Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2
Série Mathématiques

P. J. Cahen

Fractions rationnelles à valeurs entières

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 66, série *Mathématiques*, n° 16 (1978), p. 85-100
<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1978__66_16_85_0>

Ann. Sci. Univ. Clermont, Sér. Math., Fasc. 16, 1978, pp. 85 - 100

FRACTIONS RATIONNELLES A VALEURS ENTIERES

P. J. CAHEN

Université de Tunis

RESUME : Soit A un anneau intègre de corps des fractions K.
On dit qu'une fraction rationnelle, à coefficients dans K, est à valeurs entières si elle prend ses valeurs dans A. On veut généraliser une étude antérieure [(3)] faite dans le cas d'un anneau de valuation discrète de corps résiduel fini.
Ici A est un anneau de valuation discrète quelconque et on étudie les fractions rationnelles qui prennent des valeurs entières sur une partie arbitraire S de K. Elles forment un anneau, qu'on note R(S), et on veut déterminer son spectre.

On montre d'abord que R(S) est un localisé de R(K). On étudie d'abord les idéaux premiers au-dessus de l'idéal maximal de A, on montre qu'ils sont maximaux [§ 1]. On peut considérer les fractions rationnelles de R(K) comme des fonctions continues de K dans $\hat{A}$. Mais on peut compléter K et lui adjoindre un point à l'infini (de valuation $-\infty$), K est dense dans ce nouvel espace topologique $\hat{K}'$ et les éléments de R(K) sont encore des fonctions continues de $\hat{K}'$ dans $\hat{A}$. On met ainsi en évidence des idéaux maximaux, appelés ponctuels, en bijection avec les points de $\hat{K}'$: si α est un point de $\hat{K}'$, l'idéal M_α est l'ensemble des fractions rationnelles dont la valeur en α est de valuation strictement positive. Quand le corps résiduel de A est fini, le complété de K est localement compact, donc $\hat{K}'$ est compact et il en résulte qu'il n'y a pas d'autres idéaux maximaux dans R(K) [§ 2 et § 3].

Mais quand le corps résiduel de A est infini, R(K) est inclus dans l'anneau de la valuation v* de K(X) définie sur les polynômes comme l'infimum des valuations des coefficients. L'ensemble des fractions rationnelles de valuation v* strictement positive forme dans R(K) un nouvel idéal maximal M_{v^*}. Si x est un élément de K, z un entier relatif et π une uniformisante dans A, on définit un automorphisme ϕ de K(X) en posant $\phi(f) = f(x + \pi^z X)$. Par restriction, ϕ est un automorphisme de R(K). Ainsi $\phi^{-1}(M_{v^*})$ est encore un idéal maximal de R(K), deux idéaux ainsi

obtenus sont identiques si et seulement si l'entier z est le même et la différence x - y, des éléments de k, est de valuation au moins z [§ 4 et § 5].

Les localisés de R(K) en ses divers idéaux maximaux sont des anneaux de valuation, valuation discrète pour $\phi^{-1}(M_{V*})$, ou pour l'idéal ponctuel M_α quand α est transcendant sur K, valuation de hauteur 2 pour M_α quand α est algébrique. R(K) est donc un anneau de Prüfer. Les idéaux premiers de R(K) au-dessus de l'idéal (0) de A sont donc en bijection avec des valuations de K(X) : précisément la valuation $(1/_X)$ adique et les valuations P-adiques quand le polynôme irréductible P a une racine dans $\hat{K}$. Pour terminer, on montre exactement quels idéaux se remontent dans le localisé R(S). [§ 6 et § 7].

Notations : A un anneau de valuation discrète ; K son corps des fractions ; v la valuation ; π une uniformisante (donc $v(\pi) = 1$) et k le corps résiduel $A/_{\pi A}$. $\hat{K}$ le complété de K, $\hat{A}$ celui de A. On considère v comme une valuation de $\hat{K}$. On note $\bar{x}$ la classe d'un élément x de $\hat{A}$ dans $k = \hat{A}/\pi\hat{A}$. $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels. $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs.

§ 1. INTRODUCTION :

Soit S une partie de K. on note R(S) l'anneau des fractions rationnelles à valeurs entières sur S :

$$R(S) = \{f \in K(X) \mid f(s) \in A, \ \forall s \in S\}.$$

On note v.f(x) la valuation de f(x), si $x \in K$; on a encore $R(S) = \{f \in K(X) \mid v.f(s) \geq 0, \ \forall s \in S\}$.

D'abord parmi ces fractions rationnelles, il est intéressant d'examiner les polynômes à valeurs entières, soit $R(S) \cap K[X]$. On avait fait cette étude pour l'anneau $R(A) \cap K[X]$ des polynômes à valeurs entières sur A [(3)]. Si A est un anneau de valuation de corps résiduel infini, alors $R(A) \cap K[X]$ est tout simplement l'anneau de polynômes A [X] [cf. (4) § 4 Exemple 5].

LEMME 1.1. : L'anneau des polynômes à valeurs entières sur K n'est formé que des constantes entières :

$$R(K) \cap K[X] = A.$$

En effet, un polynôme non constant prend une valeur de valuation négative en tout élément x de valuation négative, assez grande en valeur absolue.

Par contre, dans tous les cas, R(K) est substantiel, et il est immédiat que R(S) contient R(K).

PROPOSITION 1.2. : Le corps des fractions de R(K) est K(X).

Preuve : Soit $f \in K(X)$. On pose $f_1 = f^2/_{\pi + f^2}$ et $g_1 = f/_{\pi + f^2}$ alors f_1 et g_1 sont dans R(K) et $f = f_1 g_1^{-1}$.

PROPOSITION 1.3. : R(S) est le localisé de R(K) pour la partie multiplicative

$$T_S = \{g \in R(K) \mid v.g(s) = 0 \quad \forall s \in S\}.$$

Preuve : Si $f \in R(K)$ et $v.g(s) = 0$ $\forall s \in S$ alors $fg^{-1} \in R(S)$.

Inversement si $f \in K(X)$, on pose $g_2 = \pi + f^2/_{\pi + f^3}$

si $v.f(x) \geq 0$ alors $v.g_2(x) = 0$

et si $v.f(x) < 0$ alors $v.g_2(x) = -v.f(x) > 0$

ainsi $g_2 \in R(K)$. Si même $f \in R(S)$ alors $g_2 \in T_S$.

De plus $f_2 = fg_2 \in R(K)$ donc $f = f_2 . g_2^{-1} \in T_S^{-1} R(K)$.

Montrons l'existence de fractions rationnelles qui «séparent» les points.

PROPOSITION 1.4 : Soit $x \in K$ et $n \in \mathbb{Z}$, on trouve $\varphi_{x,n}$ et $\Psi_{x,n}$ dans R(K) telles que

$$v.\ \varphi_{x,n}(y) \geq 1 \text{ si et seulement si } v(y-x) \geq n$$

$$v.\ \Psi_{x,n}(y) \geq 1 \text{ si et seulement si } v(y-x) < n.$$

Preuve :
$$\varphi_{x,n} = \frac{\pi^{3n-1} + (X-x)^3}{\pi^{3n-2} + (X-x)^3}$$

on a même $v.\varphi(x,n) = 1$ quand $v(y-x) \geq n$.

Il suffit alors de faire $\Psi_{x,n} = \pi/\varphi_{x,n}$.

On veut étudier le spectre de R(S), par localisation il suffit de déterminer le spectre de R(K), toutefois on a souvent intérêt à raisonner directement sur R(S). Comme R(S) est une A-algèbre il y a d'une part les idéaux premiers qui contiennent π, d'autre part les idéaux premiers d'intersection nulle avec A.

PROPOSITION 1. 5 : Si M est un idéal premier de R(S) contenant π alors M est maximal.

Preuve : Si $f \notin M$, soit $g = f/\pi + f^2$. On voit que $g \in R(S)$ (et même $g \in R(K)$). Mais on a :

$$f(1 - fg) = f\ \pi/\pi + f^2 = \pi g \in M$$

donc $(1 - fg) \in M$ et M est maximal car f est inversible modulo M.

On commence l'étude du spectre par la détermination de ces idéaux maximaux.

§ 2. FONCTIONS CONTINUES :

On peut considérer les fractions rationnelles comme des fonctions continues : si $f \in K(X)$ on peut considérer que f est à coefficients dans $\hat{K}$, c'est alors une fonction méromorphe de $\hat{K}$ dans $\hat{A}$. Si $f \in R(S)$, en particulier f n'a pas de pôles dans S, ni dans sa fermeture topologique et c'est une fonction continue à valeurs dans $\hat{A}$.

Il y a lieu d'adjoindre au complété de $\hat{K}$ un point à l'infini. Si $\hat{K}$ est localement compact, il s'agit du procédé de compactification d'Alexandroff [(1) § 10. Théorème 4].

En toute généralité on considère deux copies de $\hat{K}$ recollées dans le complémentaire de 0 par l'homéomorphisme $x \to 1/x$. On note $\hat{K}'$ ce nouvel espace topologique, réunion de $\hat{K}$ et d'un point à l'infini ω, ce point à l'infini a pour système fondamental de voisinages

$$V_n = \{\omega\} \cup \{x \in \hat{K} \mid v(x) \leq -n\}. \quad (\text{où } n \in \mathbb{N}).$$

K est dense dans $\hat{K}'$. Si S est une partie de K, on note $\hat{S}$ la fermeture de S dans $\hat{K}$, $\hat{S}'$ sa fermeture dans $\hat{K}'$.

- Si ω n'est pas adhérent à S, alors $\hat{S} = \hat{S}'$. (C'est le cas de A).
- Si ω est adhérent à S, alors $\hat{S}' = \hat{S} \cup \{\omega\}$ dans ce cas :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists s \in S \text{ et } v(s) \leq -n.$$

Quand ω est adhérent à S, on peut prolonger une fonction de R(S) de façon continue, non seulement sur $\hat{S}$, mais aussi sur $\hat{S}'$: on pose $g = f(1/X)$, g est une fraction rationnelle à valeurs entières sur 1/S (soit l'ensemble des éléments 1/s où $s \in S$). L'élément 0 est adhérent à 1/S, ce n'est donc pas un pôle de g et on peut faire $f(\omega) = g(0)$, qui est dans $\hat{A}$ par continuité.

On note $C(\hat{S}')$ l'anneau des fonctions continues de $\hat{S}'$ dans $\hat{A}$. On a donc un plongement naturel :

$$R(S) \subset C(\hat{S}').$$

PROPOSITION 2.1 : Si M est un idéal premier de R(S) contenant π, alors M se relève dans $C(\hat{S}')$.

Preuve : Il est immédiat que $\pi R(S) \subset R(S) \cap \pi C(\hat{S}')$. Inversement si $f \in R(S)$ et $f \in \pi C(\hat{S}')$ alors $v.f(s) \geq 1$. $\forall s \in S$, donc $f/_\pi \in R(S)$ et $f \in \pi R(S)$.

Ainsi $\pi R(S) = R(S) \cap \pi C(\hat{S}')$, on a donc l'inclusion :

$$R(S)/_{\pi R(S)} \subset C(\hat{S}')/_{\pi C(\hat{S}')}.$$

Les idéaux premiers de R(S), contenant π, correspondant aux idéaux premiers de $R(S)/_{\pi R(S)}$, ils sont tous maximaux et minimaux [proposition 1.5] et se relèvent donc dans $C(\hat{S}')/_{\pi C(\hat{S}')}$ [(2) II. § 2. Proposition 1.6].

On est donc conduit à examiner les idéaux premiers contenant π *de* $C(\hat{S}')$, c'est-à-dire le spectre premier de l'anneau $C(\hat{S}')/_{\pi C(\hat{S}')}$. On note $\overline{C}(\hat{S}')$ cet anneau. C'est aussi l'anneau des fonctions continues de $\hat{S}'$ dans k muni de la topologie discrète, c'est-à-dire des fonctions localement constantes de $\hat{S}'$ dans k. En effet, si f est un élément de $C(\hat{S}')$, la fonction ϕ (f) qui vaut $\overline{f(\alpha)}$ en α est localement constante et à valeurs dans k ; on définit ainsi un homomorphisme

$$\phi : C(\hat{S}') \to \overline{C}(\hat{S}'), \text{ surjectif et de noyau } \pi\, C(\hat{S}')$$

LEMME 2.2 : Il y a bijection entre les idéaux propres de $\overline{C}(\hat{S}')$ et les filtres de $(\hat{S}')$ dont une base est formée d'ensembles ouverts et fermés.

Preuve : Si f est une fonction localement constante de $\hat{S}'$ dans k on note X_f l'ensemble des points où elle s'annule. X_f est ouvert et fermé.

Si I est un idéal propre, les ensembles X_f, où f parcourt I, forment une base de filtre (il suffit de vérifier que $X_f \cap X_g$ n'est pas vide si f et g sont dans I : en effet, si $X_f \cap X_g = \emptyset$, on pose :

$\lambda = 1/f$ sur X_g, nulle sur le complémentaire de X_g,

$\mu = 1/g$ sur le complémentaire de X_g, nulle sur X_g,

alors $1 = \lambda f + \mu g \in I$, et I n'est pas un idéal propre).

Si des ensembles ouverts et fermés forment une base de filtre, l'ensemble des fonctions f telles que X_f est dans le filtre est un idéal propre de $C(\hat{S}')$.

On vérifie qu'il s'agit d'une bijection entre idéaux et filtres.

LEMME 2.3 : Les idéaux premiers de $\overline{C}(\hat{S}')$ sont maximaux.

Preuve : Si P est premier, et si $f \notin P$, on pose $g = 1/_{f^2}$ si $f \neq 0$; $g = 0$ si $f = 0$. Alors g est localement constante et $f(1 - fg) = 0 \in P$, donc $fg = 1$ (modulo P).

Ainsi les idéaux premiers de $\overline{C}(\hat{S}')$ correspondent aux filtres maximaux pour la propriété d'avoir une base d'ensembles ouverts et fermés.

Parmi ces filtres maximaux sont les filtres F_α des voisinages d'un point α (ils possèdent une base d'ouverts fermés car $\hat{S}'$ est totalement discontinu).

Si le corps résiduel k de A est fini, alors $\hat{K}$ est localement compact et $\hat{K}'$ est son compactifié d'Alexandroff [(2). VI §5. Proposition 2]. $\hat{S}'$ est aussi compact car fermé dans K ; tout filtre F de $\hat{S}'$ possède un point adhérent α [(1) § 10. Définition 1] : le filtre F_α rencontre donc tous les ensembles du filtre F, mais si F possède une base d'ensembles ouverts et fermés, F_α est alors plus fin que F. Dans ce cas les filtres maximaux qui nous intéressent, sont les filtres F_α. On retrouve le résultat classique [(2) II §4. Exercice 17]:

PROPOSITION 2. 4 : Si $\hat{S}'$ est compact, le spectre de $\overline{C}(\hat{S}')$ est en bijection avec les points de $\hat{S}'$.

Si $\hat{S}'$ n'est pas compact, il y a d'autres filtres maximaux, d'autres idéaux premiers dans $\overline{C}(\hat{S}')$.

§ 3. IDEAUX PONCTUELS DE R(S) :

Au filtre F_α de $\hat{S}'$ correspond l'idéal maximal de $\overline{C}(\hat{S}')$ des fonctions nulles sur un voisinage de α, soit l'idéal des fonctions nulles en α. Puisque $\overline{C}(\hat{S}')$ est le quotient $C(\hat{S}')/_{\pi\, C(\hat{S}')}$, il y correspond l'idéal des fonctions de $C(\hat{S}')$ qui prennent en α une valeur $f(\alpha)$ dans l'idéal maximal $\pi\hat{A}$. Comme R(S) est inclus dans $C(\hat{S}')$, cet idéal découpe un idéal premier de R(S), contenant π donc maximal [proposition 2. 1] qu'on note M_α. On dit que c'est un *idéal ponctuel* de R(S).

PROPOSITION 3. 1. Soit $\alpha \in \hat{S}'$; alors l'idéal ponctuel de R(S)

$$M_\alpha = \{f \in R(S) \mid v.f(\alpha) \geq 1\}$$

a k pour corps résiduel. Si $\alpha \neq \beta$ alors $M_\alpha \neq M_\beta$.

Preuve : On a un homomorphisme $\emptyset : R(S) \to k$ tel que $\emptyset(f) = \overline{f(\alpha)}$, son noyau est M_α, ainsi $R(S)/M_\alpha = k$.

Si $\alpha \neq \beta$ dans $\hat{S}'$, mais que α et β sont à distance finie, alors $v(\alpha - \beta) = n < \infty$.
On trouve $x \in S$, proche de α (soit tel que $v(\alpha - x) \geq n + 1$) et alors bien sûr, $v(\beta - x) = n$.
La fraction rationnelle élémentaire $\varphi_{x,n+1}$ [proposition 1.4.] est dans R(K), donc dans R(S), mais aussi dans $\hat{K}(X)$, on a alors

$$v.\ \varphi_{x,n+1}(\alpha) \geq 1 \quad \text{donc} \quad \varphi_{x,n+1} \in M_\alpha$$

$$\text{mais} \quad v.\ \varphi_{x,n+1}(\beta) = 0 \quad \text{donc} \quad \varphi_{x,n+1} \notin M_\beta .$$

Si maintenant on veut comparer M_α et M_ω quand ω est adhérent à S, on écrit explicitement

$$M_\omega = \{ f \in R(S) \mid \exists\, m \in \mathbb{Z} \text{ et } v.f(s) \geq 1 \text{ si } s \in S \text{ et } v(s) \leq m \}$$

On voit que si x est proche de α dans S (il suffit d'avoir $v(x - \alpha) \geq 1$) alors
$\varphi_{x,1} \in M_\alpha$ mais $\varphi_{x,1} \notin M_\omega$.

Remarque : Il n'est fait aucune hypothèse sur la cardinalité de k.

COROLLAIRE 3.2. : Soient S_1 et S_2 deux parties de K, alors $R(S_1) = R(S_2)$ si et seulement si S_1 et S_2 ont même fermeture topologique dans K.

Preuve : Soit $\overline{S}$ la fermeture de S dans K. On a bien sûr $R(\overline{S}) \subset R(S)$, mais inversement, si f prend des valeurs entières sur S, f prend aussi des valeurs entières sur $\overline{S}$ par continuité. Ainsi $R(\overline{S}) = R(S)$ et $R(S_1) = R(S_2)$ si $\overline{S}_1 = \overline{S}_2$. Réciproquement, supposons que α est adhérent à S_1 mais non à S_2, alors l'idéal M_α de R(K) ne rencontre pas la partie multiplicative

$$T_{S_1} = \{g \in R(K) \mid v.g(s) = 0 \quad \forall s \in S_1\}$$

mais rencontre T_{S_2}, en effet, une boule de centre α de «rayon n» assez petit est d'intersection vide avec S_2, si $x \in K$ est dans cette boule alors $\varphi_{x,n} \in M_\alpha \cap T_{S_2}$ [proposition 1.4]. Ainsi $R(S_1) \neq R(S_2)$ car ce sont les localisés de R(K) pour les parties multiplicatives T_{S_1} et T_{S_2} [proposition 1.3.].

Si k est fini, ou si plus généralement $\hat{S}'$ est compact (parce que S est fini par exemple) les seuls filtres maximaux de $\hat{S}'$ sont les filtres F_α des voisinages des points [(proposition 2.4.] comme tous les idéaux premiers de R(S) contenant π se relèvent dans $C(\hat{S}')$ on a :

THEOREME 3. 3. : Si $\hat{S}'$ est compact, les idéaux premiers de R(S) contenant π sont les idéaux M_α en bijection avec les points de $\hat{S}'$.

Si k n'est pas fini on peut mettre en évidence d'autres idéaux de R(K).
Mettons en évidence un idéal maximal de son localisé R(A) :

La valuation v de K admet un prolongement naturel à K(X), qu'on note v*, défini sur les polynômes par :

$$v^*(a_o + a_1 X + \dots\dots + a_n X^n) = \mathrm{Inf}_i \{v(a_i)\} .$$

c'est encore une valuation discrète, on note V l'anneau de cette valuation dans K(X). Son corps résiduel est k(X) [(2) VI. § 10. proposition 2].

LEMME 3. 4. : Si k est de cardinal infini, alors $R(A) \subset V$.

Preuve : Si $f \neq 0$, on peut écrire $f = \pi^n\, p/q$ où $n \in \mathbb{Z}$, p/q est irréductible et $v^*(p) = v^*(q) = 0$. On a alors $v^*(f) = n$. L'image de p dans $k[X]$ n'est pas nulle et n'a qu'un nombre fini de racines. si $a \in A$ est tel que $\bar{a}$ ne soit pas une de ces racines, alors $v.p(a) = 0$ tandis que $v.q(a) \geq 0$, donc $v.f(a) \leq n$. Mais si $f \in R(A)$ alors $f(a) \in A$, donc $v^*(f) = n \geq v.f(a) \geq 0$.

Ainsi l'idéal maximal de V a pour intersection dans R(A) (et aussi dans R(K)) un idéal premier contenant π, donc maximal, qu'on note M_{v^*}.

LEMME 3. 5. : Si k est de cardinal infini, alors

$$M_{v^*} = \{f \in R(A) \mid v^*(f) \geq 1\}$$

est un idéal maximal de R(A) qui n'est pas ponctuel (c'est-à-dire de la forme M_α).

Preuve : Soit α un point de $\hat{A}$, et $a \in A$ tel que $v(a - \alpha) \geq 1$, alors

$$\varphi_{a,1} = \frac{\pi^2 + (X-a)^3}{\pi + (X-a)^3} \quad \text{vérifie :} \quad \varphi_{a,1} \in M_\alpha \quad \text{mais} \quad v^*(\varphi_{a,1}) = 0.$$

Donnons maintenant une autre caractérisation de l'idéal M_{v^*} :

Si $f \in R(A)$, on note X_f l'ensemble des points $a \in \hat{A}$ où $v.f(a) \geq 1$. C'est aussi l'ensemble des points où l'image de f dans $C(\hat{A})/_{\pi}\, C(\hat{A})$ s'annule. Par définition $f \in M_\alpha$ si et seulement si $\alpha \in X_f$ (ou bien $X_f \in F_\alpha$ filtre des voisinages de α).

Si $f \in R(A)$ on note X'_f l'image de X_f par la surjection canonique $\hat{A} \to \hat{A}/_{\pi \hat{A}} = k$.

$$X'_f = \{x \in k \mid \exists a \in A \text{ tel que } v.f(a) \geq 1 \text{ et } \bar{a} = x\}.$$

Par exemple si $f \in M_\alpha$ alors $\alpha \in X'_f$.

LEMME 3. 6 : Si k est de cardinal infini, alors $f \in M_{v*}$ si et seulement si X'_f est de complémentaire fini dans k.

Preuve : Soit $f \in R(A)$ et $f \neq 0$ (bien sûr $X'_0 = k$) alors on écrit $f = \pi^n p/q$ où $n \geq 0$. Si $n = 0$, donc $f \notin M_{v*}$, on voit que $v.f(a) \geq 1$ seulement si $\bar{a}$ est racine de la classe de p dans $k[X]$, ainsi X'_f est fini. Si $n \geq 1$, donc $f \in M_{v*}$ on voit que $v.f(a) \geq 1$ pourvu que $\bar{a}$ ne soit pas racine de la classe de q dans $k[X]$, ainsi X'_f est de complémentaire fini dans k.

Remarque 3. 7 : Si k est de cardinal infini, les idéaux premiers de R(A) contenant π se relèvent bien dans $C(\hat{A})$ mais il n'y a plus bijection ! Les idéaux maximaux de $C(\hat{A})$ correspondant toujours à des filtres de $\hat{A}$ [§ 2], on va en fabriquer deux ; en considérant deux suites (x_n) et (y_n) de A, telles que les classes $\bar{x}_n$ et $\bar{y}_n$ soient toutes distinctes dans k.

On note $X_r = \{x \in \hat{A} \mid \exists n \geq r \text{ et } v(x - x_n) \geq 1\}$

X_r est l'union des boules de centre x_n, $n \geq r$, de «rayon 1». Les ensembles X_r sont ouverts et fermés et forment une base de filtre, contenu dans un filtre maximal F par le lemme de Zorn, il y correspond un idéal maximal M de $C(\hat{A})$. De même on a des ensembles Y_r, fabriqués à l'aide de la suite (y_n), contenus dans un filtre maximal G auquel correspond un idéal maximal N de $C(\hat{A})$. Ces idéaux sont distincts, car les filtres sont distincts, en effet, X_r et Y_r sont sans point commun. Mais si $f \in M_{v*}$ alors X'_f est de complémentaire fini, et on voit que X_f contient à la fois X_r et Y_r pour r assez grand. Ainsi $f \in M$, et $f \in N$, on a donc :

$$M_{v*} = M \cap R(A) = N \cap R(A).$$

§ 4. FIBRE AU-DESSUS DE π DE R(A).

On détermine ici *tous* les idéaux premiers de R(A) contenant π. On récupère *aussi* les idéaux ponctuels mais il était plus conceptuel d'envisager ceux-ci à l'aide des fonctions continues. On en déduira, au paragraphe suivant, la fibre au-dessus de π de R(K), donc de R(S), par localisation. Bien sûr cette étude n'est désormais utile que si k est infini.

Si $f \in R(A)$, on note encore X_f les points a de $\hat{A}$ tels que $v.f(a) \geq 1$. Pour $n \geq 1$, on note p_n la surjection canonique : $\hat{A} \to A/\pi^n A \to 0$. Si $n \geq m$, on note $p_{n,m}$ la surjection $p_{n,m} : A/\pi^n A \to A/\pi^m A \to 0$, telle que $p_m = p_{n,m} \circ p_n$. On a un système projectif et $\hat{A} = \varprojlim (A/\pi^n A)$.

On note X^n_f l'image de X_f par p_n c'est aussi l'image de $X_f \cap A$ par p_n, car A est dense dans $\hat{A}$, ainsi :

$$X^n_f = \{x \in A/\pi^n A \mid \exists a \in A \text{ tel que } v.f(a) \geq 1 \text{ et } p_n(a) = x\}.$$

Si M est un idéal de R(A), on note X^n_M l'intersection $X^n_M = \bigcap_{f \in M} X^n_f$.

Si $n \geq m$, alors $p_{n,m}(X^n_f) = X^m_f$ (car $p_m = p_{n,m} \circ p_n$) et donc $p_{n,m}(X^n_M) \subset X^m_M$.

On va montrer que la suite $X^1_M, \ldots\ldots, X^n_M, \ldots.$ *caractérise les idéaux premiers de R(A) contenant* π .

LEMME 4. 1 : Soit M un idéal premier de R(A) contenant π, alors ou bien $X^n_m = \emptyset$, ou bien X^n_m est réduit à un point.

Preuve : Si X^n_M n'est pas vide, supposons que X^n_M contienne à la fois $p_n(a)$ et $p_n(b)$ (où $a, b \in A$ et $v(a - b) < n$). Les fractions rationnelles élémentaires [proposition 1. 4.] $\varphi = \varphi_{a,n}$ et $\Psi = \Psi_{a,n}$ sont dans R(K) donc dans R(A), et on vérifie facilement que $\varphi . \Psi \in \pi R(A) \subset M$. Pourtant on voit, par construction, que

$p_n(b) \notin X^n_\varphi$ donc $\varphi \notin M$ et

$p_n(a) \notin X^n_\Psi$ donc $\Psi \notin M$ une contradiction !

En particulier, on a :

PROPOSITION 4. 2. Soit M un idéal premier contenant π de R(A) et α un point de $\hat{A}$. On a $X^n_m = \{p_n(\alpha)\}$, $\forall n \geq 1$ si et seulement si $M = M_\alpha$.

Preuve : Par définition de M_α , si $f \in M_\alpha$ alors $\alpha \in X_f$, on a donc $X^n_{M_\alpha} = \{p_n(\alpha)\}$, $\forall n \geq 1$. Inversement, si M est tel que $X^n_M = \{p_n(\alpha)\}$, $\forall n \geq 1$, il suffit de montrer que $M \subset M_\alpha$, car M est maximal. Si donc $f \in M$, il suffit de montrer que $v.f(\alpha) \geq 1$.

On raisonne par l'absurde :

Si $v.f(\alpha) = 0$, alors $v.f(a) = 0$ si $a \in A$ est proche de α , soit tel que $v(a - \alpha) \geq n$ pour n assez grand ; mais alors $p_n(\alpha) \notin X^n_f$.

LEMME 4. 3. Soit M un idéal premier de R(A) contenant π . Il existe f dans M tel que X^n_f est fini si et seulement si X^n_m n'est pas vide. Dans ces conditions, $X^n_m = \{p_n(a)\}$ et $\varphi_{a,n} \in M$, pour un élément a de A.

Preuve : Si il existe $f \in M$ et que X^n_f est fini, alors X^n_f n'est pas vide (sinon f est inversible) et on peut choisir f afin que X^n_f soit minimal. Pour montrer que $X^n_M \neq \emptyset$, il suffit de montrer que

$X^n_f \subset X^n_g$, $\forall g \in M$.

Si ce n'est pas le cas, alors $p_n(a) \in X^n_f$ mais $p_n(a) \notin X^n_g$. On considère alors $h = \varphi_{a,n} f + \Psi_{a,n} g$, h est dans M, mais on vérifie que

si $x \in A$, et $v(x - a) \geq n$ alors $v.h(x) = 0$ donc $p_n(a) \notin X^n_h$

si $v(x - a) < n$ alors $v.h(x) \geq 1$ entraîne $v.f(x) \geq 1$.

Ainsi $X^n_h \subsetneq X^n_f$ contrairement au caractère minimal de X^n_f.

Si, réciproquement X^n_M n'est pas vide, X^n_M ne contient qu'un point [lemme 4.1] $p_n(a)$.

Soit $\Psi = \Psi_{a,n}$, comme $p_n(a) \notin X^n_\Psi$ alors $\Psi \notin M$ mais $\varphi_{a,n} \cdot \Psi_{a,n} \in \pi R(A)$, donc $\varphi_{a,n} \in M$.

Soit $\varphi = \varphi_{a,n}$, X^n_φ est fini puisque ne contient que $p_n(a)$.

PROPOSITION 4. 4. Si k est de cardinal infini, l'idéal

$$M_{v*} = \{f \in R(A) \mid v^*(f) \geq 1\}$$

est le seul idéal premier de R(A), contenant π, tel que $X^1_M = \emptyset$.

En effet M_{v*} est aussi l'ensemble des éléments f de R(A) tels que X^1_f est infini [lemme 3.6].

PROPOSITION 4. 5. Soit M un idéal premier de R(A) contenant π, la suite d'ensembles $X^1_M, X^2_M, \ldots\ldots, X^n_M, \ldots\ldots$ est d'un des types suivants :

1 - tous les ensembles X^n_M sont vides,

2 - Il existe $\alpha \in \hat{A}$ et $X^n_M = \{p_n(\alpha)\}$,

3 - Il existe $a \in A$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$X^m_M = \{p_m(a)\} \quad \text{si } m \leq n \quad \text{et } X^m_M = \emptyset \quad \text{si } m > n.$$

Preuve : On a l'inclusion $p_{n,m}(X^n_M) \subset X^m_M$, si $n \geq m$; alors si X^m_M est vide, il en est de même des ensembles X^n_M, si $n \geq m$. Le type 1 s'il existe correspond à M_{v*}. Si aucun ensemble X^n_M n'est vide, chacun est réduit à un point dans $A/\pi^n A$. ces points forment un système compatible et correspondant à un élément α de $\hat{A}$ qui est la limite projective des $A/\pi^n A$: c'est alors le type 2. Enfin il se peut que $X^m_M = \emptyset$ à partir d'un certain rang, soit $m > n$, les ensembles X^m_M sont alors réduits à un point pour $m \leq n$, et déterminés par un même élément de A, par compatibilité, c'est alors le type 3.

Remarque : Si k est fini, tous les ensembles $A/\pi^n A$ sont finis alors X^n_f est toujours fini, X^n_M n'est jamais vide, seul le type 2 est possible. On retrouve alors que tous les idéaux premiers de R(A), contenant π, sont des idéaux ponctuels.

Il nous reste à étudier le type 3.

On considère l'automorphisme ϕ de K(X) tel que $\phi(f) = f(a + \pi^n X)$. Sa rectriction à R(A) est un endomorphisme injectif, $\phi^{-1}(M_{v*})$ est donc un idéal premier de R(A), on voit qu'il contient π

PROPOSITION 4. 6. Si k est de cardinal infini, l'idéal $\phi^{-1}(M_{v*})$ est le seul idéal premier de R(A), contenant π, tel que $X^n_M = \{p_n(a)\}$ et $X^{n+1}_M = \emptyset$

Preuve : Soit $M = \phi^{-1}(M_{v*})$,

- $X^n_M = \{p_n(a)\}$, en effet si $f \in M$, on pose $g = \phi(f)$, alors $g \in M_{v*}$, donc $\exists\, b \in A$ et $v.g(b) \geq 1$, autrement dit

$v.f(a + \pi^n b) \geq 1$ donc $p_n(a) \in X^n_f$.

- $X^{n+1}_M = \emptyset$. En effet si $f \in M$, $v.f(a + \pi^n b) \geq 1$ pour une infinité d'éléments b de classe distincte dans $A/_{\pi}A$, car $\phi(f) \in M_{v*}$ [lemme 3. 6.] et donc X^{n+1}_f est infini (ceci $\forall f \in M$), alors $X^{n+1}_M = \emptyset$ [lemme 4.3.].

Réciproquement si M satisfait aux hypothèses, alors $\varphi_{a,n} \in M$ [lemme 4.3]. Si $f \in M$ on voit que $h = \Psi_{a,n} f + \varphi_{a,n}$ est aussi dans M et donc X^{n+1}_h est infini, car $X^{n+1}_M = \emptyset$. Mais on vérifie que $v.h(x) \geq 1$ entraîne que $p_n(x) = p_n(a)$ et $v.f(x) \geq 1$, autrement dit x est de la forme $a + \pi^n b$ et $v.f(a + \pi^n b) \geq 1$ pour une infinité d'élments b de classe distincte dans $A/_{\pi}A$. Alors $\phi(f) \in M_{v*}$. En conclusion $M \subset \phi^{-1}(M_{v*})$ et même $M = \phi^{-1}(M_{v*})$ car M est maximal.

Les propositions 4.2, 4.4 et 4.6 décrivent tous les idéaux premiers de R(A) qui contiennent π.

§ 5. FIBRE AU-DESSUS DE π DE R(S).

a) Cas de R(K) :

Si $z \in \mathbb{Z}$, on note A_z la partie de K :

$$A_z = \{x \in K \mid v(x) \geq z\} = \pi^z A.$$

LEMME 5. 1 : Soit M un idéal premier de R(K) contenant π et distinct de M_ω (l'idéal ponctuel à l'infini), alors il existe $z \in \mathbb{Z}$ tel que M se relève dans $R(A_z)$.

Preuve : Comme M est maximal, M n'est pas inclus dans M_ω, on trouve $f \in M$ tel que $v.f(\omega) = 0$, ou encore $v.f(x) = 0$ $\forall x$ dans le complémentaire de A_z, pour un z convenable ; on montre que M se relève dans $R(A_z) = T^{-1} R(K)$ où T est la partie multiplicative

$$T = \{g \in R(K) \mid v.g(x) = 0 \quad \forall x \in A_z\}.$$

Il faut montrer que M ne rencontre pas T. Par l'absurde on suppose que $g \in M \cap T$ et on considère $\varphi = \dfrac{\pi^{3z-1} + X^3}{\pi^{3z-2} + X^3}$ qui est telle que $v.\varphi(x) \geq 1$ exactement sur A_z alors $\Psi = \pi/_{\varphi}$ est telle que $v.\Psi(x) \geq 1$ exactement en dehors de A_z.

On vérifie que $h = \varphi.f + \Psi.g$ est partout inversible, mais $h \in M$.
Contradiction.

LEMME 5. 2. L'application ϕ_z définie par $\phi_z(f) = f(\pi^z X)$ établit un isomorphisme de A-algèbres entre $R(A_z)$ et R(A), d'inverse ϕ_{-z}.

C'est clair. Le spectre de $R(A_z)$ est donc en bijection avec celui de R(A). L'idéal ponctuel M_α de R(A) a pour image inverse l'idéal $M_{\pi^z\alpha}$ de $R(A_z)$ par ϕ_z. Les autres idéaux de R(A), premiers et contenant π, sont de la forme $\phi^{-1}(M_{v*})$ où ϕ est un homomorphisme tel que $\phi(f) = f(a + \pi^n X)$ [proposition 4.6]. Composant ϕ_z et ϕ, on est conduit à considérer pour tout

$x \in K$ et tout $z \in \mathbb{Z}$, l'automorphisme de $K(X)$ défini par $\phi_{x,z}(f) = f(x + \pi^z X)$, sa restriction à $R(K)$ définit un A-automorphisme de $R(K)$ d'inverse $\phi_{x',z'}$ où $z' = -z$ et $x' = -\pi^{-z} x$.

THEOREME 5. 3. : Les idéaux premiers de $R(K)$ contenant π sont :

- les idéaux ponctuels en bijection avec les points de $\hat{K}'$
- les idéaux $M_{x,z} = \{ f \in R(K) \mid v^* (f(x + \pi^z X)) \geq 1\}$

où $x \in K$ et $z \in \mathbb{Z}$. On a $M_{x,z} = M_{x',z'}$ si et seulement si $z = z'$ et $v(x - x') \geq z$.

Remarque : On peut encore noter M_{v^*} l'idéal $M_{o,o} = \{ f \in R(K) \mid v^*(f) \geq 1\}$.

Preuve : Tous les idéaux premiers de $R(K)$ contenant π sont bien d'un des deux types indiqués d'après les lemmes 5.1 et 5.2. Si $z \neq z'$, ou si $v(x - x') < z = z'$, on choisit $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \pi^n = a$ et $y \pi^n = b$ soient dans A et tel que, de plus, $z + n \geq 1$ et $z' + n \geq 1$.
Mais alors les idéaux

$$M_1 = \{ f \in R(A) \mid v^*(f(a + \pi^{z+n} X)) \geq 1 \}$$

$$\text{et} \quad M_2 = \{f \in R(A) \mid v^*(f(b + \pi^{z'+n} X)) \geq 1 \}$$

sont distincts dans $R(A)$, soit parce que $z + n \neq z' + n$, soit parce que $p_n(a) \neq p_n(b)$ dans $A/_{(\pi^{z+n})A}$ [proposition 4.6.]. Ainsi les idéaux $\phi^{-1}_{-n}(M_1)$ et $\phi^{-1}_{-n}(M_2)$ sont distincts dans $R(A_{-n})$ qui est isomorphe à $R(A)$, et comme $R(A_{-n})$ est un localisé de $R(K)$, il en résulte que $M_{x,z} = \phi^{-1}_{-n}(M_1) \cap R(K)$ et $M_{x',z'} = \phi^{-1}_{-n}(M_2) \cap R(K)$ sont distincts.

b) Cas de $R(S)$:
Il est immédiat qu'un idéal ponctuel M_α de $R(K)$ se relève dans $R(S)$ si et seulement si α est dans $\hat{S}'$. On veut étudier à quelle condition $M_{x,z}$ se relève, on examine d'abord le cas de $M_{o,o}$.

LEMME 5. 4. : L'idéal $M_{v^*} = M_{o,o}$ de $R(K)$ se relève dans $R(S)$ si et seulement si il y a dans S une infinité d'éléments de valuation positive et de classe distincte dans $k = A/_{\pi} A$.

Preuve : $R(S) = T_S^{-1} \cap R(K)$ où $T_S = \{g \in R(K) \mid v.g(s) = 0 \quad \forall s \in S\}$.

Si $g \in R(K)$ on peut écrire $g = \pi^n p/q$ où $v^*(g) = n \geq 0$ et $v^*(p) = v^*(q) = 0$.

Si $g \in M_{v^*}$ alors $n > 0$ et si dans S il y a une *infinité* d'éléments de classe distincte dans $A/_{\pi} A$, alors $v.g(s) > 0$ si $\bar{s}$ n'est pas racine de la classe de q dans $k[X]$, donc $g \notin T_S$, ainsi $M_{v^*} \cap T_S = \emptyset$ et M_{v^*} se relève dans $R(S)$.

Au contraire, si $S \cap A$ a dans A un ensemble *fini* de représentants modulo πA : $a_1, a_2, \ldots, a_n$, alors $g = \Pi(X - a_i)$ est de valuation strictement positive partout sur S et donc

$$\left(\frac{\pi + \pi g^2}{\pi + g^2}\right) \in M_{v^*} \cap T_S.$$

PROPOSITION 5. 5. : L'idéal $M_{x,z}$ se relève dans $R(S)$ si et seulement si il y a une infinité d'éléments s_i dans S tels que $v(s_i - x) \geq z$ et $v(s_i - s_j) = z$ si $i \neq j$.

Dans la boule de centre x «de rayon z» on peut construire des «polygônes réguliers» d'un nombre arbitraire de côté.

Preuve : $M_{x,z}$ est l'idéal $\phi^{-1}_{x,z}(M_{v*})$. Il rencontre la partie multiplicative T_S si et seulement si M_{v*} rencontre la partie multiplicative $\phi_{x,z}(T_S)$ (Car $\phi_{x,z}$ est bijectif). Mais on voit que $\phi_{x,z}(T_S)$ est la partie multiplicative T_U des fonctions qui prennent des valeurs inversibles sur $U = \{u \mid x + \pi^z u \in S\}$. Ainsi $M_{x,z}$ se relève dans R(S) si et seulement si M_{v*} se relève dans R(U) et la proposition résulte alors directement du lemme.

Note : Si les éléments $s_i \in S$ répondent aux conditions de la proposition, alors $v(s_i - x) = z$ pour tout i sauf au plus un d'entre eux puisque $v(s_i - s_j) = z$ si $i \neq j$.

§ 6. LOCALISES DE R(K).

LEMME 6. 1. Le localisé $R(K)_{M_{v*}}$ est l'anneau V de la valuation v* de K(X).

Preuve : On a $R(K) \subset R(A) \subset V$ [lemme 3.4.], si $g \notin M_{v*}$ dans R(K) alors $v^*(g) = 0$ ainsi $R(K)_{M_{v*}} \subset V$. Réciproquement si $f \in V$, alors $v^*(f) = n \geq 0$, on pose alors $f' = \pi^{-n} f$. On vérifie que $f'_1 = \dfrac{f'^2}{\pi + f'^2}$ et $g'_1 = \dfrac{f'}{\pi + f'^2}$ sont dans R(K) et que $g'_1 \notin M_{v*}$ ainsi $f = \pi^n f'_1 . g'^{-1}_1 \in R(K)_{M_{v*}}$.

PROPOSITION 6. 2. : Le localisé $R(K)_{M_{x,z}}$ est l'anneau d'une valuation discrète de K(X) qui prolonge v, de corps résiduel $R(K)/_{M_{x,z}}$ isomorphe à k(T).

Preuve : L'automorphisme $\phi_{x,z}$ de K(X) définit un automorphisme de R(K), la proposition résulte alors du lemme puisque $M_{x,z} = \phi^{-1}_{x,z}(M_{v*})$. On sait que le corps résiduel de V est isomorphe à k(T).

Si α est un élément de $\hat{K}$, transcendant sur K, on peut définir une valuation discrète v_α de K(X), par la formule $v_\alpha(f) = v.f(\alpha)$.

PROPOSITION 6. 3. : Si α est un élément de $\hat{K}$, transcendant sur K, le localisé $R(K)_{M_\alpha}$ est l'anneau d'une valuation discrète v_α de K(X), prolongeant v et de corps résiduel k.

Preuve : Soit V_α l'anneau de la valuation v_α. Bien sûr $R(K) \subset V_\alpha$ (si $f \in R(K)$ alors $v.f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \hat{K}$), par définition $M_\alpha = \{f \in R(X) \mid v_\alpha(f) \geq 1\}$ donc $R(K)_{M_\alpha} \subset V_\alpha$ et $R(K)/_{M_\alpha} = k$ [proposition 3. 1.].

Il reste à montrer que $V_\alpha \subset R(K)_{M_\alpha}$. Soit donc $f \in V_\alpha$, on peut écrire $f = f_1/g_1$ où $f_1, g_1 \in R(K)$.

Si $v.g_1(\alpha) = 0$, alors $g_1 \notin M_\alpha$ on peut déjà conclure, sinon $v.g_1(\alpha) = n$ mais alors $v.f_1(\alpha) \geq n$. Pour a assez proche de α, et pour une boule B de centre a de «rayon m» assez élevé on a par continuité :

$$v.f_1(x) = v.f_1(\alpha) \geq v.g_1(\alpha) = v.g_1(x) = n, \ \forall x \in B.$$

La fonction $\varphi_{a,m}$ est telle que $v.\varphi_{a,m}(x) = 1$ si $x \in B$ et $v.\varphi_{a,m}(x) = 0$ si $x \notin B$.
On pose donc $f'_1 = f_1/\pi^n \varphi_{a,m}$ et $g'_1 = g_1/\pi^n \varphi_{a,m}$ alors f'_1 et $g'_1 \in R(K)$, mais cette fois $v.g'_1(\alpha) = 0$ donc $f = f'_1/g'_1 \in R(K)_{M_\alpha}$.

Si α est un élément algèbrique de $\hat{K}$, on peut alors considérer son polynôme minimal P. Bien que P soit différent de 0 on a $v.P(\alpha) = \infty$ et la formule $v_\alpha(f) = v.f(\alpha)$ ne définit pas une valuation de K(X).

Mais on peut écrire toute fraction rationnelle f, d'une unique façon, sous la forme $f = P^r g$ où r est la valuation P-adique de f, notée $v_P(f)$. Numérateur et dénominateur de g sont maintenant premiers avec P et n'ont pas α pour racine, $v.g(\alpha)$ est donc bien défini.
On vérifie que la formule

$$w_\alpha(f) = (r, v.g(\alpha)) \qquad \text{où} \qquad r = v_P(f),\ g = f/P^r$$

définit dans ce cas une valuation de K(X), de groupe des valeurs $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ordonné léxicographiquement, dont on désigne l'anneau par W_α.

PROPOSITION 6. 4. : Si α est un élément de K algèbrique sur K, le localisé $R(K)_{M_\alpha}$ est l'anneau W_α d'une valuation w_α de K(X) de groupe des valeurs $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, contenu dans l'anneau de la valuation P-adique où P est le polynôme minimal de α sur K.

Preuve : Si $f \in R(K)$, f n'a pas de pôle dans K ni dans $\hat{K}$ et donc $r = v_P(f) \geq 0$. Si $v_P(f) > 0$, alors par définition de l'ordre léxicographique $w_\alpha(f) > 0$, et si $v_P(f) = 0$ alors $f = g$ et $v.f(\alpha) = v.g(\alpha) \geq 0$ (mais $v.f(\alpha)$ est fini dans ce cas) donc $w_\alpha(f) = (0, v.g(\alpha)) \geq 0$. Ainsi $R(K) \subset W_\alpha$, bien sûr W_α est contenu dans l'anneau de la valuation P-adique de K(X), et même $R(K)_{M_\alpha} \subset W_\alpha$ car M_α est l'intersection de R(K) et de l'idéal maximal de W_α, par définition.

Il reste à montrer que $W_\alpha \subset R(K)_{M_\alpha}$. On montre, pour $\alpha \in \hat{A}$, que $W_\alpha \subset R(A)_{M_\alpha}$ car M_α se relève alors dans R(A). Le cas général, donc le cas où $v(\alpha) = -n$, s'en déduit en considérant l'automorphisme ϕ_n de K(X) tel que $\phi_n(f) = f(\pi^n X)$ qui échange les idéaux M_α et $M_{\pi^n\alpha}$. Soit donc $f \in W_\alpha$ on peut écrire $f = P^r g$ où $r \geq 0$ et on convient, en multipliant P par une constante, de prendre P dans A [X]. On pose alors $f_1 = g^2/\pi + g^2$ et $g_1 = g/\pi + g^2$; f_1 et g_1 sont dans R(K) donc dans R(A). De plus $v_P(g_1) = v_P(g) = 0$, et $v.g_1(\alpha) = v.g(\alpha) = n$ est bien défini. On considère une boule B de centre a, voisin de α, de rayon m où m est élevé et on pose comme à la proposition précédente

$$f'_1 = f_1/\pi^n \varphi_{a,m} \quad , g'_1 = g_1/\pi^n \varphi_{a,m}$$

Par construction, alors $g'_1 \in R(A)$ mais $v.g'_1(\alpha) = 0$, et donc $g'_1 \notin M_\alpha$.
- ou bien $v_P(f) = r > 0$, mais alors $v.P(x) \to \infty$ quand $x \to \alpha$ dans $\hat{A}$ et pour m assez élevé $P^r f'_1 = P^r f_1/\pi^n \varphi_{a,m}$ est encore dans R(A) ($P \in A[X]$ et $A[X] \subset R(A)$).

Alors $f = P^r\, f'_1/g'_1 \in R(A)_{M_\alpha}$

- ou bien $v_P(f) = 0$ alors $f = g$ et $v.f_1(\alpha) \geq v.g_1(\alpha)$ ainsi $f'_1 = f_1/\pi^n\, \varphi_{a,m} \in R(A)$ (Comme à la proposition précédente) et $f = f'_1/g'_1 \in R(A)_{M_\alpha}$.

PROPOSITION 6.5. : Le localisé $R(K)_{M_\omega}$ est l'anneau d'une valuation de $K(X)$ de groupe des valeurs $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ contenu dans l'anneau de la valuation $(1/X)$ adique de $K(X)$.

Il reste en effet le cas du point à l'infini de $\hat{K}'$. Mais cette proposition résulte immédiatement de la précédente en considérant l'automorphisme ϕ de $K(X)$ tel que $\phi(f) = f(1/X)$ qui laisse $R(K)$ globalement invariant, échange les idéaux M_ω et M_0, échange les valuations X-adique et $(1/X)$ adiques de $K(X)$.

COROLLAIRE 6.6 : Si $S = \{\alpha\}$ est un point de K, alors l'anneau $R(\alpha) = R(S)$ est un anneau de valuation de groupe des valeurs $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

§ 7. FIBRE AU-DESSUS DE (0).

Il nous reste à étudier les idéaux premiers de $R(S)$ d'intersection nulle avec A. Ils sont en bijection avec les points du spectre de $R(S) \otimes_A K$.

THEOREME 7.1. Les idéaux premiers de R(K) au-dessus de (0) sont

- l'idéal (0)
- l'idéal $\widetilde{(X^{-1})}$ formé des éléments de $R(K)$ de valuation $(\frac{1}{X})$ adique strictement positive.
- les idéaux $\widetilde{(P)}$ formés des éléments de $R(K)$ de valuation P-adique strictement positive, en bijection avec les polynômes irréductibles de $K[X]$ qui ont une racine dans $\hat{K}$.

Preuve : Si P a une racine α dans $\hat{K}$, on a vu que $R(K)_{M_\alpha}$ est un anneau de valuation de hauteur 2, contenu dans l'anneau de la valuation P-adique, de même $R(K)_{M_\omega}$ est contenu dans l'anneau de la valuation $(1/X)$ adique [proposition 6.4. et 6.5]. Dans $R(K)$ il y a donc les idéaux premiers au-dessus de (0) décrits dans le théorème. On note B l'anneau intersection des anneaux des valuations P-adiques ci-dessus et de l'anneau de la valuation $(1/X)$ adique, alors B est un anneau de Krull et $R(K) \otimes_A K \subset B$; il suffit de montrer qu'en fait $B = R(K) \otimes_A K$ pour établir qu'il n'y a pas d'autres idéaux premiers au-dessus de (0) dans R(K). Si $f \in B$ il faut montrer que $v.f(x)$ est bornée inférieurement quand x parcourt K, ainsi $\pi^n f \in R(K)$ (pour n assez grand) et $f \in R(K) \otimes K$. Comme f est de valuation $(1/X)$ adique positive, f n'a pas de pôle en ω et $v.f(x)$ est bornée inférieurement sur un voisinage de ω. Le complémentaire de ce voisinage est un ensemble A_z, $A_z = \{x \in K \mid v(x) \geq z\}$, il reste à montrer que $v.f(x)$ est bornée inférieurement sur A_z donc que $v.f(\pi^z x)$ est bornée inférieurement sur A. On écrit $f = p/q$ sous forme irréductible, alors q n'a pas de racine dans $\hat{K}$, car $f \in B$, et $v_P(f) \geq 0$ pour tout P irréductible ayant une racine dans $\hat{K}$.
On a donc $f(\pi^z X) = p(\pi^z X)/q(\pi^z X)$ et $q(\pi^z X)$ n'a pas non plus de racine dans $\hat{K}$. Pour montrer que $v.f(\pi^z x)$ est bornée *inférieurement* sur A, on suppose (en multipliant haut et bas par une constante) que $p(\pi^z X)$ et $q(\pi^z X)$ sont dans $A[X]$, et on établit que $v.q(\pi^z x)$ est bornée *supérieurement* sur A. C'est ce que montre le lemme.

LEMME 7.2 : Soit g un polynôme de $A[X]$ sans racine dans $\hat{A}$, alors v.g(a) est bornée supérieurement sur A.

Preuve : (C'est clair si k est fini car alors $\hat{A}$ est compact, mais ce n'est pas toujours le cas).
On montre que si v.g(x) n'a pas de borne, alors g a une racine α dans $\hat{A}$. Si $g = 0$, g a bien une racine dans $\hat{A}$, sinon on divise g par une constante pour obtenir $v^*(g) = 0$. La classe de g n'est alors pas triviale dans $K[X]$ et n'a qu'un nombre fini de racines. L'une d'elle x_1 est telle que v.g(a) n'est pas borné sur l'ensemble des éléments a de A qui relèvent x_1. On suppose par récurrence que v.g(a) n'est pas borné sur l'ensemble des éléments de classe x_n dans $A/_{\pi^n A}$. On suppose que a_n relève x_n ainsi $v.g(a_n + \pi^n b)$ n'est pas bornée quand b parcourt A. Comme $g \neq 0$ alors $g_n = g(a_n + \pi^n X) \neq 0$, et en divisant au besoin g_n par une constante, on peut supposer que la classe de g_n dans $k[X]$ n'est pas triviale. Celle-ci n'a qu'un nombre fini de racines dans k. Ainsi $v.g(a_n + \pi^n b)$ n'est pas bornée sur l'ensemble des éléments b de la forme $b = b_o + \pi b'$ (les éléments de la classe de b_o) et v.g(a) n'est donc pas bornée sur l'ensemble des éléments a de la forme $a = a_n + \pi^n b_o + \pi^{n+1} b'$ (les éléments de la classe de $a_{n+1} = a_n + \pi^n b_o$ modulo $\pi^{n+1} A$). On définit ainsi une suite $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots$ d'éléments de $A/_{\pi A}, \ldots, A/_{\pi^n A}, A/_{\pi^{n+1} A}, \ldots$ (x_{n+1} est la classe de $a_n + \pi^n b_o$) compatibles par les surjections canoniques et qui définit donc un élément α de $\hat{A} = \lim (A/_{\pi^n A})$. On a bien $g(\alpha) = 0$ (sinon v.g(a) resterait bornée dans un voisinage de α).

COROLLAIRE 7.3. R(S) est un anneau de Prüfer.

Preuve : Il résulte du théorème que seuls les idéaux premiers contenant π sont maximaux dans R(K). Les localisés en ces idéaux sont des anneaux de valuation [§ 6]. Les localisés aux idéaux non maximaux sont aussi des anneaux de valuation : les anneaux de valuation P-adique et $(1/_X)$ adique. Ainsi R(K) est un anneau de Prüfer. C'est donc vrai aussi de R(S) qui est un localisé de R(K).

COROLLAIRE 7.4. Les idéaux premiers de R(S) au-dessus de (0) sont
- l'idéal (0)
- l'idéal $(\widetilde{X^{-1}})$ R(S) si ω est adhérent à S
- les idéaux $\widetilde{P}$ R(S) en bijection avec les polynômes irréductibles de $K[X]$ ayant une racine dans $\hat{S}$.

Preuve : Le cas de $(\widetilde{X^{-1}})$ se ramène à celui de $(\widetilde{X})$ en considérant l'automorphisme ϕ, tel que $\phi(f) = f(1/_X)$. Reste à voir que $(\widetilde{P})$ se relève dans R(S) si et seulement si P a une racine dans $\hat{S}$. Si P a une telle racine α, et si $f \in (\widetilde{P})$ alors $f(\alpha) = 0$, donc $(\widetilde{P})$ ne rencontre pas la partie multiplicative

$$T_S = \{ g \in R(K) \mid v.g(s) = 0 \quad \forall s \in S \} .$$

Si inversement P n'a pas de racine dans $\hat{S}$, on montre comme au lemme 6.2. que v.P(s) est bornée quand s parcourt S : $\exists n \in N$ et $v.P(s) \leq n$, $\forall s \in S$. Alors on considère $g = P^2/_{\pi^{2n+1}} + P^2$, $g \in R(K)$, $g \in (\widetilde{P})$ car $v_P(g) = 2$, mais on voit que $g \in T_S$. Ainsi $(\widetilde{P})$ rencontre T_S et ne se relève pas dans R(S).

COROLLAIRE 7.5. Les idéaux maximaux de R(S) sont les idéaux premiers contenant π.

BIBLIOGRAPHIE

(1) BOURBAKI N., Eléments de mathématiques : Topologie générale (Chapitres I et II) Hermann. Paris.

(2) BOURBAKI N., Eléments de mathématiques : Algèbre commutative (Chapitres I à VII) Hermann. Paris.

(3) CAHEN P.J., Polynômes et dérivées à valeurs entières. Annales scientifiques de l'Université de Clermont, 54 (1975) pp. 27-43.

(4) CAHEN P.J., Coefficients et valeurs d'un polynôme.
CHABERT J.L., Bull. Sci. Math. 95 (1971) p. 295-304.

(5) CHABERT J.L., Anneaux de «polynômes à valeurs entières» et anneaux de Fatou. Bull. Sci. Math. France 99 (1971) p. 273-283.

(6) HIROSCHI GUNJI, On rings with a certain divisibility property.
Donald L. Mc QUILLAN, (à paraître).