ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

LAURE ELIE

Fonctions harmoniques positives sur le groupe affine

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 67, série *Mathématiques*, nº 17 (1979), p. 37-39

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1979__67_17_37_0>

FONCTIONS HARMONIQUES POSITIVES SUR LE GROUPE AFFINE

Laure ELIE

Université PARIS VII

Soient G un groupe localement compact et μ une mesure de probabilité sur G. Une fonction borélienne positive h est dite μ-harmonique si, pour tout $g \in G$,

$$h(g) = \int_G h(gg') \; d\mu(g').$$

La détermination des fonctions harmoniques positives et leur représentation intégrale est un problème qui a été examiné sur certains groupes à croissance polynomiale ((2),(3),(8)) et sur les groupes semi-simples ((4), (7)). Ici nous nous intéressons au groupe affine G de la droite réelle, exemple le plus simple de groupe à croissance exponentielle qui ne soit pas semi-simple. Ce groupe G, groupe des transformations affines réelles $x \longrightarrow ax + b$, peut être représenté par le produit semi-direct $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$ muni du produit $(a,b)(a',b') = (aa',ab'+b)$. Nous désignerons par a et b les projections respectives de G sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}$ et tout élément g de G sera donc noté $(a(g),\, b(g))$.

Les fonctions exponentielles sur G, c'est à dire les homomorphismes multiplicatifs de G dans $\mathbb{R}^{+*}$, sont du type $h_\beta(g) = a(g)^\beta$ avec $\beta \in \mathbb{R}$. L'exponentielle triviale égale à 1 est toujours μ-harmonique et il est aisé de voir qu'il existe au plus une autre exponentielle μ-harmonique. Elle vérifiera nécessairement $\int_G h_\beta(g) \; d\mu(g) = 1$.

Nous munirons $\mathbb{R}$ d'une structure de G-espace par l'application qui à $(g,x) \in G \times \mathbb{R}$ associe $g.x = a(g)x + b(g)$. Si ν et m sont respectivement des mesures de Radon positives sur G et sur $\mathbb{R}$, nous appellerons $\nu * m$ la mesure sur $\mathbb{R}$ définie, si A est un borélien de $\mathbb{R}$, par

$$\nu * m(A) = \iint_{G \times \mathbb{R}} 1_A(g.x) \; d\nu(g) \; dm(x)$$

et la mesure $\varepsilon_g * m$ sera noté g.m, pour tout $g \in G$.

L'objet de cet exposé est de prouver le théorème suivant:

<u>Théorème</u> : Soit μ une mesure de probabilité sur G vérifiant les hypothèses suivantes :

- Le semi- groupe fermé engendré par le support de μ est G.
- Il existe une fonction ϕ positive continue à support compact telle que, si m_D désigne une mesure de Haar à droite sur G, la mesure μ s'écrive $\phi.m_D$.

On distingue trois cas selon le signe de

$$\alpha = \int_G \operatorname{Log} a(g) \quad d\mu(g) \ .$$

1) Si $\alpha < 0$, alors il existe une unique exponentielle μ-harmonique non triviale h_β et une unique mesure de probabilité m sur $\mathbb{R}$ telle que $\mu * m = m$, et toute fonction μ-harmonique positive h s'écrit, si $g \in G$,

$$h(g) = ch_\beta(g) + \int_{\mathbb{R}} \frac{dg.m}{dm} \; d\rho$$

où c est un élément de $\mathbb{R}^+$ et ρ une mesure de Radon positive sur $\mathbb{R}$ uniquement déterminés par h.

2) Si $\alpha = 0$, alors il existe, à une constante multiplicative près, une unique mesure de Radon positive m sur $\mathbb{R}$ telle que $\mu * m = m$, et toute fonction μ-harmonique positive h s'écrit, si $g \in G$,

$$h(g) = c + \int_{\mathbb{R}} \frac{dg.m}{dm} \; d\rho$$

où c est un élément de $\mathbb{R}^+$ et ρ une mesure de Radon positive sur $\mathbb{R}$ uniquement déterminés par h.

3) Si $\alpha > 0$, alors il existe une unique exponentielle μ-harmonique non triviale h_β et une unique mesure de probabilité m sur $\mathbb{R}$ telle que $h_\beta\mu * m = m$, et toute fonction μ-harmonique positive h s'écrit, si $g \in G$,

$$h(g) = c + h_\beta(g)\int_{\mathbb{R}} \frac{dg.m}{dm} \; d\rho$$

où c est un élément de $\mathbb{R}^+$ et ρ une mesure de Radon positive sur $\mathbb{R}$ uniquement déterminés par h.

La démonstration de ce théorème est publiée dans (6). La méthode utilisée consiste dans la détermination de la frontière de Martin, et nous étudions le comportement asymptotique du "noyau de Martin". La connaissance du renouvellement sur ce groupe (5) nous apporte d'utiles renseignements sur ce comportement.

BIBLOGRAPHIE

1 - R. AZENCOTT et P. CARTIER - Martin Boundaries of Random Walks on locally compact groups. Proceeding of the 6^{th} Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability III (p.87-129).

2 - G. CHOQUET et J. DENY - Sur l'équation de convolution $\mu = \mu * \sigma$. CRAS t.250 (1960) p.799.

3 - J.P. CONZE et Y. GUIVARC'H - Propriété de droite fixe et fonctions propres des opérateurs de convolution - Séminaire de Rennes - 1976.

4 - Y. DERRIENNIC - Marche aléatoire sur le groupe libre et Frontière de Martin. Z. Warscheinlich. Gebiete 32 p.261-276 (1975).

5 - L. ELIE - Etude du renouvellement sur le groupe affine de la droite réelle. Ann. Univ. Clermont 85 (1977) p.47-62.

6 - L. ELIE - Fonctions harmoniques positives sur le groupe affine. Probability Measures on Groups. Lecture Notes (à paraître).

7 - H. FURSTENBERG - Translation-invariant cones of functions on semi-simple groups. Bull. Amer. Math. Soc. 71 (1965), p.271-326.

8 - G.A. MARGULIS - Positive harmonic functions on nilpotent groups. Doklady 1966 t.166 n°5.

UER de Mathématiques
Université Paris VII
2 Place Jussieu
75005 PARIS