 208 (1975) 317-329.

[34] B. SIMON - Functional Integration and Quantum Physics. Academic Press. New York (à paraître).

[35] J. E. SNOL - On the Behaviour of the Eigenfunctions of Schrödinger's Equation. Mat. Sb. 46 (1957) 273-286. (Russe).