

ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

DENISE BECCHIO

Logique trivalente de Lukasiewicz

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 66, série *Mathématiques*, n° 16 (1978), p. 33-83

http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1978__66_16_33_0

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2* » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LOGIQUE TRIVALENTE DE LUKASIEWICZ

Denise BECCHIO

Université de Lyon I

Le but de cet article est de présenter une synthèse des travaux qui ont été faits à ma connaissance, sur la logique trivalente de Lukasiewicz.

Pour rendre la lecture plus aisée la plupart des démonstrations sont renvoyées en annexes.

1. Aspect sémantique de la logique trivalente de Lukasiewicz.

L'oeuvre principale de Lukasiewicz dans le domaine de la logique mathématique (49) a été la création des logiques dites « multivalentes ». Il en eut l'idée d'un point de vue philosophique en reprenant la fameuse discussion d'Aristote sur le statut à donner à la proposition « il y aura demain une bataille navale » et en 1917 il donna la première ébauche d'une logique trivalente (21) en rattachant la troisième valeur logique différente du vrai et du faux à la notion de *possibilité*. Ses premières publications sur la logique trivalente (22) (23) datent de 1920. Il y adoptait alors les notations suivantes : 1 pour le *vrai*, 0 pour le *faux* et 2 pour la troisième valeur logique pouvant être interprétée comme le *possible*. Pour simplifier les écritures nous conserverons ces notations bien que Lukasiewicz ait dans des écrits postérieurs (24) remplacé la notation 2 par la notation 1/2.

Lukasiewicz a défini sa logique trivalente du point de vue sémantique à l'aide de la matrice suivante :

→	1	2	0
1	1	2	0
2	1	1	2
0	1	1	1

	N
1	0
2	2
0	1

→ désignant l'implication et N la négation (24).

Cette matrice réduite aux valeurs 0 et 1 est identique à la matrice définissant la logique bivalente classique.

Lukasiewicz tenta ensuite de donner une définition du concept de possibilité en essayant de résoudre certains problèmes de la logique modale et ce fût l'un de ses élèves, Tarski, qui, en 1921, donna du connecteur unaire de possibilité qu'il notait M la définition suivante :

$$D1. \quad Mx = Nx \rightarrow x$$

ce qui conduisait à

$$M0 = 0, \quad M2 = 1 \quad \text{et} \quad M1 = 1.$$

En logique bivalente classique « $Nx \rightarrow x$ » et « x » sont deux expressions équivalentes, ce qui n'est pas le cas dans la logique trivalente de Lukasiewicz.

L'énoncé $(Nx \rightarrow x) \rightarrow x$ valide en logique bivalente classique et qui est un axiome du système de Lukasiewicz en logique bivalente classique n'est pas valide dans la logique trivalente de Lukasiewicz.

Lukasiewicz donna également (24) les définitions des connecteurs de disjonction, de conjonction et d'équivalence de sa logique trivalente

$$D2. \quad x \vee y = (x \rightarrow y) \rightarrow y$$

$$D3. \quad x \wedge y = N(Nx \vee Ny)$$

$$D4. \quad x \leftrightarrow y = (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$$

mais il n'en donna jamais lui-même d'axiomatisation.

Dans la suite pour simplifier nous désignerons par LBC la logique bivalente classique et par LTL la logique trivalente de Lukasiewicz.

2. Aspect syntactique de LTL. Problèmes de complétude et d'indépendance.

Wajsberg fut le premier en 1931 à donner une axiomatisation de LTL (63) à l'aide des quatre axiomes

$$W1. \quad x \rightarrow (y \rightarrow x)$$

$$W2. \quad (x \rightarrow y) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z))$$

$$W3. \quad ((x \rightarrow Nx) \rightarrow x) \rightarrow x$$

$$W4. \quad (Nx \rightarrow Ny) \rightarrow (y \rightarrow x)$$

et de la règle de détachement $WR1. \frac{x, x \rightarrow y}{y}$ (ou règle de modus ponens).

Il démontra (63) la complétude et l'indépendance de ce système W mais ses démonstrations sont fort complexes et très longues.

En 1951, Rose s'intéressa à la table de vérité de la disjonction, proposée par Dienes (12), que l'on peut écrire sous la forme

V	1	2	0
1	1	1	1
2	1	1	2
0	1	2	0

Moyennant cette définition sémantique du V et la définition de la négation donnée par Lukasiewicz (paragraphe 1) il construisit quatre systèmes d'axiomes utilisant la disjonction et la négation comme connecteurs primitifs, la conjonction définie par $x \wedge y = N(Nx \vee Ny)$ et l'implication définie par $x \rightarrow y = Nx \vee y$ comme connecteurs abrégiateurs et comportant respectivement les axiomes suivants :

$$I. 1. \quad (x \wedge x) \vee x \rightarrow x$$

$$2. \quad x \rightarrow y \vee x$$

$$3. \quad x \vee y \rightarrow y \vee x$$

$$4. \quad (x \rightarrow y) \rightarrow (z \vee x \rightarrow z \vee y)$$

$$II. 1. \quad (x \wedge x) \vee x \rightarrow x$$

$$2. \quad x \rightarrow y \vee x$$

$$3. \quad x \rightarrow x$$

$$4. \quad (x \rightarrow y) \rightarrow (z \vee x \rightarrow y \vee z)$$

$$III. 1. \quad x \vee N((x \wedge x) \vee x)$$

$$2. \quad x \rightarrow y \vee x$$

$$3. \quad (y \vee Nx) \rightarrow (z \vee x \rightarrow y \vee z)$$

$$IV. 1. \quad x \vee ((x \wedge x) \vee (x \wedge x)) \rightarrow x$$

$$2. \quad x \vee (x \rightarrow y)$$

$$3. \quad x \vee y \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow x \vee z)$$

et la règle $\frac{x, Nx \vee y}{y}$ comme règle de détachement.

Il donna (54) (55) une déduction formelle du système W à partir de chacun de ses systèmes.

En 1964, Sioson s'intéressa à la table de vérité de la conjonction suivante :

\wedge	1	2	0
1	1	2	0
2	2	0	0
0	0	0	0

Moyennant cette définition sémantique du \wedge et la définition de la négation donnée par Lukasiewicz (paragraphe 1) il construisit trois systèmes d'axiomes utilisant la conjonction et la négation comme connecteurs primitifs, la disjonction définie par $x \vee y = N(Nx \wedge Ny)$ et l'implication définie par $x \rightarrow y = Nx \vee y$ comme connecteurs abrégiateurs et comportant respectivement les axiomes suivants :

- | | |
|--|---|
| <p>I. 1. $N(N((x \vee x) \wedge x) \wedge x)$
 2. $x \wedge y \rightarrow y$
 3. $N(Ny \wedge x) \rightarrow (N(y \wedge z) \rightarrow N(z \wedge x))$</p> | <p>II.1. $x \rightarrow (x \vee x) \wedge x$
 2. $x \wedge y \rightarrow y$
 3. $x \rightarrow x$
 4. $(x \rightarrow y) \rightarrow (N(y \wedge z) \rightarrow N(z \wedge x))$</p> |
| <p>III.1. $x \rightarrow (x \vee x) \wedge x$
 2. $x \wedge y \rightarrow y$
 3. $N(x \wedge y) \rightarrow N(y \wedge x)$
 4. $(x \rightarrow y) \rightarrow (N(y \wedge z) \rightarrow N(z \wedge x))$</p> | |

et la règle $\frac{x, N(x \wedge Ny)}{y}$ comme règle de détachement.

Il donna (59) une déduction formelle du système W à partir de chacun de ses systèmes.

En 1966, Mc Call et Meyer publièrent un système d'axiomes axiomatisant la partie purement implicationnelle de la matrice de Lukasiewicz (paragraphe 1) et donnèrent une démonstration de la complétude et de l'indépendance de ce système (7). Le système de Mc Call et Meyer que nous désignerons par système C comporte les cinq axiomes

- C1. $(x \rightarrow y) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z))$
 C2. $x \rightarrow (y \rightarrow x)$
 C3. $((x \rightarrow y) \rightarrow y) \rightarrow ((y \rightarrow x) \rightarrow x)$
 C4. $((x \rightarrow y) \rightarrow (y \rightarrow x)) \rightarrow (y \rightarrow x)$
 C5. $((x \rightarrow (x \rightarrow y)) \rightarrow x) \rightarrow x$

et la règle de détachement $\frac{x, x \rightarrow y}{y}$.

Le professeur A. Monteiro ayant lui-même démontré la complétude du système C (résultat non publié à ma connaissance) par une méthode différente de celle utilisée par Mc Call et Meyer me suggéra d'utiliser ce système complet pour établir une démonstration de la complétude du système W plus simple que celle donnée par Wajsberg. Pour cela il me demanda de déduire formellement le système C du système W, ce que je fis dans (2).

En 1966 également, Prucnal publia (53) une démonstration de la complétude du système W, plus simple que celle donnée par Wajsberg, en raisonnant par récurrence sur le nombre de variables propositionnelles distinctes figurant dans la tautologie considérée. La démonstration de Prucnal est encore cependant assez complexe et utilise notamment une trentaine de théorèmes dont il ne donne pas les démonstrations formelles.

En 1967, Bryll et Prucnal (60) répondirent au problème posé par Slupecki : «Trouver une axiomatisation de LTL utilisant les connecteurs de l'un des triplets V, N, L ; V, N, M ; \wedge, N, L ; \wedge, N, M (avec $L = NMN$) comme connecteurs primitifs», en publiant une axiomatisation de LTL utilisant les connecteurs V, N, L comme connecteurs primitifs.

Leur système d'axiomes comporte les douze axiomes suivants :

1. $NL(NL(NLx \vee y) \vee z) \vee (NL(NLz \vee x) \vee (NLt \vee x))$
2. $NL(NLx \vee y) \vee (NL(x \vee y) \vee y)$
3. $NLx \vee (x \vee y)$
4. $NLx \vee (y \vee x)$
5. $NLx \vee NNx$
6. $NLNNx \vee x$
7. $NLN(x \vee y) \vee Nx$
8. $NLN(x \vee y) \vee Ny$
9. $NLNx \vee (NLNy \vee N(x \vee y))$
10. $NLLx \vee x$
11. $NLN(x \vee Nx)$
12. $Lx \vee NLx$

et la règle de détachement $\frac{NLx \vee y, x}{y}$.

Ils donnèrent de ce système une démonstration de complétude en raisonnant par récurrence sur le nombre de variables propositionnelles distinctes figurant dans la tautologie considérée mais cette démonstration est beaucoup plus longue et plus complexe que la démonstration de complétude du système W donnée par Prucnal (53).

Nous donnerons d'autres axiomatisations possibles de LTL dans un paragraphe ultérieur après avoir introduit des résultats algébriques permettant de simplifier les démonstrations formelles établissant la complétude de ces nouveaux systèmes.

Récemment (17) Goldberg, Leblanc et Weaver ont donné une démonstration de la complétude du système de Wajsberg beaucoup plus simple que celle donnée par Wajsberg lui-même. Contrairement à la démonstration de Wajsberg, celle-ci ne donne pas un processus effectif pour exhiber une démonstration formelle d'un énoncé valide, mais prouve simplement qu'une telle démonstration existe, dans l'esprit de la preuve classique de Henkin dont elle s'inspire. Par contre, elle développe un concept de déduction à partir d'un ensemble d'hypothèses, et établit la complétude des règles vis-à-vis du concept de conséquence correspondant.

Nous reviendrons sur la complétude de LTL au paragraphe 9 pour en donner une démonstration algébrique à partir des algèbres de Wajsberg.

Avant de terminer ce paragraphe nous allons revenir sur le problème de l'indépendance du système W résolu par Wajsberg (63) afin d'en donner une démonstration plus simple.

La complexité de la démonstration donnée par Wajsberg provient du fait qu'il n'utilise pas de matrice d'indépendance pour établir l'indépendance de l'axiome $W2$.

Nous conserverons les démonstrations très simples données par Wajsberg de l'indépendance des axiomes $W1$ et $W4$ à l'aide des matrices d'indépendance $M1_2$ et $M4_2$ (annexe II).

La matrice d'indépendance $M2_2$ (annexe II) permet de démontrer l'indépendance de $W2$ car dans cette matrice on a

$$(2 \rightarrow u) \rightarrow ((u \rightarrow 0) \rightarrow (2 \rightarrow 0)) = 1 \rightarrow (1 \rightarrow 0) = 0 \neq 1$$

et $W1, W3, W4$ prennent toujours la valeur 1 quelles que soient les valeurs attribuées à x et y .

De même la matrice $M3_2$ (annexe II) démontre l'indépendance de $W3$ (car $((2 \rightarrow N2) \rightarrow 2) \rightarrow 2 = 2 \neq 1$).

Après cette rapide synthèse des différentes axiomatisations de LTL et des problèmes de complétude et d'indépendance s'y rattachant publiés jusqu'à ce jour, à ma connaissance, il paraît normal de s'intéresser au problème de la caractérisation algébrique des matrices correspondant aux thèses de LTL. Pour LBC ce problème correspond à l'étude des algèbres de Boole.

3. Algèbres trivalentes de Lukasiewicz.

Moisil, en 1940, introduisit la notion d'algèbre trivalente de Lukasiewicz (26) en en donnant une axiomatique assez complexe que l'on peut énoncer de la façon suivante :

Un système $(A, 1, 0, \wedge, \vee, N, M)$ formé par un ensemble non vide A , deux éléments 1 et 0 de A , deux opérations binaires \wedge et \vee définies sur A et deux opérations unaires N et M définies sur A , est une algèbre trivalente de Lukasiewicz si

1. (A, \wedge, \vee) est un treillis distributif.
2. l'opération unaire N est telle que :

$$\begin{aligned} NNx &= x \\ N(x \wedge y) &= Nx \vee Ny \\ N(x \vee y) &= Nx \wedge Ny \\ N0 &= 1 \quad \text{et} \quad N1 = 0 \end{aligned}$$

3. l'opération unaire M est telle que :

$$\begin{aligned} M(x \wedge y) &= Mx \wedge My \\ M(x \vee y) &= Mx \vee My \\ x &\leq Mx \\ MMx &= Mx \\ M1 &= 1 \quad \text{et} \quad M0 = 0 \\ \therefore \text{Si } Mx = 0 &\text{ alors } x = 0 \end{aligned}$$

4. on a $NMNx = Mx$

$$\begin{aligned} Nx \vee Mx &= 1 \\ x \wedge Nx &= Mx \wedge Nx \end{aligned}$$

Il s'intéressa alors plus particulièrement aux éléments spéciaux de ces structures algébriques : les éléments chrysippiens, les éléments de type I ou possibles, les éléments de type II ou contingents et le centre d'une algèbre trivalente de Lukasiewicz.

Un élément x est appelé *chrysippien* lorsqu'il admet un complémentaire x' , c'est-à-dire s'il existe x' tel que $x \wedge x' = 0$ et $x \vee x' = 1$.

Un élément x est dit *de type I ou possible* si $Mx = 1$.

Un élément x est dit *de type II ou contingent* si $MNx = 1$.

Un élément x est appelé *centre* s'il est tel que $Nx = x$.

Moisil donna les démonstrations de nombreuses propriétés de ces éléments particuliers, (26), (27).

Nous ne mentionnerons pas tous les résultats qu'il a obtenus. Signalons simplement que l'ensemble des éléments chrysippiens d'une algèbre trivalente de Lukasiewicz a une structure d'algèbre de Boole, qu'un centre est un élément qui est à la fois de type I et de type II, qu'une algèbre de Lukasiewicz ne peut pas avoir deux centres différents et que toute algèbre lukasiewiczienne peut être prolongée en une algèbre lukasiewiczienne ayant un centre.

Moisil s'intéressa principalement à la représentation des algèbres lukasiewicziennes trivalentes par des familles de couples d'ensembles (27). Il introduisit aussi la notion d'anneau de caractéristique 3 (28) et démontra qu'une algèbre lukasiewiczienne trivalente centrée est un anneau de caractéristique 3,

c'est-à-dire un anneau unitaire tel que pour tout x on ait $3x = 0$ et $x^3 = x$. Il démontra également le résultat suivant : Toute algèbre lukasiewiczienne axée, c'est-à-dire toute algèbre lukasiewiczienne possédant un élément de type I est identique à un anneau de caractéristique 6, c'est-à-dire à un anneau unitaire tel que pour tout x on ait $6x = 0$ et $x^3 = x$.

Enfin, on ne saurait faire une synthèse, même rapide, des travaux de Moisil des années 1940-1941 sans mentionner une propriété très importante dans la théorie des algèbres de Lukasiewicz trivalentes «le principe de détermination de Moisil», que l'on peut énoncer de la façon suivante : Si $Mx = My$ et $NMx = NMN_y$ alors $x = y$. La démonstration de cette propriété donnée par Moisil est assez longue. L. Monteiro, en 1969, en donna une démonstration très simple et très rapide (42).

De nombreuses axiomatiques des algèbres trivalentes de Lukasiewicz ont été publiées depuis les premières publications de Moisil sur ce sujet. On peut les trouver dans (34), (47), (8), (9), (58) et (51).

Nous ne donnerons pas en détails toutes ces axiomatisations. Signalons simplement que celle donnée par Petcu (51), qui paraît être la plus simple à première vue puisqu'elle ne comporte que trois axiomes, ne semble pas très utilisable à cause de la complexité de ces axiomes et que seule celle donnée par A. Monteiro (47)(9) retiendra notre attention dans cet exposé.

On peut définir (47)(39)(8) une algèbre trivalente de Lukasiewicz comme étant un système $(A, 1, \wedge, \vee, N, M)$ tel que

1. $(A, 1, \wedge, \vee, N)$ est un treillis de Kleene (47)

2. l'opérateur unaire M vérifie les trois axiomes

$$M1. \quad Nx \vee Mx = 1$$

$$M2. \quad x \wedge Nx = Nx \wedge Mx$$

M3. $M(x \wedge y) \leq Mx \wedge My$ (la relation \leq étant la relation d'ordre habituelle définie sur le treillis (A, \vee, \wedge)).

Nous avons démontré (3) la dépendance de l'axiome M3 et de ce fait la possibilité de définir une algèbre trivalente de Lukasiewicz comme étant un treillis de Kleene muni d'un opérateur unaire M vérifiant les axiomes M1 et M2.

On peut donc donner la définition suivante d'une algèbre trivalente de Lukasiewicz :

DEFINITION 1 :

Un système $(A, 1, \wedge, \vee, N, M)$ formé par un ensemble non vide A , un élément 1 de A , deux opérations binaires \wedge et \vee définies sur A et deux opérations unaires N et M définies sur A , est une algèbre trivalente de Lukasiewicz si les axiomes suivants sont vérifiés :

$$L1. \quad x \wedge (x \vee y) = x$$

$$L2. \quad x \wedge (y \vee z) = (z \wedge x) \vee (y \wedge x)$$

$$L3. \quad x = NNx$$

$$L4. \quad N(x \wedge y) = Nx \vee Ny$$

$$L5. \quad (x \wedge Nx) \wedge (y \vee Ny) = x \wedge Nx$$

$$L6. \quad Nx \vee Mx = 1$$

$$L7. \quad x \wedge Nx = Nx \wedge Mx.$$

A. Monteiro ayant démontré (47) l'équivalence de sa définition d'une algèbre de Lukasiewicz et de celle donnée par Moisil, *une algèbre de Lukasiewicz au sens de la DEFINITION 1 est bien une algèbre de Lukasiewicz au sens de Moisil.*

Dans la suite pour simplifier nous désignerons par AL les algèbres trivalentes de Lukasiewicz ainsi définies.

Avant d'ajouter quelques propriétés des AL à celles figurant déjà dans la littérature nous allons

démontrer l'équivalence des AL avec les algèbres de Wajsberg afin de pouvoir utiliser cette équivalence pour simplifier les démonstrations et obtenir de nouveaux résultats aussi bien en ce qui concerne la logique trivalente proprement dite que les algèbres trivalentes de Lukasiewicz.

4. Equivalence des algèbres de Lukasiewicz définies par Moisil et des algèbres de Wajsberg définies par A. Monteiro.

Le concept d'algèbre de Wajsberg a été introduit par A. Monteiro en 1967 dans son article sur la Construction des algèbres de Lukasiewicz trivalentes dans les algèbres de Boole monadiques (48).

A. Monteiro a défini *une algèbre de Wajsberg* comme étant un système $(A, 1, N, \rightarrow)$ formé par un ensemble non vide A , un élément 1 de A , une opération unaire N définie sur A et une opération binaire \rightarrow définie sur A vérifiant les axiomes

- (AW1) $x \rightarrow (y \rightarrow x) = 1$
- (AW2) $(x \rightarrow y) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z)) = 1$
- (AW3) $((x \rightarrow Nx) \rightarrow x) \rightarrow x = 1$
- (AW4) $(Nx \rightarrow Ny) \rightarrow (y \rightarrow x) = 1$
- (AW5) Si $1 \rightarrow x = 1$ alors $x = 1$
- (AW6) Si $x \rightarrow y = 1$ et $y \rightarrow x = 1$ alors $x = y$.

Une algèbre de Wajsberg est donc une algèbre $(A, 1, N, \rightarrow)$ vérifiant les axiomes (AW1)–(AW6).

Nous avons résolu les différents problèmes posés par A. Monteiro (48) et notamment démontré (annexe 0) les deux théorèmes suivants dont il suggéra simplement l'énoncé.

THEOREME 1 :

Si $M = (A, 1, N, \rightarrow)$ est une algèbre vérifiant les axiomes (AW1) - (AW5) et si R est la relation binaire définie sur A par $x R y$ ($x \rightarrow y = 1$ et $y \rightarrow x = 1$), alors R est une relation d'équivalence compatible avec les opérations N et \rightarrow et l'ensemble quotient $(A/R, \{1\}, N, \rightarrow)$ est une algèbre de Wajsberg.

THEOREME 2 :

Si dans une algèbre de Wajsberg $(A, 1, N, \rightarrow)$ nous introduisons trois nouvelles opérations : deux binaires \vee et \wedge et une unaire M , définies par

$$\text{AWD1. } x \vee y = (x \rightarrow y) \rightarrow y$$

$$\text{AWD2. } x \wedge y = N(Nx \vee Ny)$$

$$\text{AWD3. } Mx = Nx \rightarrow (Nx \rightarrow N1)$$

alors le système $(A, 1, \wedge, \vee, N, M)$ est une algèbre de Lukasiewicz au sens de Moisil et

$$x \rightarrow y = (MNx \vee y) \wedge (My \vee Nx).$$

A. Monteiro signala (48) que la réciproque de ce théorème peut être démontrée sans difficulté à condition d'utiliser le principe de détermination de Moisil pour établir AWD1.

Nous pouvons donc conclure à l'équivalence des algèbres de Wajsberg définies par A. Monteiro et des algèbres de Lukasiewicz définies par Moisil, moyennant des définitions convenables des opérations propres à chacune de ces algèbres.

De nombreux auteurs affirment que les algèbres trivalentes de Lukasiewicz jouent pour LTL un rôle analogue à celui des algèbres de Boole pour LBC mais, à ma connaissance, sans aucune référence de démonstration permettant d'établir formellement ce résultat. L'équivalence des algèbres de Wajsberg et des algèbres de Lukasiewicz va nous permettre d'établir de façon formelle qu'à partir du système W axiomatisant LTL, par passage au quotient, on obtient une algèbre de Lukasiewicz tout comme il a été démontré formellement qu'à partir de LBC, par passage au quotient, on obtient une

algèbre de Boole:

5. Algèbre de Wajsberg associée à LTL.

Il est très simple de démontrer que l'algèbre de Wajsberg définie par A. Monteiro peut être obtenue par passage au quotient à partir du système W.

Pour cela, considérons la relation binaire R_W définie par

$(x R_W y) \Leftrightarrow ((x \rightarrow y) \in T_W \text{ et } (y \rightarrow x) \in T_W)$, T_W désignant l'ensemble des énoncés démontrables à partir du système W.

Par définition même R_W est symétrique.

D'autre part, à partir du système W on peut déduire un certain nombre de théorèmes et de règles (2) et d'après l'une de ces règles WR4 (2) R_W est transitive.

De plus on a $(x \rightarrow x) \in T_W$ d'après WT14, WT13 et WR4 (2) donc R_W est réflexive.

En utilisant encore les résultats établis dans (2), si $x R_W x'$ et $y R_W y'$ alors on a

- | | |
|---|-------------|
| 1. $(x \rightarrow y) \rightarrow (x' \rightarrow y')$ | WR10 : hyp. |
| 2. $(x \rightarrow y') \rightarrow (x' \rightarrow y')$ | WR3 : hyp. |
| 3. $(x \rightarrow y) \rightarrow (x' \rightarrow y')$ | WR4 : 1,2. |
| 4. $(x' \rightarrow y') \rightarrow (x' \rightarrow y)$ | WR10 : hyp. |
| 5. $(x' \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow y)$ | WR3 : hyp. |
| 6. $(x' \rightarrow y') \rightarrow (x \rightarrow y)$ | WR4 : 4,5. |

soit finalement $(x \rightarrow y) R_W (x' \rightarrow y')$ et par suite R_W est compatible avec \rightarrow .

D'après WMT3 (2) si $x R_W y$ alors $Nx R_W Ny$ et par suite R_W est compatible avec N.

Désignons par ϕ l'application canonique de l'ensemble des énoncés E dans E/R_W .

Posons $\phi(x \rightarrow y) = \phi(x) \rightarrow \phi(y)$
 $\phi(Nx) = N\phi(x)$
 $\phi(x) = 1$ si et seulement si $x \in T_W$

Les axiomes W1 - W4 et la règle WR1 donnent alors par passage au quotient les axiomes AW1 - AW5.

D'autre part, $(\phi(x) \rightarrow \phi(y) = 1 \text{ et } \phi(y) \rightarrow \phi(x) = 1)$ implique $((x \rightarrow y) \in T_W \text{ et } (y \rightarrow x) \in T_W)$ c'est-à-dire $x R_W y$, d'où $\phi(x) = \phi(y)$ et l'axiome AW6 est vérifié.

Les algèbres de Wajsberg étant équivalentes aux algèbres de Lukasiewicz on peut donc affirmer qu'à partir du système de Wajsberg axiomatisant la logique trivalente de Lukasiewicz, par passage au quotient, on obtient une algèbre de Lukasiewicz.

On pourrait d'ailleurs établir directement ce résultat sans passer par l'intermédiaire d'une algèbre de Wajsberg. Pour cela il suffirait d'introduire les trois connecteurs \vee , \wedge et M à l'aide des définitions D2, D3 et D1 (paragraphe 1) et d'utiliser les théorèmes déjà établis (2) pour démontrer les théorèmes WT_n correspondants respectivement à AWT37, AWT43, AWT45, AWT16, AWT55, AWT49, AWT51, et AWT53. Les démonstrations de ces théorèmes seraient très voisines de celles faites dans l'algèbre de Wajsberg $(A, 1, \wedge, \vee, N, M)$ et par suite nous ne les expliciterons pas ici,

Avant de revenir à la logique trivalente de Lukasiewicz proprement dite nous allons finir de résoudre les problèmes laissés ouverts par A. Monteiro (45) en donnant deux nouvelles définitions des algèbres de Wajsberg n'utilisant que des égalités.

6. Autres systèmes d'axiomes définissant une algèbre de Wajsberg et indépendance de ces systèmes.

A. Monteiro après avoir remarqué que les axiomes (AW5) et (AW6) de sa définition des algèbres de Wajsberg ne sont pas des égalités signala qu'il serait important de trouver une définition des algèbres de Wajsberg dans laquelle tous les axiomes soient des égalités. Or nous avons vu (paragraphe 3. Définition 1) qu'une algèbre de Lukasiewicz peut être définie à l'aide d'axiomes qui sont tous des égalités. Les algèbres de Wajsberg et les algèbres de Lukasiewicz étant équivalentes nous pouvons donc affirmer qu'une algèbre de Wajsberg peut effectivement se définir uniquement à partir d'égalités.

On peut d'ailleurs établir directement ce résultat sans passer par l'intermédiaire des algèbres de Lukasiewicz. En effet, on vérifie facilement, directement qu'une algèbre de Wajsberg est stable par sous-algèbre, par produits et par quotient donc est équationnelle. La stabilité par sous-algèbre est immédiate. Pour la stabilité par produits il suffit de vérifier les axiomes AW5 et AW6 composante par composante. Pour la stabilité par quotient, R' étant une relation d'équivalence quelconque compatible avec les opérations \rightarrow et N , il suffit de vérifier AW6 (AW5 étant alors à fortiori vérifié) c'est-à-dire que $((x \rightarrow y) R' 1 \text{ et } (y \rightarrow x) R' 1) \Rightarrow (x R' y)$. R' étant réflexive on a $x R' x$ et $y R' y$. R' étant compatible avec \rightarrow on a alors $((x \rightarrow y) \rightarrow y) R' (1 \rightarrow y)$ et $((y \rightarrow x) \rightarrow x) R' (1 \rightarrow x)$. Or d'après AWT28 et AWD1, $(x \rightarrow y) \rightarrow y = (y \rightarrow x) \rightarrow x$ et d'après AWT47, $1 \rightarrow y = y$ et $1 \rightarrow x = x$ donc on a $x R' y$.

Ayant prouvé l'existence d'un système d'axiomes définissant une algèbre de Wajsberg ne comportant que des égalités il s'agit maintenant d'explicitier un tel système et c'est ce que nous allons faire en remplaçant les axiomes (AW5) et (AW6) par des égalités.

DEFINITION 2 :

Une algèbre de Wajsberg est une algèbre $(A, 1, N, \rightarrow)$ vérifiant les axiomes suivants :

- A1. $x \rightarrow (y \rightarrow x) = 1$
- A2. $(x \rightarrow y) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z)) = 1$
- A3. $((x \rightarrow Nx) \rightarrow x) \rightarrow x = 1$
- A4. $(Nx \rightarrow Ny) \rightarrow (y \rightarrow x) = 1$
- A5. $1 \rightarrow x = x$
- A6. $(x \rightarrow y) \rightarrow y = (y \rightarrow x) \rightarrow x$

Cette définition est équivalente à celle donnée par A. Monteiro (annexe 0).

DEFINITION 3 :

Une algèbre de Wajsberg est une algèbre $(A, 1, N, \rightarrow)$ vérifiant les axiomes suivants :

- B1. $x \rightarrow (y \rightarrow x) = 1$
- B2. $x \rightarrow (y \rightarrow z) = y \rightarrow (x \rightarrow z)$
- B3. $((x \rightarrow Nx) \rightarrow x) \rightarrow x = 1$
- B4. $(Nx \rightarrow Ny) \rightarrow (y \rightarrow x) = 1$
- B5. $1 \rightarrow x = x$
- B6. $(x \rightarrow y) \rightarrow y = (y \rightarrow x) \rightarrow x$

Les définitions 2 et 3 sont équivalentes (annexe 0).

Nous obtenons ainsi deux nouvelles définitions des algèbres de Wajsberg équivalentes à celles données par A. Monteiro.

Comme nous l'avons énoncé au paragraphe 4, les algèbres de Wajsberg sont équivalentes aux algèbres de Lukasiewicz. Or nous avons établi (3) l'indépendance des axiomes L1 - L7 figurant dans la définition 1 et par suite il paraît logique de s'intéresser à l'indépendance des axiomes définissant les algèbres de Wajsberg.

En étudiant les axiomes figurant dans les définitions 2 et 3 on s'aperçoit très vite que ces axiomes sont étroitement liés et qu'en particulier les axiomes A6 et B6 rendent très ardues les démonstrations d'indépendance. Seule la démonstration de l'indépendance des axiomes A4 et B4 est facile à établir et le problème de l'indépendance des axiomes utilisés dans les définitions 2 et 3 reste ouvert.

Par contre, il est facile de démontrer que l'axiome (AW5) n'est pas indépendant (annexe 0) et d'établir ensuite l'indépendance des axiomes autres que (AW5). On peut donc énoncer le théorème suivant :

THEOREME 3 :

(AW1) - (AW4) et (AW6) forment un système d'axiomes indépendants caractérisant une algèbre de Wajsberg.

Dans la suite, pour simplifier, nous désignerons par AW les algèbres de Wajsberg ainsi définies.

De nombreux auteurs, notamment A. Monteiro (47), insistent sur le fait que les AL jouent pour LTL un rôle analogue à celui des algèbres de Boole pour LBC mais, à ma connaissance, aucun de ces auteurs n'utilise le fait que l'algèbre trivalente de Lukasiewicz peut être obtenue par passage au quotient à partir du système W pour établir «algébriquement» des théorèmes de LTL et c'est ce que nous allons faire dans le paragraphe suivant.

7. Démonstration «algébrique» de certains théorèmes de LTL.

Nous avons démontré au paragraphe 5 que par passage au quotient à partir du système W on obtient une algèbre de Wajsberg. Donc pour établir formellement un théorème de LTL il suffit d'établir le théorème correspondant dans AW.

Nous pouvons tout d'abord remarquer que les théorèmes AWT4, AWT6 et AWT8 par exemple donnent une démonstration algébrique simple des théorèmes WT9, WT13 et WT14 établis syntactiquement dans (2).

D'autre part, tous les théorèmes de AW déjà établis (annexe I) nous donnent les théorèmes de LTL correspondants qui sont parfois difficiles à démontrer directement dans LTL.

Nous allons ainsi établir deux théorèmes de LTL qui semblent présenter un certain intérêt puisqu'ils sont étroitement liés au schéma d'axiome du système de Beth axiomatisant LBC : $(x \rightarrow (x \rightarrow y)) \rightarrow (x \rightarrow y)$, axiome qui n'est pas un énoncé démontrable dans LTL.

Dans AW on a les théorèmes suivants (annexe I) :

AWT63. 1 (resp. N1) est le plus grand (resp. le plus petit) élément de AW.

Nous poserons $N1 = 0$.

AWT64. $x \vee y = \text{Sup}(x,y)$ et AWT65. $x \wedge y = \text{Inf}(x,y)$.

La relation \equiv définie dans AW est donc une relation d'ordre identique à la relation d'ordre habituelle définie sur un treillis (A, \wedge, \vee) .

AW étant une algèbre de Lukasiewicz est en particulier un treillis pour les lois \wedge et \vee et possède par conséquent toutes les propriétés d'une telle structure (associativité des lois \wedge et \vee , distributivité d'une loi par rapport à l'autre ...) propriétés que nous supposerons établies sans en donner de démonstration.

Il est alors facile de déduire de AW (annexe I) les deux théorèmes

AWT67. $(Mx \rightarrow (x \rightarrow y)) \rightarrow (x \rightarrow y) = 1$

AWT69. $M((x \rightarrow (x \rightarrow y)) \rightarrow (x \rightarrow y)) = 1$

et par suite $(Mx \rightarrow (x \rightarrow y)) \rightarrow (x \rightarrow y)$ et $M((x \rightarrow (x \rightarrow y)) \rightarrow (x \rightarrow y))$ sont deux énoncés démontrables de LTL.

L'énoncé $M((x \rightarrow (x \rightarrow y)) \rightarrow (x \rightarrow y))$ attire l'attention sur le rôle joué par le connecteur M dans LTL. En effet $(x \rightarrow (x \rightarrow y)) \rightarrow (x \rightarrow y)$ démontrable dans LBC n'est pas démontrable dans LTL mais $M((x \rightarrow (x \rightarrow y)) \rightarrow (x \rightarrow y))$ par contre est démontrable dans LTL. Nous allons donc

essayer de préciser un peu du point de vue syntactique le rôle du connecteur M en posant la définition suivante :

DEFINITION 4 :

Un énoncé x de LTL est M-démontrable si Mx est démontrable dans LTL.

D'après AWT50 et AWT63 tout énoncé démontrable dans LTL est M-démontrable dans LTL. Les énoncés M-démontrables de LTL correspondent aux éléments de type I définis par Moisil dans les algèbres de Lukasiewicz (paragraphe 3).

Du point de vue syntactique, on peut dire que l'ensemble E des énoncés de LTL est la réunion de trois ensembles disjoints : l'ensemble des énoncés démontrables qui ne sont pas de la forme Mx , l'ensemble des énoncés démontrables de la forme Mx (correspondants aux éléments de type I ou de type II) et enfin l'ensemble des énoncés non démontrables.

Supposons que LBC soit axiomatisée à l'aide du système de Lukasiewicz comportant les trois schémas d'axiomes :

$$S1. (x \rightarrow y) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z))$$

$$S2. x \rightarrow (Nx \rightarrow y)$$

$$S3. (Nx \rightarrow x) \rightarrow x$$

et la règle de modus ponens comme règle de détachement. Soit x un énoncé M-démontrable dans LTL. Par définition Mx est démontrable dans LTL et par suite si nous supposons LTL axiomatisée par le système W, d'après D1, $Nx \rightarrow x$ est démontrable dans LTL. Or tout énoncé démontrable dans LTL est démontrable dans LBC donc $Nx \rightarrow x$ est démontrable dans LBC. D'après S3, on a alors x démontrable dans LBC et l'on peut énoncer le théorème suivant :

THEOREME 4 :

Tout énoncé M-démontrable dans LTL est démontrable dans LBC.

La réciproque de ce théorème est fautive comme me l'a fait remarquer J.F. Pabion à l'aide du contre-exemple suivant :

L'énoncé $(x \vee Nx \rightarrow N(x \vee Nx)) \rightarrow N(x \rightarrow x)$ est démontrable dans LBC (car valide dans LBC) mais n'est pas M-démontrable dans LTL car pour $x = 2$ on a

$$M((x \vee Nx \rightarrow N(x \vee Nx)) \rightarrow N(x \rightarrow x)) = 0 \neq 1.$$

Avant de terminer ce paragraphe, nous allons établir l'identité définissant l'implication lukasiewiczienne simplement indiquée par Slupecki (60) :

$$x \rightarrow y = (Nx \vee y) \vee (MNx \wedge My).$$

Dans AW on a le théorème suivant (annexe I)

$$AWT70. (MNx \vee y) \wedge (My \vee Nx) = (Nx \vee y) \vee (MNx \wedge My)$$

et par suite, d'après AWT62, on a l'égalité cherchée.

Les deux identités que nous avons établies définissant l'implication lukasiewiczienne à partir des quatre connecteurs de négation, de possibilité, de disjonction et de conjonction doivent permettre de construire un système équivalent au système de Wajsberg n'utilisant pas l'implication lukasiewiczienne comme connecteur primitif et de répondre, en partie tout au moins, au problème posé à ce sujet par Slupecki (60). Nous allons voir qu'il en est bien ainsi dans le paragraphe suivant.

8. Autres axiomatisations de LTL.

Les différentes axiomatisations de LTL qui, à ma connaissance, ont déjà été publiées figurent déjà dans le paragraphe 2 et nous nous contenterons ici de mentionner quelques résultats personnels à ce sujet.

Nous allons tout d'abord donner différents systèmes axiomatisant LTL utilisant trois, quatre ou cinq connecteurs primitifs (c'est-à-dire en introduisant les connecteurs de possibilité, de disjonction et

de conjonction comme connecteurs primitifs) dont nous avons établi la complétude (en en déduisant formellement le système W) et pour certains l'indépendance (annexe 0).

Système α :

Il utilise les trois connecteurs primitifs \rightarrow , N et M. Il comporte les six axiomes

- $\alpha 1.$ $x \rightarrow (y \rightarrow x)$
- $\alpha 2.$ $(x \rightarrow y) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z))$
- $\alpha 3.$ $((x \rightarrow Nx) \rightarrow x) \rightarrow x$
- $\alpha 4.$ $(Nx \rightarrow Ny) \rightarrow (y \rightarrow x)$
- $\alpha 5.$ $Mx \rightarrow (Nx \rightarrow x)$
- $\alpha 6.$ $(Nx \rightarrow x) \rightarrow Mx$

et la règle de modus ponens comme seule règle de détachement.

Système β :

Il utilise les quatre connecteurs primitifs \rightarrow , N, M et \vee . Il comporte les neuf axiomes

- $\beta 1 - \beta 6$ identiques à $\alpha 1 - \alpha 6$
- $\beta 7.$ $x \rightarrow x \vee y$
- $\beta 8.$ $y \rightarrow x \vee y$
- $\beta 9.$ $(x \rightarrow z) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow (x \vee y \rightarrow z))$

et la règle de modus ponens comme seule règle de détachement.

Système γ :

Il utilise aussi les quatre connecteurs primitifs \rightarrow , N, M et \vee . Il comporte les huit axiomes

- $\gamma 1 - \gamma 6$ identiques à $\beta 1 - \beta 6$
- $\gamma 7.$ $((x \rightarrow y) \rightarrow y) \rightarrow x \vee y$
- $\gamma 8.$ $(x \rightarrow z) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow (x \vee y \rightarrow z))$

et la règle de modus ponens comme seule règle de détachement.

Système δ :

Il utilise les quatre connecteurs primitifs \rightarrow , N, M et \wedge . Il comporte les neuf axiomes

- $\delta 1 - \delta 6$ identiques à $\alpha 1 - \alpha 6$
- $\delta 7.$ $x \wedge y \rightarrow x$
- $\delta 8.$ $x \wedge y \rightarrow y$
- $\delta 9.$ $(x \rightarrow y) \rightarrow ((x \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow y \wedge z))$

et la règle de modus ponens comme seule règle de détachement.

Système ϵ :

Il utilise aussi les quatre connecteurs primitifs \rightarrow , N, M et \wedge . Il comporte les huit axiomes

- $\epsilon 1 - \epsilon 6$ identiques à $\delta 1 - \delta 6$
- $\epsilon 7.$ $x \wedge y \rightarrow N((Nx \rightarrow Ny) \rightarrow Ny)$
- $\epsilon 8.$ $(x \rightarrow y) \rightarrow ((x \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow y \wedge z))$

et la règle de modus ponens comme seule règle de détachement.

Système ζ :

Il utilise les cinq connecteurs primitifs \rightarrow , N, M, \vee et \wedge . Il comporte les douze axiomes

- $\zeta 1 - \zeta 9$ identiques à $\beta 1 - \beta 9$
- $\zeta 10.$ $x \wedge y \rightarrow y$
- $\zeta 11.$ $x \wedge y \rightarrow y$

$$\zeta 12. (x \rightarrow y) \rightarrow ((x \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow y \wedge z))$$

et la règle de modus ponens comme seule règle de détachement.

Systeme η :

Il utilise aussi les cinq connecteurs primitifs \rightarrow , N , M , \vee et \wedge . Il comporte les onze axiomes

$$\eta 1 - \eta 8 \text{ identiques à } \gamma 1 - \gamma 8$$

$$\eta 9. x \wedge y \rightarrow x$$

$$\eta 10. x \wedge y \rightarrow y$$

$$\eta 11. (x \rightarrow y) \rightarrow ((x \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow y \wedge z))$$

et la règle de modus ponens comme seule règle de détachement.

Systeme θ :

Il utilise aussi les cinq connecteurs primitifs \rightarrow , N , M , \vee et \wedge . Il comporte les dix axiomes

$$\theta 1 - \theta 6 \text{ identiques à } \beta 1 - \beta 6$$

$$\theta 7. x \rightarrow x \vee y$$

$$\theta 8. y \rightarrow x \vee y$$

$$\theta 9. x \wedge y \rightarrow N(Nx \vee Ny)$$

$$\theta 10. (x \rightarrow y) \rightarrow ((x \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow y \wedge z))$$

et la règle de modus ponens comme seule règle de détachement.

Systeme ι :

Il utilise aussi les cinq connecteurs primitifs \rightarrow , N , M , \vee et \wedge . Il comporte les neuf axiomes

$$\iota 1 - \iota 6 \text{ identiques à } \theta 1 - \theta 6$$

$$\iota 7. ((x \rightarrow y) \rightarrow y) \rightarrow x \vee y$$

$$\iota 8. x \wedge y \rightarrow N(Nx \vee Ny)$$

$$\iota 9. (x \rightarrow y) \rightarrow ((x \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow y \wedge z))$$

et la règle de modus ponens comme seule règle de détachement.

Le problème de l'indépendance des axiomes $\gamma 2$, $\epsilon 2$, $\eta 2$ et $\iota 2$ reste ouvert.

Nous allons maintenant donner deux systèmes n'utilisant pas l'implication lukasiewiczienne comme connecteur primitif dont nous avons établi la complétude en en déduisant formellement le système W (annexe 0).

Systeme χ :

Il utilise quatre connecteurs primitifs N , M , \vee et \wedge et un connecteur abrégiateur \rightarrow défini par D5. $x \rightarrow y = (MNx \vee y) \wedge (My \vee Nx)$. Il comporte les dix axiomes

$$\chi 1. x \rightarrow Mx$$

$$\chi 2. NNx \rightarrow x$$

$$\chi 3. ((x \rightarrow Nx) \rightarrow x) \rightarrow x$$

$$\chi 4. (x \rightarrow y) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z))$$

$$\chi 5. x \rightarrow x \vee y$$

$$\chi 6. y \rightarrow x \vee y$$

$$\chi 7. (x \rightarrow z) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow (x \vee y \rightarrow z))$$

$$\chi 8. x \wedge y \rightarrow x$$

$$\chi 9. x \wedge y \rightarrow y$$

$$\chi 10. (x \rightarrow y) \rightarrow ((x \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow y \wedge z))$$

et les deux règles de détachement

$$\chi R1. \frac{x, x \rightarrow y}{y}$$

$$\chi R2. \frac{x \rightarrow y}{Mx \rightarrow My}$$

Système λ :

Il utilise trois connecteurs primitifs N , M et \vee et un connecteur abrégiateur \rightarrow défini par D6. $x \rightarrow y = (Nx \vee y) \vee N(NMx \vee NMy)$. Il comporte les sept axiomes

$$\lambda 1. x \rightarrow Mx$$

$$\lambda 2. NNx \rightarrow x$$

$$\lambda 3. ((x \rightarrow Nx) \rightarrow x) \rightarrow x$$

$$\lambda 4. (x \rightarrow y) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z))$$

$$\lambda 5. x \rightarrow x \vee y$$

$$\lambda 6. y \rightarrow x \vee y$$

$$\lambda 7. (x \rightarrow z) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow (x \vee y \rightarrow z))$$

et les trois règles de détachement

$$\lambda R1. \frac{x, x \rightarrow y}{y}$$

$$\lambda R2. \frac{x \rightarrow y}{Ny \rightarrow Nx}$$

$$\lambda R3. \frac{x \rightarrow y}{Mx \rightarrow My}$$

Il serait peut-être intéressant de trouver un système n'utilisant que trois connecteurs primitifs N , M et \vee et dont les axiomes et les règles aient une écriture très proche de celle des axiomes des algèbres de Lukasiewicz comme c'est le cas pour le système W et les algèbres de Wajsberg.

Nous allons revenir aux algèbres de Lukasiewicz proprement dites afin d'en donner quelques propriétés pouvant s'ajouter aux nombreuses propriétés déjà publiées, dont nous donnons les références dans la bibliographie, mais que nous ne donnerons pas toutes dans cet exposé.

9. Propriétés des AL et des AW.

Dans ce paragraphe nous allons tout d'abord donner un aperçu des résultats publiés sur les AL puis nous énoncerons quelques propriétés des AW, qui sont donc aussi des propriétés des AL, et qui ne figurent pas dans les différents articles consacrés aux algèbres de Wajsberg et aux algèbres de Lukasiewicz (48), (26) - (30), (34), (47), (39) - (46), (9) - (11), (56), (57), (61), (62) et (5).

Nous avons déjà résumé la plus grande partie des travaux de Moisil sur les AL au paragraphe 3. Ajoutons simplement que dans (34) il définit ce qu'il appelle un M -idéal et un NMN -idéal, faisant ainsi jouer un rôle particulier aux deux opérations unaires M et NMN et il établit un certain nombre de propriétés de ces ensembles.

En 1941, Moisil (27) a généralisé la notion d'algèbre de Lukasiewicz trivalente en définissant les algèbres de Lukasiewicz n -valentes. Boicescu (5) montra comment on peut construire une AL en partant d'une algèbre n -valente.

Cignoli (8) (9) établit des propriétés caractéristiques de l'ensemble des éléments x d'une AL invariants par M (i.e. tels que $Mx = x$) et de l'ensemble des éléments booléens (i.e. des éléments chrysippiens suivant les définitions de Moisil) d'une AL. Il s'intéressa (10) à l'opérateur de possibilité M en tant qu'opérateur de cloture et en donna quelques propriétés.

Varlet (61) caractérisa les AL parmi les treillis doublement pseudo-complémentés et nous reviendrons sur cette notion dans la suite de cet exposé. Dans cet article Varlet laissait plusieurs problèmes ouverts : celui de savoir si une AL est doublement un treillis relatif de Stone dont il donna lui-même une solution dans (62), celui portant sur la pseudo-complémentation duale résolu par Cignoli dans (11) et enfin celui concernant l'indépendance d'un certain ensemble d'axiomes lui permettant de définir une AL, problème que nous avons résolu de la façon suivante.

Dans (61) Varlet démontra le corollaire suivant :

«Un lattis distributif borné sur lequel on définit deux opérations unaires $*$ et $+$ satisfaisant aux axiomes suivants :

$$x \wedge x^* = 0, (x \wedge y)^* = x^* \vee y^*, 0^* = 1, x \vee x^+ = 1, (x \vee y)^+ = x^+ \wedge y^+, 1^+ = 0, \\ x^* = y^* \text{ et } x^+ = y^+ \Rightarrow x = y,$$

est une algèbre trivalente de Lukasiewicz».

En étudiant l'indépendance des axiomes de ce corollaire nous avons démontré (annexe 0) qu'il peut être énoncé sous la forme plus simple suivante à l'aide de neuf axiomes indépendants :

*Un système $(A, 0, 1, \wedge, \vee, *, +)$ formé par un ensemble non vide A , deux éléments distincts 0 et 1 de A , deux opérations binaires \wedge et \vee définies sur A et deux opérations unaires $*$ et $+$ définies sur A est une algèbre trivalente de Lukasiewicz si les axiomes suivants sont vérifiés :*

V1. $x \wedge (x \vee y) = x$

V2. $x \wedge (y \vee z) = (z \wedge x) \vee (y \wedge x)$

V3. $x \wedge x^* = 0$

V4. $(x \wedge y)^* = x^* \vee y^*$

V5. $0^* = 1$

V6. $x \vee x^+ = 1$

V7. $(x \vee y)^+ = x^+ \wedge y^+$

V8. $1^+ = 0$

V9. Si $x^* = y^*$ et $x^+ = y^+$ alors $x = y$

D'après Varlet (61), les axiomes V1 - V8 caractérisent une algèbre doublement de Stone, de plus il a démontré (62) l'équivalence du principe de détermination de Moisil (axiome V9) et de la condition $x \wedge x^+ \leq y \vee y^*$ dans une algèbre doublement de Stone. Nous pouvons donc rendre la définition que nous venons de donner équationnelle en remplaçant l'axiome V9 par l'axiome V'9.

$(x \wedge x^+) \wedge (y \vee y^*) = x \wedge x^+$. Les axiomes V1 - V8, V'9 sont indépendants (annexe 0).

L. Monteiro et Coppola (40) répondirent au problème qui leur a été posé par A. Monteiro, problème qui consiste à démontrer sans utiliser la théorie des N-lattices au sens de Helena Rasiowa (1958) que par une certaine construction donnée par A. Monteiro à partir de chaque algèbre de Boole monadique A on obtient bien une algèbre de Lukasiewicz $\mathcal{L}(A)$.

L. Monteiro (41) donna une réponse affirmative à la conjecture suivante de A. Monteiro : les algèbres de Lukasiewicz injectives sont les algèbres complètes et centrées, puis démontra (43) un théorème sur l'extension des homomorphismes pour les AL de forme analogue à celui établi par A. Monteiro pour les algèbres de Boole. Enfin L. Monteiro vient de publier récemment en espagnol un fascicule important sur les AL (46), comportant un petit chapitre sur les algèbres de Lukasiewicz trivalentes centrées et axées et une étude très longue sur les algèbres de Lukasiewicz trivalentes monadiques, les produits directs d'algèbres monadiques, les algèbres monadiques libres et la représentation fonctionnelle des algèbres monadiques.

Dans AW nous pouvons établir formellement les théorèmes suivants (annexe I) :

$$\text{AWT71. } 0 \rightarrow x = 1$$

$$\text{AWT72. } x \rightarrow 0 = N_x$$

$$\text{AWT73. } x \rightarrow y = 0 \text{ si et seulement si } x = 1 \text{ et } y = 0$$

$$\text{AWT74. } M_x = 0 \text{ si et seulement si } x = 0$$

$$\text{AWT75. Si } N_x \vee N_y = 1 \text{ alors } M_x \leq N_y$$

$$\text{AWT76. Si } x \vee y = 1 \text{ alors } M_{N_x} \leq y$$

$$\text{AWT77. } x \wedge N_{M_x} = 0$$

Ces théorèmes vont nous permettre de retrouver les résultats établis par Varlet (61), à savoir que toute AL est un treillis doublement pseudo-complémenté, et de compléter les résultats de Varlet en explicitant les pseudo-compléments.

En effet, nous avons les théorèmes suivants :

THEOREME 5 :

Pour tout x de AW il existe au moins un élément y de AW tel que $x \wedge y = 0$ et N_{M_x} est le plus grand élément de AW vérifiant cette égalité.

Démonstration :

D'après AWT77, pour tout x de AW il existe au moins un élément y de AW tel que $x \wedge y = 0$, à savoir N_{M_x} . Montrons que c'est le plus grand. Supposons qu'il existe un élément $z \neq N_{M_x}$ de AW tel que $x \wedge z = 0$. On a alors $N(x \wedge z) = 1$ soit encore d'après AWT57 $N_x \vee N_z = 1$. D'après AWT75, si $N_x \vee N_z = 1$, alors $M_x \leq N_z$. D'après AWT9 et AWT14, si $M_x \leq N_z$ alors $z \leq N_{M_x}$.

THEOREME 6 :

Pour tout x de AW il existe au moins un élément y de AW tel que $x \vee y = 1$ et M_{N_x} est le plus petit élément de AW vérifiant cette égalité.

Démonstration :

D'après AWT49 et AWT14, pour tout x de AW il existe au moins un élément y de AW tel que $x \vee y = 1$, à savoir M_{N_x} . Montrons que c'est le plus petit. Supposons qu'il existe un élément $z \neq M_{N_x}$ de AW tel que $x \vee z = 1$. On a alors d'après AWT76, $M_{N_x} \leq z$.

THEOREME 7 :

Une algèbre de Wajsberg (ou une algèbre de Lukasiewicz) est un treillis doublement pseudo-complémenté, tout élément x ayant pour pseudo-complément l'élément N_{M_x} et pour pseudo-complément dual l'élément M_{N_x} .

Démonstration :

Suivant les définitions données par Varlet (61) nous dirons que

. N_{M_x} est le pseudo-complément de x s'il vérifie : $x \wedge y = 0 \Leftrightarrow y \leq N_{M_x}$.

. M_{N_x} est le pseudo-complément dual de x s'il vérifie : $x \vee y = 1 \Leftrightarrow M_{N_x} \leq y$.

. AW est pseudo-complémenté si tout élément x de AW admet un pseudo-complément.

. AW est dualement pseudo-complémenté si tout élément x de AW admet un pseudo-complémenté dual.

. AW est doublement pseudo-complémenté si il est à la fois pseudo-complémenté et dualement pseudo-complémenté.

D'après les théorèmes 5 et 6 nous avons pour tout élément x de AW

$$x \wedge y = 0 \Rightarrow y \leq N_{M_x}$$

$$x \vee y = 1 \Rightarrow M_{N_x} \leq y$$

D'autre part, d'après AWT32, si $y \leq N_{M_x}$ alors $y \wedge x \leq N_{M_x} \wedge x$, c'est-à-dire d'après AWT35,

et AWT63, $x \wedge y = 0$.

De même, d'après AWT20, si $MNx \leq y$ alors $MNx \vee x \leq y \vee x$, c'est-à-dire d'après AWT49, AWT14 et AWT63, $x \vee y = 1$.

Remarque : D'après AWT14, le principe de détermination de Moisil qui joue un rôle important dans la théorie des AL (26) (27) (42) est équivalent au théorème suivant :

Si deux éléments x et y d'une AL ont respectivement même pseudo-complément et même pseudo-complément dual ils sont égaux.

Pour terminer ce paragraphe, nous allons indiquer les quelques définitions et propriétés que nous avons établies (annexe 0) concernant les filtres et les idéaux de AW.

DEFINITION 5 :

On appelle filtre de AW toute partie F de AW telle que

- F1. Si $x \in F$ et $x \leq y$ alors $y \in F$
- F2. Si $x \in F$ et $y \in F$ alors $x \wedge y \in F$
- F3. $0 \notin F$

L'ensemble $\{1\}$ est le plus petit filtre.

Soit D_M l'ensemble des éléments x de AW de type I (paragraphe 3) c'est-à-dire tels que $Mx = 1$ (correspondants aux éléments denses définis par Varlet (61)).

THEOREME 8 :

D_M est un filtre de AW.

D'après AWT14, on a $Mx = 1$ si et seulement si $NMx = 0$. Le théorème 8 peut donc aussi s'énoncer de la façon suivante :

L'ensemble des éléments de AW ayant 0 pour pseudo-complément est un filtre de AW.

THEOREME 9 :

Soit x un élément de AW différent de 0 . L'ensemble F des éléments y tels que $x \leq y$ est un filtre et on a $F = (AW) \vee x$ (ensemble des éléments $z \vee x$ avec $z \in AW$).

DEFINITION 6 :

Le filtre $(AW) \vee x$ est appelé le filtre principal engendré par l'élément x .

DEFINITION 7 :

On dit qu'une partie C de AW est compatible si une conjonction finie quelconque d'éléments de C n'est jamais égale à 0 .

THEOREME 10 :

Soient C une partie compatible de AW et F l'ensemble des éléments x de C tels qu'il existe une conjonction finie $p = x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n$ d'éléments de C avec $p \leq x$. F est un filtre.

DEFINITION 8 :

On appelle idéal de AW toute partie I de AW telle que

- I1. Si $x \in I$ et $y \leq x$ alors $y \in I$
- I2. Si $x \in I$ et $y \in I$ alors $x \vee y \in I$
- I3. $1 \notin I$

DEFINITION 9 :

Pour toute partie P de AW on note $N(P)$ l'ensemble des éléments de la forme Nx où $x \in P$ (ou encore (d'après AWT14) l'ensemble des éléments x tels que $Nx \in P$).

THEOREME 11 :

F est un filtre de AW si et seulement si $N(F)$ est un idéal de AW .

D'après le théorème 8 on a alors :

THEOREME 12 :

$N(D_M)$ est un idéal de AW .

ou encore

L'ensemble des éléments de AW ayant 1 pour pseudo-complément dual (c'est-à-dire l'ensemble des éléments de type II (paragraphe 3)) est un idéal de AW .

Dans le cas où F est le filtre principal $(AW) \vee x$ alors $N(F)$ est l'idéal principal $(AW) \wedge Nx$.

Si on ordonne par inclusion l'ensemble des filtres de AW , cet ensemble est inductif.

En effet, si (F_i) est une famille totalement ordonnée de filtres alors $\cup F_i$ est aussi un filtre et d'après le théorème de Zorn il existe des filtres maximaux.

DEFINITION 10 :

On appelle ultrafiltre de AW un filtre maximal de AW .

THEOREME 13 :

U est un ultrafiltre de AW si et seulement si $N(U)$ est un idéal maximal de AW .

THEOREME 14 :

Soient F un filtre de AW et x un élément quelconque de AW . $F \cup \{x\}$ est incompatible si et seulement si le pseudo-complément de x appartient à F .

THEOREME 15 :

Soit F un filtre de AW . F est un ultrafiltre si et seulement si pour tout x n'appartenant pas à F , $F \cup \{x\}$ est incompatible.

Des théorèmes 14 et 15 on peut alors déduire immédiatement le théorème suivant :

THEOREME 16 :

Soit F un filtre de AW . F est un ultrafiltre si et seulement si quel que soit l'élément de AW ou bien cet élément appartient à F ou bien le pseudo-complément de cet élément appartient à F .

et par suite, on a les théorèmes :

THEOREME 17 :

Pour qu'une partie non vide U de AW soit un ultrafiltre, il faut et il suffit qu'elle vérifie les deux conditions :

U1. $x \in U$ si et seulement si $Nx \notin U$

U2. $x \wedge y \in U$ si et seulement si $x \in U$ et $y \in U$

THEOREME 18 :

Si U est un ultrafiltre de AW et si $x_1 \vee \dots \vee x_n$ appartient à U , alors il existe i ($i \in [1, n]$) tel que x_i appartienne à U .

THEOREME 19 :

Pour qu'une partie non vide U de AW soit un ultrafiltre, il faut et il suffit qu'elle vérifie les deux conditions :

U1. $x \in U$ si et seulement si $Nx \notin U$

U3. $x \vee y \in U$ si et seulement si $x \in U$ ou $y \in U$.

Donnons une propriété concernant les demi-homomorphismes d'algèbres de Lukasiewicz introduits par L. Monteiro (43).

DEFINITION 11 :

Une application ϕ d'une algèbre de Wajsberg A dans une algèbre de Wajsberg A' est un demi-homomorphisme si :

$$\text{DH1. } \phi(1) = 1$$

$$\text{DH2. } \phi(x \vee y) = \phi(x) \vee \phi(y)$$

$$\text{DH3. } \phi(Mx) = M \phi(x).$$

THEOREME 20 :

La fonction caractéristique ϕ d'un ultrafiltre U de AW est un demi-homomorphisme de AW dans la sous-algèbre de Wajsberg $\{0, 1\}$.

La définition que nous avons donnée d'un filtre de AW (définition 5) s'appuyait uniquement sur le fait que AW a une structure de treillis et par suite pourrait convenir pour définir les filtres de n'importe quelle algèbre ayant une structure de treillis sous-jacente. Il paraît intéressant de chercher à définir des filtres particuliers liés plus étroitement à la structure de AW .

DEFINITION 12 :

On appelle filtre implicatif de AW toute partie F de AW telle que

$$\text{FI1. } 1 \in F$$

$$\text{FI2. } \text{Si } x \in F \text{ et } x \rightarrow y \in F \text{ alors } y \in F.$$

Nous dirons qu'un filtre implicatif F de AW est *propre* s'il est distinct de AW . Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que 0 n'appartienne pas à F .

THEOREME 21 :

Tout filtre implicatif propre est un filtre au sens de la définition 5 et il existe des filtres de AW qui ne sont pas implicatifs.

THEOREME 22 :

Soit F un filtre implicatif sur une algèbre de Wajsberg W . La relation définie par $(x \rightarrow y \in F \text{ et } y \rightarrow x \in F)$ est une congruence sur W . Si h est un homomorphisme de W dans l'algèbre de Wajsberg W' alors $h^{-1}(1)$ est un filtre implicatif dont la congruence est identique à la relation $h(x) = h(y)$. On peut donc l'appeler noyau de h .

Soit X une partie de AW . Le filtre implicatif engendré par X est le plus petit filtre implicatif contenant X .

Soit x un élément de AW . Si x appartient au filtre implicatif engendré par X nous noterons $X \vdash x$.

THEOREME 23 :

Si $X \vdash x$ alors il existe une partie finie X_0 de X telle que $X_0 \vdash x$.

DEFINITION 13 :

Si le filtre implicatif engendré par X est impropre, nous dirons que X est inconsistant.

X est inconsistant peut donc s'écrire, d'après ce qui précède $X \vdash 0$.

Le théorème 23 nous donne alors le corollaire suivant :

Si X est inconsistant, alors il existe une partie finie X_0 de X qui est inconsistante.

qui conduit lui-même au

THEOREME 24 :

Tout filtre implicatif propre est contenu dans un filtre implicatif maximal (propre).

THEOREME 25 :

Soient x et y deux éléments de AW . Pour toute partie X de AW on a

$X, x \vdash y \Leftrightarrow X \vdash x \rightarrow (x \rightarrow y)$.

THEOREME 26 :

Soit x un élément de AW . On a $X, x \vdash 0 \Leftrightarrow X \vdash MNx$
et par suite x inconsistant $\Leftrightarrow MNx = 1$.

THEOREME 27 :

Soit F un filtre implicatif propre. Quel que soit l'élément x de AW on a l'une (et seulement une) des deux propriétés suivantes :

- (1) F, x est consistant
- (2) F, MNx est consistant.

On en déduit alors immédiatement le

THEOREME 28 :

F est un filtre implicatif propre maximal si et seulement si pour tout élément x de AW on a l'une (et seulement une) des deux propriétés suivantes :

- (1) $x \in F$
- (2) $MNx \in F$

On appellera *ultrafiltre implicatif* de AW un filtre implicatif propre maximal.

THEOREME 29 :

Soient W une algèbre de Wajsberg, W_2 l'algèbre de Wajsberg à deux éléments et W_3 l'algèbre de Wajsberg à trois éléments (i.e. donnée par la matrice de Lukasiewicz). Si U est un ultrafiltre implicatif de W alors W/U est isomorphe à W_2 ou à W_3 .

THEOREME 30 :

Soient x et y deux éléments distincts de AW . Alors il existe un ultrafiltre U tel que $x \notin y(U)$.

d'où le corollaire suivant :

L'intersection des ultrafiltres implicatifs de AW est l'ensemble réduit à l'élément 1.

qui nous permet de donner une démonstration algébrique du *Théorème de Complétude pour LTL*.

Les théorèmes que nous venons de donner permettent également de démontrer que toute algèbre de Wajsberg est produit sous-direct de W_2 et W_3 et de retrouver ainsi la décomposition d'une algèbre trivalente de Lukasiewicz donnée par Moisil (26) (27) sous la forme $S \times T$, S étant une algèbre de Boole et T une algèbre lukasiewiczienne sans facteur booléen. Ce résultat montre aussi que les équations valides dans toute algèbre de Wajsberg sont les identités de W_3 .

Nous terminerons ce travail avec le problème de la construction d'un calcul des séquents et d'un système de déduction naturelle dans LTL.

ADDENDUM

A l'origine ce travail comportait un paragraphe 10 intitulé «calcul des séquents et déduction naturelle». Celui-ci a été publié séparément en conservant la numérotation d'origine des définitions et des théorèmes sous le titre «Calcul des séquents et déduction naturelle pour la logique trivalente de Lukasiewicz».

(Annales Scientifiques de l'Université de Clermont. 1976. n° 60. pp. 55-73).

- ANNEXE 0 -

Démonstration du THEOREME 1 :

On définit dans M la relation binaire \cong par : $x \cong y \Leftrightarrow (x \rightarrow y = 1)$.

Les axiomes (AW1) - (AW5) peuvent alors s'écrire plus simplement :

$$AW1. x \cong (y \rightarrow x)$$

$$AW2. (x \rightarrow y) \cong ((y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z))$$

$$AW3. ((x \rightarrow Nx) \rightarrow x) \cong x$$

$$AW4. (Nx \rightarrow Ny) \cong (y \rightarrow x)$$

$$AW5. Si 1 \cong x \text{ alors } x = 1$$

et on a $x R y \Leftrightarrow (x \cong y \text{ et } y \cong x)$.

A partir des axiomes AW1 - AW5, on peut alors déduire (annexe I) les deux théorèmes

AWT2. Si $x \cong y$ et $y \cong z$ alors $x \cong z$ et AWT3. $x \cong x$, et par suite la relation \cong est une relation de préordre.

D'après AWT3, la relation R est réflexive, de plus, elle est symétrique par définition même.

D'autre part on a $(x R y \text{ et } y R z) \Leftrightarrow ((x \cong y \text{ et } y \cong x) \text{ et } (y \cong z \text{ et } z \cong y))$.

Or d'après AWT2 : $(x \cong y \text{ et } y \cong z) \Rightarrow (x \cong z)$

$$(y \cong x \text{ et } z \cong y) \Rightarrow (z \cong x)$$

donc $(x R y \text{ et } y R z) \Rightarrow (x R z)$ et la relation R est transitive.

A partir des axiomes AW1 - AW5 on peut déduire (annexe I) le théorème

AWT9. Si $x \cong y$ alors $Ny \cong Nx$.

On a alors $(x \cong y \text{ et } y \cong x) \Rightarrow (Ny \cong Nx \text{ et } Nx \cong Ny)$ c'est-à-dire

$(x R y) \Rightarrow (Nx R Ny)$ et par suite la relation R est compatible avec l'opération N. A partir des axiomes AW1 - AW5 on peut déduire (annexe I) les deux théorèmes

AWT1. Si $x \cong y$ alors $(y \rightarrow z) \cong (x \rightarrow z)$

AWT13. Si $y \cong z$ alors $(x \rightarrow y) \cong (x \rightarrow z)$

On a alors $((x \cong x' \text{ et } x' \cong x) \text{ et } (y \cong y' \text{ et } y' \cong y))$ implique

$((x' \rightarrow y) \cong (x \rightarrow y) \text{ et } (x \rightarrow y') \cong (x' \rightarrow y'))$ et

$((x \rightarrow y) \cong (x \rightarrow y') \text{ et } (x' \rightarrow y') \cong (x' \rightarrow y))$ c'est-à-dire, d'après AWT2

$(x \rightarrow y) \cong (x' \rightarrow y') \text{ et } (x' \rightarrow y') \cong (x \rightarrow y)$.

Donc $(x R x' \text{ et } y R y') \Rightarrow ((x \rightarrow y) R (x' \rightarrow y'))$ et par suite la relation R est compatible avec l'opération \rightarrow .

Considérons l'ensemble quotient A/R et désignons par \bar{x} la classe de l'élément x .

On a $\bar{1} = \{x \in A / 1 R x\} = \{x \in A / 1 \cong x \text{ et } x \cong 1\} = \{1\}$ d'après AW5.

A partir des axiomes (AW1) - (AW4), par passage au quotient, on obtient les égalités suivantes :

$$(1) \bar{x} \rightarrow (\bar{y} \rightarrow \bar{x}) = \bar{1}$$

$$(2) (\bar{x} \rightarrow \bar{y}) \rightarrow ((\bar{y} \rightarrow \bar{z}) \rightarrow (\bar{x} \rightarrow \bar{z})) = \bar{1}$$

$$(3) ((\bar{x} \rightarrow N\bar{x}) \rightarrow \bar{x}) \rightarrow \bar{x} = \bar{1}$$

$$(4) (N\bar{x} \rightarrow N\bar{y}) \rightarrow (\bar{y} \rightarrow \bar{x}) = \bar{1}$$

Comme $\bar{1} = \{1\}$, ces quatre égalités sont identiques aux quatre premiers axiomes d'une algèbre de Wajsberg $(A', \{1\}, N, \rightarrow)$.

On a d'autre part, d'après (AW5)

$$(\bar{1} \rightarrow \bar{x} = \bar{1}) \Rightarrow ((1 \rightarrow x) R 1) \Rightarrow ((1 \rightarrow x) \cong 1 \text{ et } 1 \cong (1 \rightarrow x)) \Rightarrow (1 \rightarrow x = 1)$$

Or d'après AWT10 (annexe I), $x \rightarrow 1 = 1$ donc $(\bar{1} \rightarrow \bar{x} = \bar{1}) \Rightarrow (x R 1)$.

Par suite, si $\bar{1} \rightarrow \bar{x} = \bar{1}$, alors $\bar{x} = \bar{1}$ et le cinquième axiome d'une algèbre de Wajsberg est vérifié.

$(\bar{x} \rightarrow \bar{y} = \bar{1} \text{ et } \bar{y} \rightarrow \bar{x} = \bar{1})$ implique en particulier $(1 \cong (x \rightarrow y) \text{ et } 1 \cong (y \rightarrow x))$, c'est-à-dire d'après AW5, $(x \rightarrow y = 1 \text{ et } y \rightarrow x = 1)$ donc $x R y$.

Par suite si $\bar{x} \rightarrow \bar{y} = \bar{1}$ et $\bar{y} \rightarrow \bar{x} = \bar{1}$, alors $\bar{x} = \bar{y}$ et le sixième axiome d'une algèbre de Wajsberg est vérifié.

Démonstration du THEOREME 2 :

En utilisant la relation \cong , (AW6) s'écrit AW6. Si $x \cong y$ et $y \cong x$, alors $x = y$, et par suite \cong est une relation d'ordre.

Les théorèmes AWT1 - AWT13 établis au cours de la démonstration du théorème 1 l'ont été à partir des axiomes AW1 - AW5, donc les démonstrations que nous en avons données (annexe I) sont identiques à celles de ces mêmes théorèmes dans l'algèbre de Wajsberg $(A, 1, N, \rightarrow)$.

Dans cette même algèbre, nous pouvons alors établir (annexe I) toute une suite de théorèmes formels et en particulier les théorèmes suivants :

$$\text{AWT46. } x \wedge (x \vee y) = x$$

$$\text{AWT44. } x \wedge (y \vee z) = (z \wedge x) \vee (y \wedge x)$$

$$\text{AWT14. } x = NNx$$

$$\text{AWT57. } N(x \wedge y) = Nx \vee Ny$$

$$\text{AWT56. } (x \wedge Nx) \wedge (y \vee Ny) = x \wedge Nx$$

$$\text{AWT49. } Nx \vee Mx = 1$$

$$\text{AWT54. } Nx \wedge Mx = x \wedge Nx$$

qui sont identiques aux axiomes L1 - L7 de la définition 1.

A partir des axiomes AW1 - AW6 nous pouvons établir encore différents théorèmes (annexe I) et en particulier le théorème AWT62. $x \rightarrow y = (MNx \vee y) \wedge (My \vee Nx)$ qui nous donne l'égalité cherchée.

Equivalence de la DEFINITION 2 et de celle donnée par A. Monteiro :

Les axiomes (AW1) - (AW4) sont identiques aux axiomes A1 - A4.

A partir des axiomes (AW1) - (AW6) nous avons démontré précédemment les axiomes A5 (AWT47) et A6 (AWT28.AWD1).

Démontrons les axiomes (AW5) et (AW6) à partir des axiomes A1 - A6 :

. Si $1 \rightarrow x = 1$ on a $x = 1$ d'après A5.

. Si $x \rightarrow y = 1$ et $y \rightarrow x = 1$ on a d'après A6, $1 \rightarrow y = 1 \rightarrow x$, soit encore d'après A5, $y = x$.

Equivalence de la DEFINITION 2 et de la DEFINITION 3 :

Les axiomes A1, A3 - A6 sont identiques aux axiomes B1, B3 - B6.

B2 se déduit des axiomes A1 - A6, car il est identique à AWT24.

Déduisons A2 des axiomes B1 - B6. :

D'après B1, on a $x \rightarrow (1 \rightarrow x) = 1$ et $1 \rightarrow (x \rightarrow 1) = 1$ soit d'après B5, $x \rightarrow x = 1$ et $x \rightarrow 1 = 1$.

On a donc en particulier $(x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow y) = 1$ et $(z \rightarrow y) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow y)) = 1$. Cette dernière égalité peut encore s'écrire, d'après B2, $(x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow ((z \rightarrow y) \rightarrow y)) = 1$. On a alors $(x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow z)) = 1$ d'après B6 et finalement

$(x \rightarrow y) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z)) = 1$ d'après B2.

Résolution du problème d'indépendance des axiomes (AW1) - (AW6) :

Si $1 \rightarrow x = 1$, on a d'après (AW1), $x \rightarrow 1 = 1$ et par suite, d'après (AW6), $x = 1$.

Donc l'axiome (AW5) peut être déduit des axiomes (AW1) et (AW6).

Démontrons que les axiomes autres que (AW5) sont indépendants.

Indépendance de (AW1) : soient 1 et a deux éléments distincts. On désigne par E_1 l'ensemble $\{1, a\}$ dans lequel on pose $1 \rightarrow 1 = a \rightarrow a = 1, 1 \rightarrow a = a \rightarrow 1 = a, N1 = 1$ et $Na = a$. Les axiomes (AW2), (AW3), (AW4) et (AW6) sont vérifiés dans E_1 alors que l'axiome (AW1) ne l'est pas car $a \rightarrow (a \rightarrow a) = a \rightarrow 1 = a \neq 1$.

Indépendance de (AW2) : on désigne par E_2 l'ensemble des neuf éléments distincts $\{1, a, b, c, d, c', b', a', 0\}$ dans lequel on définit les opérations \rightarrow et N par

\rightarrow	1	a	b	c	d	c'	b'	a'	0	N
1	1	a	b	c	d	c'	b'	a'	0	1
a	1	1	a	a	c'	c'	b'	b'	a'	a
b	1	1	1	c'	c'	c'	b'	b'	b'	b
c	1	1	1	1	1	1	c'	c'	c'	c
d	1	1	a	a	1	1	c'	c'	d	d
c'	1	a	b	b	a	1	c'	a	c	c'
b'	1	a	b	b	a	1	1	a	b	b'
a'	1	1	a	a	1	1	1	1	a	a'
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0

Les axiomes (AW1), (AW3), (AW4) et (AW6) sont vérifiés dans E_2 , alors que l'axiome (AW2) ne l'est pas car $(b \rightarrow a) \rightarrow ((a \rightarrow c) \rightarrow (b \rightarrow c)) = 1 \rightarrow (a \rightarrow c') = 1 \rightarrow c' = c' \neq 1$.

Indépendance de (AW3) : soient 1, a et b trois éléments distincts. On désigne par E_3 l'ensemble $\{1, a, b\}$ dans lequel on pose

$1 \rightarrow 1 = a \rightarrow 1 = b \rightarrow 1 = a \rightarrow a = b \rightarrow a = 1, 1 \rightarrow a = 1 \rightarrow b = a \rightarrow b = b \rightarrow b = a$ et $N1 = Na = Nb = b$. Les axiomes (AW1), (AW2), (AW4) et (AW6) sont vérifiés dans E_3

alors que l'axiome (AW3) ne l'est pas car

$((a \rightarrow Na) \rightarrow a) \rightarrow a = ((a \rightarrow b) \rightarrow a) \rightarrow a = (a \rightarrow a) \rightarrow a = 1 \rightarrow a = a \neq 1$.

Indépendance de (AW4) : soient 1 et a deux éléments distincts. On désigne par E_4 l'ensemble $\{1, a\}$ dans lequel on pose $1 \rightarrow 1 = a \rightarrow 1 = a \rightarrow a = 1, 1 \rightarrow a = a, N1 = 1$ et $Na = a$. Les axiomes (AW1), (AW2), (AW3) et (AW6) sont vérifiés dans E_4 alors que l'axiome (AW4) ne l'est pas car $(Na \rightarrow N1) \rightarrow (1 \rightarrow a) = (a \rightarrow 1) \rightarrow a = 1 \rightarrow a = a \neq 1$.

Indépendance de (AW6) : soient 1, a et 0 trois éléments distincts. On désigne par E_6 l'ensemble $\{1, a, 0\}$ dans lequel on pose

$1 \rightarrow 1 = 1 \rightarrow a = a \rightarrow 1 = a \rightarrow a = 0 \rightarrow 1 = 0 \rightarrow a = 0 \rightarrow 0 = 1, 1 \rightarrow 0 = 0, a \rightarrow 0 = a, N1 = 0, Na = a$ et $N0 = 1$. Les axiomes (AW1) - (AW4) sont vérifiés dans E_6 alors que l'axiome

(AW6) ne l'est pas car $1 \rightarrow a = a \rightarrow 1 = 1 \neq a$.

Démonstrations de complétude et d'indépendance des différentes axiomatisations de LTL.

Système α :

Les axiomes $\alpha 1 - \alpha 4$ sont identiques aux axiomes W1 - W4. De plus $\alpha 5$ et $\alpha 6$ correspondent bien à D1 (paragraphe 1). Le système W peut donc être déduit du système α ce qui démontre *la complétude du système α .*

On vérifie facilement que les matrices M1₃ - M6₃ (annexe II) démontrent respectivement l'indépendance des axiomes $\alpha 1 - \alpha 6$ et par suite *le système α est indépendant.*

Système β :

Le système α étant complet il suffit donc de déduire du système β les théorèmes $((x \rightarrow y) \rightarrow y) \rightarrow x \vee y$ et $x \vee y \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow y)$ correspondant à D2 (paragraphe 1) pour établir la complétude du système β .

Les axiomes $\beta 1 - \beta 4$ étant identiques aux axiomes W1 - W4, tous les théorèmes déjà établis (2) dans le système W sans utiliser D1 et D2 peuvent être déduits à partir de $\beta 1 - \beta 4$. En utilisant ces théorèmes on obtient formellement (annexe III) les deux théorèmes

$$\beta T1. \quad x \vee y \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow y)$$

$$\beta T2. \quad ((x \rightarrow y) \rightarrow y) \rightarrow x \vee y$$

et par suite *le système β est complet.*

On vérifie facilement que les matrices M7₄, M2₄ - M6₄, M8₄ - M10₄ (annexe II) démontrent respectivement l'indépendance des axiomes $\beta 1 - \beta 9$ et par suite *le système β est indépendant.*

Système γ :

Les axiomes $\gamma 1 - \gamma 4$ sont identiques aux axiomes W1 - W4. $\gamma 5$ et $\gamma 6$ correspondent à D1. $\gamma 7$ et $\beta T2$ sont identiques. Les axiomes $\gamma 8$ et $\beta 9$ sont identiques donc la démonstration de $\beta T1$ (annexe III) reste valable dans γ et par suite *le système γ est complet.*

On vérifie facilement que les matrices M11₄, M3₄ - M6₄, M8₄, M10₄ (annexe II) démontrent respectivement l'indépendance des axiomes $\gamma 1, \gamma 3 - \gamma 8$ mais *le problème de l'indépendance de $\gamma 2$ reste ouvert.*

Système δ :

Le système α étant complet il suffit donc de déduire du système δ les théorèmes $x \wedge y \rightarrow N((Nx \rightarrow Ny) \rightarrow Ny)$ et $N((Nx \rightarrow Ny) \rightarrow Ny) \rightarrow x \wedge y$ correspondant à D3 (paragraphe 1) pour établir la complétude du système δ . Or en utilisant les théorèmes déjà établis à partir du système W sans utiliser D3 (2) on obtient formellement (annexe III) les deux théorèmes

$$\delta T1. \quad N((Nx \rightarrow Ny) \rightarrow Ny) \rightarrow x \wedge y$$

$$\delta T2. \quad x \wedge y \rightarrow N((Nx \rightarrow Ny) \rightarrow Ny)$$

et par suite *le système δ est complet.*

On vérifie facilement que les matrices M7₄, M2₄, M12₄, M4₄ - M6₄, M13₄ - M15₄ (annexe II) démontrent respectivement l'indépendance des axiomes $\delta 1 - \delta 9$ et par suite *le système δ est indépendant.*

Système ϵ :

Les axiomes $\epsilon 1 - \epsilon 4$ sont identiques aux axiomes W1 - W4. $\epsilon 5$ et $\epsilon 6$ correspondent à D1. $\delta T2$ et $\epsilon 7$ sont identiques. Les axiomes $\epsilon 8$ et $\delta 9$ sont identiques donc la démonstration de $\delta T1$ reste valable dans ϵ et par suite *le système ϵ est complet.*

On vérifie facilement que les matrices M11₄, M12₄, M4₄ - M6₄, M13₄ et M15₄ (annexe II)

démontrent respectivement l'indépendance des axiomes $\epsilon 1$, $\epsilon 3 - \epsilon 8$ mais le problème de l'indépendance de $\epsilon 2$ reste ouvert.

Système ζ :

Le système β est complet. De plus, en utilisant les théorèmes établis à partir du système W privé de D3 (2) on obtient formellement (annexe III) les deux théorèmes $\zeta T1. N(Nx \vee Ny) \rightarrow x \wedge y$ et $\zeta T2. x \wedge y \rightarrow N(Nx \vee Ny)$ et par suite le système ζ est complet.

On vérifie facilement que les matrices $M7_{\zeta}, M2_{\zeta}, M12_{\zeta}, M4_{\zeta} - M6_{\zeta}, M8_{\zeta} - M10_{\zeta}, M13_{\zeta} - M15_{\zeta}$ (annexe II) démontrent respectivement l'indépendance des axiomes $\zeta 1 - \zeta 12$ et par suite le système ζ est indépendant.

Système η :

Les axiomes $\eta 1 - \eta 6$ et $\eta 9 - \eta 11$ sont identiques respectivement aux axiomes $\delta 1 - \delta 9$.

Les systèmes γ et δ étant complets le système η est complet lui aussi.

On vérifie facilement que les matrices $M11_{\eta}, M12_{\eta}, M4_{\eta} - M6_{\eta}, M8_{\eta}, M10_{\eta}, M13_{\eta} - M15_{\eta}$ (annexe II) démontrent respectivement l'indépendance des axiomes $\eta 1, \eta 3 - \eta 11$ mais le problème de l'indépendance de $\eta 2$ reste ouvert.

Système θ :

Du système θ on peut déduire formellement (annexe III) les théorèmes

$\theta T1. N(Nx \vee Ny) \rightarrow x \wedge y$ et $\theta T4. (x \rightarrow z) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow (x \vee y \rightarrow z))$.

$\theta 7, \theta 8$ et $\theta T3$ sont identiques respectivement à $\beta 7 - \beta 9$. $\theta 1 - \theta 6, \theta 9$ et $\theta 10$ sont identiques respectivement à $\epsilon 1 - \epsilon 8$. Les systèmes β et ϵ étant complets le système θ est complet lui aussi.

On vérifie facilement que les matrices $M7_{\theta}, M2_{\theta}, M12_{\theta}, M4_{\theta} - M6_{\theta}, M8_{\theta}, M9_{\theta}, M13_{\theta}$ et $M15_{\theta}$ (annexe II) démontrent respectivement l'indépendance des axiomes $\theta 1 - \theta 10$ et par suite le système θ est indépendant.

Système ι :

Les axiomes $\iota 8$ et $\iota 9$ sont identiques respectivement aux axiomes $\theta 9$ et $\theta 10$.

De plus du système ι on peut déduire formellement (annexe III) les théorèmes

$\iota T1. x \rightarrow x \vee y$ et $\iota T2. y \rightarrow x \vee y$ identiques aux axiomes $\theta 7$ et $\theta 8$.

Or le système θ est complet, donc le système ι est complet lui aussi.

On vérifie facilement que les matrices $M11_{\iota}, M12_{\iota}, M4_{\iota} - M6_{\iota}, M8_{\iota}, M13_{\iota}$ et $M15_{\iota}$ (annexe II) démontrent respectivement l'indépendance des axiomes $\iota 1, \iota 3 - \iota 9$ mais le problème de l'indépendance de $\iota 2$ reste ouvert.

Système χ :

On peut déduire formellement (annexe III) le système ζ du système χ or nous avons précédemment démontré la complétude du système ζ donc le système χ est complet.

On peut remarquer que les axiomes $\chi 7$ et $\chi 10$ ne sont pas utilisés directement (on utilise simplement les règles $\chi R4$ et $\chi R5$ qui s'en déduisent) ni dans le développement du système χ ni dans celui du système ζ . On pourrait donc remplacer les axiomes $\chi 7$ et $\chi 10$ par les règles $\chi R4$ et $\chi R5$.

Système λ :

On peut déduire formellement (annexe III) le système β du système λ , or nous avons précédemment démontré la complétude du système β donc le système λ est complet.

Ce système λ donne une solution au problème posé par Slupecki (57) différente de celle donnée par Bryll et Prucnal (paragraphe 2).

Etude des axiomes V1 - V9 :

D'après V1 et V2, (A, \wedge, \vee) est un treillis distributif (Sholander 1951. (2)).

D'après V1 et V6 on a $x \wedge (x \vee x^+) = x \wedge 1 = x$. D'autre part dans un treillis distributif on a $x \vee (x \wedge y) = x$ et par suite d'après V3, $x \vee (x \wedge x^*) = x \vee 0 = x$. Le treillis distributif (A, \wedge, \vee) est donc borné par les éléments 0 et 1 et l'on retrouve bien le corollaire démontré par Varlet.

Nous allons maintenant démontrer l'indépendance des axiomes V1 - V9.

Indépendance de V1 :

Soient 0,1,a trois éléments distincts. On désigne par T_1 l'ensemble $\{0,a,1\}$. Dans T_1 on pose

$$1 \vee 1 = 1 \vee a = 1 \vee 0 = a \vee 1 = 0 \vee 1 = 1,$$

$$a \vee a = a \vee 0 = 0 \vee a = a, 0 \vee 0 = 0, 1 \wedge 1 = 1 \wedge a = a \wedge 1 = 1, a \wedge a = a,$$

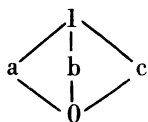
$$0 \wedge 1 = 0 \wedge a = 0 \wedge 0 = a \wedge 0 = 1 \wedge 0 = 0, 1^* = 1^+ = 0, a^* = 0, a^+ = 1 \text{ et } 0^* = 0^+ = 1.$$

Les axiomes V2 - V9 sont vérifiés dans T_1 alors que l'axiome V1 ne l'est pas car

$$a \wedge (1 \vee a) = a \wedge 1 = 1 \neq a.$$

Indépendance de V2 :

Soit T_2 le treillis non distributif dont le diagramme est

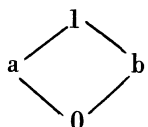


Dans T_2 on pose $1^* = 1^+ = 0, a^* = a^+ = b, b^* = b^+ = c, c^* = c^+ = a$ et $0^* = 0^+ = 1$.

Les axiomes V1, V3 - V9 sont vérifiés dans T_2 alors que l'axiome V2 ne l'est pas.

Indépendance de V3 :

Soit T_3 le treillis distributif dont le diagramme est :



Dans T_3 on pose $1^* = 1^+ = 0, a^* = 1, a^+ = b, b^* = b^+ = a$ et $0^* = 0^+ = 1$.

Les axiomes V1, V2, V4 - V9 sont vérifiés dans T_3 alors que l'axiome V3 ne l'est pas car

$$a \wedge a^* = a \wedge 1 = a \neq 0.$$

Indépendance de V4 :

Soit T_4 le treillis distributif ayant même diagramme que T_3 mais dans lequel on pose

$$1^* = 1^+ = 0, a^* = 0, a^+ = b, b^* = b^+ = a \text{ et } 0^* = 0^+ = 1.$$

Les axiomes V1 - V3, V5 - V9 sont vérifiés dans T_4 alors que l'axiome V4 ne l'est pas car

$$(a \wedge b)^* = 0^* = 1 \text{ et } a^* \vee b^* = 0 \vee a = a \neq 1.$$

Indépendance de V5 :

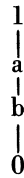
Soit T_5 le treillis distributif ayant même diagramme que T_3 mais dans lequel on pose $x^* = 0$ pour tout x , $1^+ = 0$, $a^+ = b$, $b^+ = a$ et $0^+ = 1$.

Les axiomes V1 - V4, V6-V9 sont vérifiés dans T_5 alors que l'axiome V5 ne l'est pas.

Les opérations \wedge et \vee étant des opérations duales dans un treillis distributif, les opérations $*$ et $+$ apparaissant comme duales d'après les axiomes V3 - V9, à chacun des modèles utilisés pour V3, V4, V5, on peut associer un modèle dual montrant respectivement l'indépendance de V6, V7 et V8.

Indépendance de V9 :

Soient 1, a, b, 0 quatre éléments distincts. Soit T_9 la chaîne



dans laquelle on pose $1^* = 1^+ = 0$, $a^* = b^* = 0$, $a^+ = b^+ = 1$ et $0^* = 0^+ = 1$.

T_9 est un treillis distributif dans lequel les axiomes V1 - V8 sont vérifiés alors que l'axiome V9 ne l'est pas.

Indépendance des axiomes V1 - V8, V'9 :

Pour démontrer l'indépendance des axiomes V1 - V8, V'9, il suffit d'utiliser respectivement les ensembles $T_1 - T_9$ définis précédemment pour démontrer l'indépendance des axiomes V1 - V9.

Propriétés des AL :

Démonstration du THEOREME 8 :

. $x \in D_M$ implique $Mx = 1$. $x \preceq y$ implique $Mx \preceq My$ (propriété établie par A. Monteiro (47) dans AL). D'où $My = 1$ d'après AWT63 et par suite $y \in D_M$.

. $x \in D_M$ implique $Mx = 1$ et $y \in D_M$ implique $My = 1$. D'où $Mx \wedge My = 1 \wedge 1 = 1$ d'après AWT65. Or $Mx \wedge My = M(x \wedge y)$, (47), donc $M(x \wedge y) = 1$ et $x \wedge y \in D_M$.

. $0 \notin D_M$ car $M0 = 0 \neq 1$ (AWT74).

Démonstration du THEOREME 9 :

On vérifie facilement d'après AWT36 que F est un filtre.

Si $y \in F$ alors $x \preceq y$ donc d'après AWT64, $x \vee y = y$ et $y \in (AW) \vee x$.

Si $y \in (AW) \vee x$ alors $y = z \vee x$ avec $z \in AW$. Or d'après AWT64, $x \preceq z \vee x$ donc $x \preceq y$ et $y \in F$.

Démonstration du THEOREME 10 :

Si $y \in F$ et $y \preceq z$ alors il existe $p \preceq y$ et par suite $p \preceq z$ et $z \in F$.

Si $y \in F$ et $z \in F$ alors il existe $p \preceq y$ et $q \preceq z$. On a alors, d'après AWT32,

$p \wedge q \preceq y \wedge q$ et $q \wedge y \preceq z \wedge y$. D'où $p \wedge q \preceq z \wedge y$ et par suite $z \wedge y \in F$.

Enfin, $0 \notin F$, sinon il existerait une conjonction finie d'éléments de C égale à 0 d'après AWT63.

F est le plus petit filtre contenant C. C'est le filtre engendré par la partie compatible C. Tout filtre est une partie compatible et s'engendre lui-même.

Démonstration du THEOREME 11 :

- Si F est un filtre :

. si $x \in N(F)$ et $y \leq x$ alors $Nx \leq Ny$ (AWT9) donc $Ny \in F$ soit $y \in N(F)$.

. si $x \in N(F)$ et $y \in N(F)$ alors $Nx \wedge Ny \in F$ (F2) donc $N(Nx \wedge Ny) = x \vee y$ et $x \vee y \in N(F)$.

. $1 \notin N(F)$ car $1 = N0$ et $0 \notin F$.

- Si $N(F)$ est un idéal :

. si $x \in F$ et $x \leq y$ alors $Ny \leq Nx$ (AWT9) donc $Ny \in N(F)$ soit $y \in F$.

. si $x \in F$ et $y \in F$ alors $Nx \vee Ny \in N(F)$ (I2) donc $N(Nx \vee Ny) = x \wedge y \in F$.

. $0 \notin F$ car $1 \notin N(F)$ et $N1 = 0$.

Démonstration du THEOREME 13 :

Si U est un ultrafiltre de AW , d'après le théorème 11, $N(U)$ est un idéal de AW .

Soit I un idéal tel que $N(U) \subset I$. On a alors $U \subset N(I)$ d'où $U = N(I)$ ou $I = N(U)$

donc $N(U)$ est un idéal maximal.

La démonstration de la réciproque est analogue.

Démonstration du THEOREME 14 :

Si $F \cup \{x\}$ est incompatible il existe une conjonction finie p d'éléments de F telle que $p \wedge x = 0$.

On a donc alors, d'après le théorème 5, $p \leq NMx$. Or F est un filtre donc p appartient à F et par suite NMx appartient à F .

D'après AWT77 on a $x \wedge NMx = 0$ donc si NMx appartient à F , $F \cup \{x\}$ est incompatible.

Démonstration du THEOREME 15 :

Soit F un ultrafiltre. Soit $x \notin F$. Supposons $F \cup \{x\}$ compatible. Alors $F \cup \{x\}$ engendre un filtre F' . On a $F \cup \{x\} \subset F'$ donc $F \subsetneq F'$, ce qui est contradictoire.

On suppose que F n'est pas maximal. Il existe alors un filtre F' tel que $F \subsetneq F'$, donc il existe x tel que $x \in F'$ et $x \notin F$. On a alors $F \cup \{x\} \subset F'$ et par suite F' est incompatible, ce qui est contradictoire.

Démonstration du THEOREME 17 :

Si U est un ultrafiltre :

. D'après le théorème 16 on a $U1$.

. D'après AWT65, on a $x \wedge y \leq x$ et $x \wedge y \leq y$. U étant un filtre, on a donc $U2$.

Si on a $U1$ et $U2$:

. Soit $x \in U$ et $x \leq y$. On a alors d'après AWT65, $x \wedge y = x \in U$, donc $y \in U$ ($U2$)

. Si $x \in U$ et $y \in U$, alors $x \wedge y \in U$ d'après $U2$.

. D'après AWT63 et AWT65, on a $x \wedge 1 = x$. Donc si $x \in U$, alors $1 \in U$, d'après $U2$

et par suite $N1 = 0 \notin U$ d'après $U1$.

. U est donc un filtre et d'après le théorème 16, c'est un ultrafiltre.

Démonstration du THEOREME 18 :

Si pour tout i , $x_i \notin U$ alors d'après le théorème 16, $NMx_i \in U$ pour tout i et par suite

$NMx_1 \wedge NMx_2 \wedge \dots \wedge NMx_n \in U$. Or dans AW on a

$NMx_1 \wedge \dots \wedge NMx_n = NM(x_1 \vee \dots \vee x_n)$ donc $NM(x_1 \vee \dots \vee x_n)$ appartient à U , ce qui est

contradictoire avec l'hypothèse.

Démonstration du THEOREME 19 :

Si U est un ultrafiltre :

D'après les théorèmes 16 et 18 on a U1 et U3.

Si on a U1 et U3 :

. soit $x \in U$ et $x \leq y$. D'après AWT64, on a $x \vee y = y$ donc $y \in U$ d'après U3.

. si $x \in U$ et $y \in U$, alors $NMx \notin U$ et $NMy \notin U$ d'après U1. Donc d'après U3,

$NMx \vee NMy \notin U$. Or dans AW, $NMx \vee NMy = N(Mx \wedge My) = NM(x \wedge y)$ donc $x \wedge y \in U$.

. d'après AWT63 et AWT64 on a $x \vee 1 = 1$. D'après U3 si $x \in U$ alors $x \vee 1 \in U$ et par suite $1 \in U$. Or $NM1 = 0$ donc $0 \notin U$.

. U est donc un filtre et d'après le théorème 16, c'est un ultrafiltre.

Démonstration du THEOREME 20 :

La fonction ϕ est définie par
$$\begin{cases} \phi(x) = 1 & \text{si } x \in U \\ \phi(x) = 0 & \text{si } x \notin U \end{cases}$$

Si U est un ultrafiltre, alors $0 \notin U$ donc $\phi(0) = 0$. D'après le théorème 16. $NM0 \in U$, donc $\phi(NM0) = 1$. Or dans AW on a $NM0 = 1$ donc $\phi(1) = 1$.

D'après les théorèmes 17 et 19, on a immédiatement

$$\begin{cases} \phi(x \wedge y) = \phi(x) \wedge \phi(y) \\ \phi(x \vee y) = \phi(x) \vee \phi(y) \\ \phi(NMx) = NM\phi(x) \end{cases}$$

donc en particulier DH2.

On sait (47) que NMx est le complément booléen de Mx (autrement dit que Mx est un élément chrysippien (paragraphe 3)) c'est-à-dire que $NMx \vee Mx = 1$ et $NMx \wedge Mx = 0$. On a alors d'après ce qui précède

$$1 = \phi(1) = \phi(NMx \vee Mx) = \phi(NMx) \vee \phi(Mx) = NM\phi(x) \vee \phi(Mx) \quad (i)$$

$$0 = \phi(0) = \phi(NMx \wedge Mx) = \phi(NMx) \wedge \phi(Mx) = NM\phi(x) \wedge \phi(Mx) \quad (ii)$$

D'après (i) et AWT76 on a $MNM\phi(x) \leq \phi(Mx)$, soit d'après AWT14, $MM\phi(x) \leq \phi(Mx)$ soit encore (d'après une propriété de M établie dans (47)) $M\phi(x) \leq \phi(Mx)$.

D'après (ii) et le théorème 5 on a $\phi(Mx) \leq NMNM\phi(x)$. Or dans AW on a $MNMx = NMx$ (47) donc $\phi(Mx) \leq NNM\phi(x)$ soit encore d'après AWT14 $\phi(Mx) \leq M\phi(x)$. D'où $\phi(Mx) = M\phi(x)$.

Démonstration du THEOREME 21 :

. Soit F un filtre implicatif propre.

Si $x \leq y$ on a $x \rightarrow y = 1$ donc $x \rightarrow y \in F$ d'après F11. Par suite si $x \in F$ d'après F12, $y \in F$ et F1 est bien vérifié.

Dans AW on a $x \rightarrow (y \rightarrow x \wedge y) = 1$ (AWT78). Donc $x \rightarrow (y \rightarrow x \wedge y) \in F$ d'après F11.

Si $x \in F$ et $y \in F$ on a alors d'après F12, $x \wedge y \in F$. F2 est donc bien vérifié.

Si 0 appartenait à F, 0 étant le plus petit élément de AW, on aurait, d'après F12, $y \in F$ pour tout y de AW. Or F est propre donc $0 \notin F$.

. Il existe des filtres de AW qui ne sont pas implicatifs : l'ensemble des éléments différents de 0 de l'algèbre de Wajsberg à trois éléments W_3 (i.e. donnée par la matrice de Lukasiewicz) est un filtre mais n'est pas implicatif.

Démonstration du THEOREME 22 :

. Soit F un filtre implicatif de AW. Posons $x \equiv y (F) \Leftrightarrow (x \rightarrow y \in F \text{ et } y \rightarrow x \in F)$.

Cette relation est bien une relation d'équivalence sur AW d'après AWT3 et (AW2). De plus elle est compatible avec l'implication d'après la transitivité de l'implication dans AW. En effet, si

$x \equiv x' (F)$ et $y \equiv y' (F)$ on a

$(x \rightarrow x' \in F \text{ et } x' \rightarrow x \in F)$ et $(y \rightarrow y' \in F \text{ et } y' \rightarrow y \in F)$. D'après (AW2) et AWT24 on a $(y \rightarrow y') \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow y')) = 1 \in F$ et

$(y' \rightarrow y) \rightarrow ((x' \rightarrow y') \rightarrow (x' \rightarrow y)) = 1 \in F$ donc $(x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow y') \in F$ et

$(x' \rightarrow y') \rightarrow (x' \rightarrow y) \in F$. D'après (AW2) on a

$(x' \rightarrow x) \rightarrow ((x \rightarrow y') \rightarrow (x' \rightarrow y')) = 1 \in F$ et

$(x \rightarrow x') \rightarrow ((x' \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow y)) = 1 \in F$ donc $(x \rightarrow y') \rightarrow (x' \rightarrow y') \in F$ et

$(x' \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow y) \in F$. Or, d'après (AW2) on a

$((x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow y')) \rightarrow (((x \rightarrow y') \rightarrow (x' \rightarrow y')) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow (x' \rightarrow y'))) = 1 \in F$ et

$((x' \rightarrow y') \rightarrow (x' \rightarrow y)) \rightarrow (((x' \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow y)) \rightarrow ((x' \rightarrow y') \rightarrow (x \rightarrow y))) = 1 \in F$.

D'où finalement $(x \rightarrow y) \equiv (x' \rightarrow y') (F)$.

.. Posons $h^{-1}(1) = N$. h étant un homomorphisme d'algèbres de Wajsberg on a $h(1) = 1$ donc $1 \in N$.

Si $x \in N$ et $x \rightarrow y \in N$ on a $h(x) = 1$ et $h(x \rightarrow y) = 1$. Donc $h(x) \rightarrow h(y) = 1 \rightarrow h(y) = 1$.

Or dans AW, d'après AWT47, on a $1 \rightarrow h(y) = h(y)$ donc $y \in N$. Par suite, N est un filtre implicatif.

De plus, on a $x \equiv y (N) \Leftrightarrow h(x) = h(y)$ et N peut être appelé noyau de h .

Démonstration du THEOREME 23 :

Soit F la réunion des filtres implicatifs engendrés par une partie finie de X .

On a $1 \in F$. De plus,

si $x \in F$, il existe un filtre implicatif engendré par une partie finie de X , soit X_i tel que $X_i \vdash x$,

si $x \rightarrow y \in F$, il existe un filtre implicatif engendré par une partie finie de X , soit X_j tel que $X_j \vdash x \rightarrow y$.

On a donc $X_i, X_j \vdash x$ et $X_i, X_j \vdash x \rightarrow y$ donc, d'après FI2, $X_i, X_j \vdash y$ et par suite $y \in F$ et F est un filtre implicatif.

Démonstration du THEOREME 25 :

. $X \vdash x \rightarrow (x \rightarrow y) \Leftrightarrow X, x \vdash y$

Si $X \vdash x \rightarrow (x \rightarrow y)$ alors $X, x \vdash x \rightarrow (x \rightarrow y)$. Or $X, x \vdash x$, donc $X, x \vdash x \rightarrow y$ et par suite $X, x \vdash y$.

. $X, x \vdash y \Leftrightarrow X \vdash x \rightarrow (x \rightarrow y)$

Soit $Y = \{y/X \vdash x \rightarrow (x \rightarrow y)\}$. D'après AWT10, on a $x \rightarrow (x \rightarrow 1) = 1$ donc $1 \in Y$.

D'après AWT3 et AWT10, on a $x \rightarrow (x \rightarrow x) = x \rightarrow 1 = 1$ donc $x \in Y$.

Si $X \vdash z$ alors $z \in Y$. En effet, d'après (AW1), $z \rightarrow (x \rightarrow z) = 1$ donc $X \vdash x \rightarrow z$,

$(x \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow (x \rightarrow z)) = 1$ donc $X \vdash (x \rightarrow (x \rightarrow z))$ et $z \in Y$.

Enfin, si $y \in Y$ et $y \rightarrow z \in Y$ alors d'après AWT80, $z \in Y$. Donc Y est un filtre implicatif.

Démonstration du THEOREME 26 :

D'après le théorème 25, on a $X, x \vdash 0 \Leftrightarrow X \vdash x \rightarrow (x \rightarrow 0)$. Or dans AW on a

$x \rightarrow (x \rightarrow 0) = MNx$ d'après AWT72, AWT48 et AWT14. Donc $X, x \vdash 0 \Leftrightarrow X \vdash MNx$.

Démonstration du THEOREME 27 :

Si F, x est inconsistant, on a $F, x \vdash 0$, donc d'après le théorème 26, $F \vdash MNx$. Or F est propre par

hypothèse, donc F, MNx est consistant.

Démonstration du THEOREME 29 :

. On a $\bar{0} \neq \bar{1}$ et si W/U ne contient pas d'autre élément, il est isomorphe à W_2 .

. S'il existe x tel que $\bar{x} \neq \bar{0}$ et $\bar{x} \neq \bar{1}$, montrons que W/U est alors nécessairement de cardinal 3 et isomorphe à W_3 .

On a $\bar{x} \neq \bar{1} \Rightarrow x \notin U \Rightarrow MNx \in U$ d'après le théorème 28,

$\bar{x} \neq \bar{0} \Rightarrow Nx \notin U \Rightarrow MNNx = Mx \in U$ d'après AWT14 et le théorème 28.

Donc $Mx \in U$ et $MNx \in U$.

Or on a $Mx \in U$ et $My \in U \Rightarrow M\bar{x} = M\bar{y} (= \bar{1})$

et $MNx \in U$ et $MNy \in U \Rightarrow MN\bar{x} = MN\bar{y} (= \bar{1})$

d'où, d'après le principe de détermination de Moisil $\bar{x} = \bar{y}$.

Donc tous les éléments x tels que $\bar{x} \neq \bar{0}$ et $\bar{x} \neq \bar{1}$ sont équivalents modulo U et par suite W/U est bien de cardinal 3.

Soit $W = \{0, \alpha, 1\}$ un ensemble isomorphe à W/U . On doit avoir $N\alpha \neq 0$, $N\alpha \neq 1$ et

$NN\alpha = \alpha$ (AWT14) donc nécessairement $N\alpha = \alpha$ et par suite d'après AWT72, $\alpha \rightarrow 0 = \alpha$.

De plus d'après AWT47, on doit avoir $1 \rightarrow x = x$ quel que soit x , donc nécessairement $1 \rightarrow \alpha = \alpha$ et on a bien W isomorphe à W_3 .

Démonstration du THEOREME 30 :

Si on a $x \equiv y (U)$ pour tout U , on a aussi pour tout filtre implicatif propre F

$x \in F \Leftrightarrow y \in F$

$Mx \in F \Leftrightarrow My \in F$

c'est-à-dire $x \vdash y$ et $y \vdash x$

$Mx \vdash My$ et $My \vdash Mx$

soit encore, d'après le théorème 25 $x \rightarrow (x \rightarrow y) = 1$ et $y \rightarrow (y \rightarrow x) = 1$

$Mx \rightarrow (Mx \rightarrow My) = 1$ et $My \rightarrow (My \rightarrow Mx) = 1$

et par suite, d'après AWT80, $x = y$.

Ce théorème est vérifié en particulier pour x et 1 avec $x \neq 1$ et par suite l'intersection des ultrafiltres implicatifs de AW est l'ensemble réduit à l'élément 1 .

Théorème de complétude pour LTL :

D'après ce qui précède, on a la suite d'équivalences

$(x$ démontrable dans LTL) $\Leftrightarrow (\bar{x} = 1$ dans l'algèbre quotient $W)$ $\Leftrightarrow (\bar{x}$ appartient à tout ultrafiltre implicatif) \Leftrightarrow (pour tout $h : W \rightarrow \begin{matrix} W_2 \\ W_3 \end{matrix}$, $h(\bar{x}) = 1$) $\Leftrightarrow (\bar{x}$ est universellement valide)

soit finalement

$(x$ démontrable dans LTL) $\Leftrightarrow (x$ universellement valide)

- ANNEXE I -

Démonstrations formelles n'utilisant pas l'axiome (AW6) :

- AWT1. Si $x \leq y$ alors $(y \rightarrow z) \leq (x \rightarrow z)$ AW2.AW5.
- AWT2. Si $x \leq y$ et $y \leq z$ alors $x \leq z$ AWT1.AW5.
- AWT3. $x \leq x$
 1. $x \leq ((x \rightarrow Nx) \rightarrow x)$ exemple de AW1.
 2. (AWT3) AWT2:1,AW3.
- AWT4. $Nx \leq (x \rightarrow y)$
 1. $Nx \leq (Ny \rightarrow Nx)$ ex.AW1.
 2. (AWT4) AWT2:1,AW4.
- AWT5. $NNx \leq (y \rightarrow x)$
 1. $NNx \leq (Nx \rightarrow Ny)$ ex.AWT4.
 2. (AWT5) AWT2:1,AW4.
- AWT6. $NNx \leq x$
 1. $NNx \leq ((x \rightarrow Nx) \rightarrow x)$ ex.AWT5.
 2. (AWT6) AWT2:1,AW3.
- AWT7. Si $Nx \leq Ny$ alors $y \leq x$ AW5.hyp.AW4.
- AWT8. $x \leq NNx$
 1. $NNNx \leq Nx$ ex.AWT6.
 2. (AWT8) AWT7:1.
- AWT9. Si $x \leq y$ alors $Ny \leq Nx$
 1. $NNx \leq y$ AWT2:AWT6,hyp.
 2. $NNx \leq NNy$ AWT2:1,ex.AWT8.
 3. $Ny \leq Nx$ AWT7:2.
- AWT10. $x \leq 1$ AW5.ex.AW1.
- AWT11. $x \leq ((x \rightarrow y) \rightarrow y)$
 1. $(1 \rightarrow x) \leq ((x \rightarrow y) \rightarrow (1 \rightarrow y))$ ex.AW2.
 2. $((x \rightarrow y) \rightarrow (1 \rightarrow y)) \leq (((1 \rightarrow y) \rightarrow y) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow y))$ ex.AW2.
 3. $x \leq (1 \rightarrow x)$ ex.AW1.
 4. $x \leq (((1 \rightarrow y) \rightarrow y) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow y))$ AWT2:3,1,2.
 5. $(y \rightarrow Ny) \leq 1$ ex.AWT10.
 6. $(1 \rightarrow y) \leq ((y \rightarrow Ny) \rightarrow y)$ AWT1:5.
 7. $(1 \rightarrow y) \leq y$ AWT2:6,ex.AW3.
 8. $x \leq (1 \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow y))$ 4.7.
 9. (AWT11) AWT2:8,ex.7.
- AWT12. $(x \rightarrow (y \rightarrow z)) \leq (y \rightarrow (x \rightarrow z))$
 1. $y \leq ((y \rightarrow z) \rightarrow z)$ ex.AWT11.
 2. $((y \rightarrow z) \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z) \leq (y \rightarrow (x \rightarrow z))$ AWT1:1.
 3. $(x \rightarrow (y \rightarrow z)) \leq (((y \rightarrow z) \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z))$ ex.AW2.
 4. (AWT12) AWT2:3,2.
- AWT13. Si $y \leq z$ alors $(x \rightarrow y) \leq (x \rightarrow z)$
 1. $(x \rightarrow y) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z)) \leq (y \rightarrow z) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z))$ AWT12.
 2. $(y \rightarrow z) \leq ((x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z))$ AW5.(AW2).1.
 3. $(x \rightarrow y) \leq (x \rightarrow z)$ AW5.hyp.2.

Démonstrations formelles utilisant l'axiome (AW6) :

AWT14. $x = NNx$	AW6:AWT6.AWT8.
AWT15. $x \leq x \vee y$	AWT11.AWD1.
AWT16. $x \wedge y \leq x$	
1. $Nx \leq Nx \vee Ny$	ex.AWT15.
2. $N(Nx \vee Ny) \leq x$	AWT9:1.AWT14.
3. (AWT16)	AWD2.2.
AWT17. $y \leq x \vee y$	ex.AW1.AWD1.
AWT18. $x \wedge y \leq y$	
1. $Ny \leq Nx \vee Ny$	ex.AWT17.
2. $N(Nx \vee Ny) \leq y$	AWT9:1.AWT14.
3. (AWT18)	AWD2.2.
AWT19. Si $x \leq y$ alors $((x \rightarrow z) \rightarrow t) \leq ((y \rightarrow z) \rightarrow t)$	
1. $(y \rightarrow z) \leq (x \rightarrow z)$	AWT1.hyp.
2. $((x \rightarrow z) \rightarrow t) \leq ((y \rightarrow z) \rightarrow t)$	AWT1:1.
AWT20. Si $x \leq y$ alors $x \vee z \leq y \vee z$	ex.AWT19.AWD1.
AWT21. $x \vee x = x$	
1. $(1 \rightarrow x) \leq x$	AW5.ex.AWT11.
2. $((x \rightarrow x) \rightarrow x) \leq x$	AWT3.1.
3. $x \vee x \leq x$	AWD1.2.
4. (AWT21)	AW6:3.ex.AWT15.
AWT22. Si $x \leq y$ alors $x \vee y \leq y$	ex.AWT20.ex.AWT21.
AWT23. Si $x \leq z, (x \rightarrow y) \leq z$ et $Ny \leq z$ alors $z = 1$	
1. $Nz \leq y$	AWT9.hyp.AWT14.
2. $(x \rightarrow Nz) \leq (x \rightarrow y)$	AWT13:1.
3. $((x \rightarrow y) \rightarrow z) \leq ((x \rightarrow Nz) \rightarrow z)$	AWT1:2.
4. $(x \rightarrow Nz) \leq z$	hyp.3.AW5.
5. $(z \rightarrow Nz) \leq z$	AWT19.hyp.4.AW5.
6. $z = 1$	5.AW5.ex.AW3.
AWT24. $x \rightarrow (y \rightarrow z) = y \rightarrow (x \rightarrow z)$	AW6.AWT12.
AWT25. $x \leq (x \vee y \rightarrow y \vee x)$	
1. $x \vee y \leq (x \rightarrow y \vee x)$	ex.AWT17.AWT10.
2. (AWT25)	AWT24.1.
AWT26. $(x \rightarrow y) \leq (x \vee y \rightarrow y \vee x)$	
1. $((x \rightarrow y) \rightarrow y) \leq ((x \rightarrow y) \rightarrow ((y \rightarrow x) \rightarrow x))$	AWT13.ex.AWT11.
2. (AWT26)	AWT24.1.AWD1.
AWT27. $Ny \leq (x \vee y \rightarrow y \vee x)$	
1. $((x \rightarrow y) \rightarrow y) \leq (Nx \rightarrow NNy)$	AWT1:AWT4.AWT14.
2. $((x \rightarrow y) \rightarrow y) \leq (Ny \rightarrow x)$	AWT2:1.ex.AW4.
3. $Ny \leq (x \vee y \rightarrow x)$	AWT24.2.AWD1.
4. $(y \rightarrow x) \leq (Ny \rightarrow (x \vee y \rightarrow x))$	AWT10.3.
5. (AWT27)	AWT24.4.AWD1.
AWT28. $x \vee y = y \vee x$	AWT23:AWT25.AWT26.AWT27.AW6.
AWT29. Si $x \leq z$ et $y \leq z$ alors $x \vee y \leq z$	
1. $x \vee y \leq y \vee z$	AWT20.hyp.AWT28.
2. $y \vee z \leq z$	AWT22.hyp.
3. $x \vee y \leq z$	AWT2:1,2.
AWT30. $(x \rightarrow y) \leq (Ny \rightarrow Nx)$	ex.AW4.AWT14.
AWT31. $x \rightarrow y = Ny \rightarrow Nx$	AW6:AW4.AWT30.

- AWT32. Si $x \leq y$ alors $x \wedge z \leq y \wedge z$
1. $Ny \leq Nx$ AWT31.hyp.
 2. $Ny \vee Nz \leq Nx \vee Nz$ AWT20:1.
 3. $N(Nx \vee Nz) \leq N(Ny \vee Nz)$ AWT31:2.
 4. $x \wedge z \leq y \wedge z$ AWD2.3.
- AWT33. $x \wedge x = x$ ex.AWT21.AWD2.AWT14.
- AWT34. Si $x \leq y$ alors $x \leq y \wedge x$ ex.AWT32.AWT33.
- AWT35. $x \wedge y = y \wedge x$ ex.AWT28.AWD2.
- AWT36. Si $x \leq y$ et $x \leq z$ alors $x \leq y \wedge z$
1. $x \wedge z \leq y \wedge z$ AWT32.hyp.
 2. $x \leq x \wedge z$ AWT34.hyp.AWT35.
 3. $x \leq y \wedge z$ AWT2:2,1.
- AWT37. $(z \wedge x) \vee (y \wedge x) \leq x \wedge (y \vee z)$
1. $(z \wedge x) \vee (y \wedge x) \leq x$ AWT29:ex.AWT18.
 2. $z \wedge x \leq y \vee z$ AWT2:ex.AWT16.AWT17.
 3. $y \wedge x \leq y \vee z$ AWT2:ex.AWT16.AWT15.
 4. $(z \wedge x) \vee (y \wedge x) \leq y \vee z$ AWT29:2,3.
 5. (AWT37) AWT36:1,4.
- AWT38. Si $x \leq (y \rightarrow z)$ alors $x \wedge y \leq (y \rightarrow z)$ AWT2:AWT16.hyp.
- AWT39. Si $x \wedge y \leq z$ alors $x \leq (y \rightarrow z)$
1. $N(Nx \vee Ny) \leq z$ AWD2.hyp.
 2. $Nz \leq ((Nx \rightarrow Ny) \rightarrow Ny)$ AWT31.1.AWT14.AWD1.
 3. $(Nx \rightarrow Ny) \leq (Nz \rightarrow Ny)$ 2.AWT24.
 4. $(y \rightarrow x) \leq (y \rightarrow z)$ AWT31.3.
 5. $x \leq (y \rightarrow z)$ AWT2:AW1.4.
- AWT40. $x \leq (x \wedge (y \vee z) \rightarrow (z \wedge x) \vee (y \wedge x))$
1. $y \leq (x \rightarrow (z \wedge x) \vee (y \wedge x))$ AWT39:ex.AWT17.
 2. $z \leq (x \rightarrow (z \wedge x) \vee (y \wedge x))$ AWT39:ex.AWT15.
 3. $y \vee z \leq (x \rightarrow (z \wedge x) \vee (y \wedge x))$ AWT29:1,2.
 4. $(y \vee z) \wedge x \leq (x \rightarrow (z \wedge x) \vee (y \wedge x))$ AWT38:3.
 5. (AWT40) AWT24.4.AWT35.
- AWT41. $(x \rightarrow z) \leq (x \wedge (y \vee z) \rightarrow (z \wedge x) \vee (y \wedge x))$
1. $((x \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow y) \vee Nx) \leq ((x \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow y) \vee Nx)$ ex.AWT3.
 2. $(x \rightarrow z) \leq (((x \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow y) \vee Nx) \rightarrow ((x \rightarrow y \vee z) \rightarrow (x \rightarrow y) \vee Nx))$ AWT10.1.AWT24.
 3. $(x \rightarrow z) \leq (((x \rightarrow y) \rightarrow Nx) \rightarrow ((x \rightarrow z) \rightarrow Nx) \rightarrow (((x \rightarrow y) \rightarrow Nx) \rightarrow ((x \rightarrow y \vee z) \rightarrow Nx)))$ AWD1.2.AWT24.
 4. $(x \rightarrow z) \leq ((Ny \vee Nx \rightarrow Nz \vee Nx) \rightarrow (Ny \vee Nx \rightarrow N(y \vee z) \vee Nx))$ AWT31.3.AWD1.
 5. $(x \rightarrow z) \leq ((z \wedge x \rightarrow y \wedge x) \rightarrow ((y \vee z) \wedge x \rightarrow y \wedge x))$ AWT31.4.AWD2.
 6. (AWT41) AWT24.5.AWT35.AWD1.
- AWT42. $Nz \leq (x \wedge (y \vee z) \rightarrow (z \wedge x) \vee (y \wedge x))$
1. $(Ny \rightarrow N(y \vee z)) \leq (N(y \vee z) \rightarrow Nx) \rightarrow (Ny \rightarrow Nx)$ ex.AW2.
 2. $((N(y \vee z) \rightarrow Nx) \rightarrow (Ny \rightarrow Nx)) \leq (((Ny \rightarrow Nx) \rightarrow Nx) \rightarrow ((N(y \vee z) \rightarrow Nx) \rightarrow Nx))$ ex.AW2.
 3. $(y \vee z \rightarrow y) \leq (Ny \vee Nx \rightarrow N(y \vee z) \vee Nx)$ AWT2:1,2.AWT31.AWD1.
 4. $(y \vee z \rightarrow y) \leq (x \wedge (y \vee z) \rightarrow y \wedge x)$ AWT31.3.AWD2.AWT35.

5. $((z \rightarrow y) \rightarrow y) \rightarrow y \cong (x \wedge (y \vee z) \rightarrow y \wedge x)$ AWT28.4.AWD1.
 6. $(z \rightarrow y) \cong (((z \rightarrow y) \rightarrow y) \rightarrow y)$ ex.AWT3.AWT24.
 7. $(z \rightarrow y) \cong (x \wedge (y \vee z) \rightarrow y \wedge x)$ AWT2:6,5.
 8. $(z \rightarrow y) \cong (x \wedge (y \vee z) \rightarrow (z \wedge x) \vee (y \wedge x))$ AWT10.7.AWT24.AWD1.
 9. (AWT42) AWT2:ex.AWT4.8.
- AWT43. $x \wedge (y \vee z) \cong (z \wedge x) \vee (y \wedge x)$ AWT23:AWT40.AWT41.AWT42.
 AWT44. $x \wedge (y \vee z) = (z \wedge x) \vee (y \wedge x)$ AW6:AWT37.AWT43.
 AWT45. $x \cong x \wedge (x \vee y)$ AWT36:AWT3.AWT15
 AWT46. $x \wedge (x \vee y) = x$ AW6:AWT45.ex.AWT16.
 AWT47. $1 \rightarrow x = x$
 1. $(1 \rightarrow x) \cong x$ AW5:ex.AWT11.
 2. (AWT47) AW6:1.ex.AW1.
- AWT48. $Mx = Nx \rightarrow x$
 1. $Mx = Nx \rightarrow (1 \rightarrow x)$ AWD3.AWT31.
 2. (AWT48) AWT47.1.
- AWT49. $Nx \vee Mx = 1$
 1. $((Nx \rightarrow x) \rightarrow Nx) \cong Nx$ ex.AW3.AWT14.
 2. (AWT49) AWT48.AWD1.AWT28.
- AWT50. $x \cong Mx$ ex.AW1.AWT48.
 AWT51. $x \wedge Nx \cong Nx \wedge Mx$ AWT32:AWT50.AWT35.
- AWT52. $Nx \wedge Mx \cong x$
 1. $(Mx \rightarrow Nx) \cong Nx$ AWT49.AWT28.AWD1.
 2. $(Mx \rightarrow Nx) \cong Nx \vee x$ AWT2:1.ex.AWT15.
 3. $(Mx \rightarrow Nx) \cong (Mx \rightarrow x)$ AWD1.2.AWT48.
 4. $(x \rightarrow NMx) \cong (Nx \rightarrow NMx)$ AWT31.3.AWT14.
 5. $Nx \cong x \vee NMx$ AWT24.4.AWD1.
 6. $N(x \vee NMx) \cong x$ AWT31.5.AWT14.
 7. (AWT52) AWD2.6.AWT14.
- AWT53. $Nx \wedge Mx \cong x \wedge Nx$ AWT36:AWT52.ex.AWT16.
 AWT54. $Nx \wedge Mx = x \wedge Nx$ AW6:AWT51.AWT53.
- AWT55. $x \wedge Nx \cong (x \wedge Nx) \wedge (y \vee Ny)$
 1. $Nx \cong (x \rightarrow y \vee Ny)$ ex.AWT4.
 2. $x \cong (x \wedge Nx \rightarrow y \vee Ny)$ AWT38.1.AWT24.AWT35.
 3. $x \wedge Nx \cong (Ny \rightarrow y \vee Ny)$ AWT10.ex.AWT17.
 4. $Ny \cong (x \wedge Nx \rightarrow y \vee Ny)$ AWT24:3.
 5. $(x \rightarrow y) \cong (x \wedge Nx \rightarrow y)$ AWT1:ex.AWT16.
 6. $(x \wedge Nx \rightarrow y) \cong (x \wedge Nx \rightarrow y \vee Ny)$ AWT13:ex.AWT15.
 7. $(x \rightarrow y) \cong (x \wedge Nx \rightarrow y \vee Ny)$ AWT2:5,6.
 8. $x \wedge Nx \cong y \vee Ny$ AWT23:2,7,4.
 9. (AWT55) AWT34:8.AWT35.
- AWT56. $x \wedge Nx = (x \wedge Nx) \wedge (y \vee Ny)$ AW6:AWT55.ex.AWT16.
 AWT57. $N(x \wedge y) = Nx \vee Ny$ AWD2.AWT14.
 AWT58. $(NMx \rightarrow Mx) \cong Mx$
 1. $(Nx \rightarrow (N(Nx \rightarrow x) \rightarrow NNx)) \cong (Nx \rightarrow (Nx \rightarrow (Nx \rightarrow x)))$ AWT13:ex.AW4.
 2. $(N(Nx \rightarrow x) \rightarrow (Nx \rightarrow x)) \cong (Nx \rightarrow (Nx \rightarrow (Nx \rightarrow x)))$ AWT24.1.AWT14.
 3. $(NMx \rightarrow Mx) \cong (Nx \rightarrow (Nx \rightarrow Mx))$ AWT48.2.

4. $((N_x \rightarrow M_x) \rightarrow N_x) \cong (M_x \rightarrow N_x)$ AWT1:ex.AW1.
 5. $((M_x \rightarrow N_x) \rightarrow N_x) \cong (((N_x \rightarrow M_x) \rightarrow N_x) \rightarrow N_x)$ AWT1:4.
 6. $((N_x \rightarrow M_x) \rightarrow N_x) \cong N_x$ 5.AWD1.AWT28.AWT49.AW5.
 7. $(N_x \rightarrow (N_x \rightarrow M_x)) \cong (N_x \rightarrow M_x)$ 6.AWD1.AWT28.AWD1.
 8. $(N_x \rightarrow M_x) \cong M_x$ AWT49.AWD1.
 9. (AWT58) AWT2:3,7,8.
- AWT59. $(x \rightarrow y) \cong My \vee Nx$
 1. $(NMy \rightarrow Nx) \cong ((N_x \rightarrow My) \rightarrow (NMy \rightarrow My))$ ex.AW2.
 2. $((N_x \rightarrow My) \rightarrow (NMy \rightarrow My)) \cong ((N_x \rightarrow My) \rightarrow My)$ AWT13.ex.AWT58.
 3. $(NMy \rightarrow Nx) \cong Nx \vee My$ AWT2:1,2.AWD1.
 4. $(x \rightarrow My) \cong Nx \vee My$ AWT31.3.
 5. $(x \rightarrow y) \cong (x \rightarrow My)$ AWT13.ex.AWT50.
 6. (AWT59) AWT2:5,4.AWT28.
- AWT60. $(x \rightarrow y) \cong (MN_x \vee y) \wedge (My \vee Nx)$
 1. $(x \rightarrow y) \cong ((y \rightarrow MN_x) \rightarrow (x \rightarrow MN_x))$ ex.AW2.
 2. $((y \rightarrow MN_x) \rightarrow (x \rightarrow MN_x)) \cong (((x \rightarrow MN_x) \rightarrow MN_x) \rightarrow ((y \rightarrow MN_x) \rightarrow MN_x))$ ex.AW2.
 3. $(x \rightarrow y) \cong (x \vee MN_x \rightarrow y \vee MN_x)$ AWT2:1,2.AWD1.
 4. $(x \rightarrow y) \cong MN_x \vee y$ ex.AWT49.AWT14.3.AWT47.AWT28.
 5. (AWT60) AWT36:4.AWT59.
- AWT61. $(MN_x \vee y) \wedge (My \vee Nx) \cong (x \rightarrow y)$
 1. $y \vee MN_x \cong (Ny \rightarrow MN_x)$ AWT1:ex.AWT4.AWD1.
 2. $(MN_x \vee y) \wedge (My \vee Nx) \cong (Ny \rightarrow MN_x)$ AWT2:ex.AWT16.AWT28.AWD1.AWT1.ex.AWT4.
 3. $(MN_x \vee y) \wedge (My \vee Nx) \cong (Ny \rightarrow (x \rightarrow Nx))$ AWT48.2.AWT14.
 4. $(MN_x \vee y) \wedge (My \vee Nx) \cong (x \rightarrow (x \rightarrow y))$ AWT24.3.AWT31.
 5. $x \cong ((MN_x \vee y) \wedge (My \vee Nx) \rightarrow (x \rightarrow y))$ AWT24.4.
 6. $(MN_x \vee y) \wedge (My \vee Nx) \cong ((x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow y))$ ex.AWT3.AWT10.
 7. $(x \rightarrow y) \cong ((MN_x \vee y) \wedge (My \vee Nx) \rightarrow (x \rightarrow y))$ AWT24.6.
 8. $Nx \vee My \cong (x \rightarrow My)$ AWT1:ex.AWT4.AWT14.
 9. $(MN_x \vee y) \wedge (My \vee Nx) \cong (x \rightarrow My)$ AWT2:ex.AWT18.AWT28.AWD1.AWT1.ex.AWT4.
 10. $(MN_x \vee y) \wedge (My \vee Nx) \cong (x \rightarrow (Ny \rightarrow y))$ AWT48.9.
 11. $Ny \cong ((MN_x \vee y) \wedge (My \vee Nx) \rightarrow (x \rightarrow y))$ AWT24.10.
 12. (AWT61) AWT23:5,7,11.
- AWT62. $x \rightarrow y = (MN_x \vee y) \wedge (My \vee Nx)$ AW6:AWT60.AWT61.
- AWT63. 1 (resp. N1) est le plus grand (resp. le plus petit) élément de AW.
 1. $x \cong 1$ AWT10.
 2. $Nx \cong 1$ ex.AWT10.
 3. $N1 \cong x$ 2.AWT9.AWT14.
- AWT64. $x \vee y = \text{Sup}(x,y)$ AWT15.AWT17.AWT29.
- AWT65. $x \wedge y = \text{Inf}(x,y)$ AWT16.AWT18.AWT36.
- AWT66. $MM_x = M_x$ (propriété établie dans AL par A. Monteiro (47))
- AWT67. $(M_x \rightarrow (x \rightarrow y)) \rightarrow (x \rightarrow y) = 1$
 1. $NM_x \cong (M_x \rightarrow y)$ AWT4.
 2. $(M_x \rightarrow y) \cong (x \rightarrow y)$ AWT50.AWT1.
 3. $NM_x \cong (x \rightarrow y)$ AWT2.1.2.
 4. $NM_x \vee M_x \cong (x \rightarrow y) \vee M_x$ AWT20.3.
 5. $NM_x \vee M_x = 1$ AWT49.AWT66.
 6. $(x \rightarrow y) \vee M_x = 1$ 4.AWT63.

7. $(Mx \rightarrow (x \rightarrow y)) \rightarrow (x \rightarrow y) = 1$ AWT28.6.AWD1.
- AWT68. $M(x \vee y) = Mx \vee My$ (propriété établie dans AL par A. Monteiro (47))
- AWT69. $M((x \rightarrow (x \rightarrow y)) \rightarrow (x \rightarrow y)) = 1$
1. $(x \rightarrow y) \leq M(x \rightarrow y)$ ex.AWT50.
 2. $Nx \leq M(x \rightarrow y)$ AWT2:AWT4.1.
 3. $NMx \leq Nx$ AWT50.AWT9.
 4. $NMx \leq M(x \rightarrow y)$ AWT2:3,2.
 5. $NMx \vee Mx \leq M(x \rightarrow y) \vee Mx$ AWT20.4.
 6. $M(x \rightarrow y) \vee Mx = 1$ AWT49.AWT66.5.AWT63.
 7. $M((x \rightarrow y) \vee x) = 1$ AWT68.6.
 8. $M((x \rightarrow (x \rightarrow y)) \rightarrow (x \rightarrow y)) = 1$ AWT28.7.AWD1.
- AWT70. $(MNx \vee y) \wedge (My \vee Nx) = (Nx \vee y) \vee (MNx \wedge My)$
1. $(MNx \vee y) \wedge (My \vee Nx) = (Nx \wedge (MNx \vee y)) \vee (My \wedge (MNx \vee y)) =$
 $((y \wedge Nx) \vee (MNx \wedge Nx)) \vee ((y \wedge My) \vee (MNx \wedge My))$ ex.AWT44.Distr.
 2. $MNx \wedge Nx = Nx$ ex.AWT50.AWT65.
 3. $y \wedge My = y$ ex.AWT50.AWT65.
 4. $(MNx \vee y) \wedge (My \vee Nx) = ((y \wedge Nx) \vee Nx) \vee (y \vee (MNx \wedge My))$ 1.2.3.
 5. $((y \wedge Nx) \vee Nx) \vee (y \vee (MNx \wedge My)) = (y \wedge Nx) \vee (Nx \vee y) \vee (MNx \wedge My)$
associativité de \vee
AWT64.AWT65.
 6. $(y \wedge Nx) \vee (Nx \vee y) = Nx \vee y$ 4.5.6.
 7. $(MNx \vee y) \wedge (My \vee Nx) = (Nx \vee y) \vee (MNx \wedge My)$
- AWT71. $0 \rightarrow x = 1$ d'après AWT63.
- AWT72. $x \rightarrow 0 = Nx$
1. $1 \rightarrow Nx = Nx$ AWT47.
 2. $x \rightarrow N1 = Nx$ 1.AWT31.AWT14.
- AWT73. $x \rightarrow y = 0$ si et seulement si $x = 1$ et $y = 0$
1. $(x \rightarrow y) \rightarrow 0 = 1$ AWT3.hyp.
 2. $(y \rightarrow (x \rightarrow y)) \leq (((x \rightarrow y) \rightarrow 0) \rightarrow (y \rightarrow 0))$ ex.AW2.
 3. $((x \rightarrow y) \rightarrow 0) \leq (y \rightarrow 0)$ ex.AW1.2.AWT63.
 4. $y \rightarrow 0 = 1$ 1.3.AWT63.
 5. $Ny = 1$ 4.ex.AWT72.
 6. $y = 0$ 5.AWT14.
 7. $Nx = 0$ 6.hyp.AWT72.
 8. $x = 1$ 7.AWT14.
 9. $1 \rightarrow 0 = 0$ AWT72.AWT14.
- AWT74. $Mx = 0$ si et seulement si $x = 0$ AWT48.AWT73.
- AWT75. Si $Nx \vee Ny = 1$ alors $Mx \leq Ny$
1. $(Nx \rightarrow Ny) \leq Ny$ hyp.AWD1.
 2. $x \leq (Nx \rightarrow Ny)$ ex.AWT4.AWT14.
 3. $x \leq Ny$ AWT2:2.1.
 4. $(Nx \rightarrow x) \leq (Nx \rightarrow Ny)$ AWT13.3.
 5. $(Nx \rightarrow x) \leq Ny$ AWT2.4.1.
 6. $Mx \leq Ny$ AWT48.5.
- AWT76. Si $x \vee y = 1$ alors $MNx \leq y$
1. $NNx \vee NNy = 1$ hyp.AWT14.
 2. $MNx \leq NNy$ AWT75.1.

3. $MN_x \leq y$ AWT14.2.
- AWT77. $x \wedge NM_x = 0$
1. $Nx \vee NNM_x = 1$ ex.AWT49.
 2. $N(x \wedge NM_x) = 1$ AWT57.1.
 3. (AWT77) 2.AWT14.
- AWT78. $x \rightarrow (y \rightarrow x \wedge y) = 1$
1. $((y \rightarrow x) \rightarrow Ny) \rightarrow (x \rightarrow Ny) = 1$ (AW1).ex.(AW2).(AW5).
 2. $x \rightarrow (((y \rightarrow x) \rightarrow Ny) \rightarrow Ny) = 1$ 1.AWT24.
 3. $x \rightarrow (((Nx \rightarrow Ny) \rightarrow Ny) \rightarrow Ny) = 1$ 2.AWT31.
 4. $x \rightarrow (y \rightarrow x \wedge y) = 1$ 3.AWT31.AWT14.
- AWT79. $(x \rightarrow (x \rightarrow (x \rightarrow y))) \leq (x \rightarrow (x \rightarrow y))$
1. $((x \rightarrow (x \rightarrow y)) \rightarrow x) \rightarrow x = 1$ d'après WT16 (2)
 2. $(x \rightarrow (x \rightarrow y)) \vee x = 1 = (x \rightarrow (x \rightarrow (x \rightarrow y))) \rightarrow (x \rightarrow (x \rightarrow y))$ AWD1.1.AWT28.
- AWT80. $(x \rightarrow (x \rightarrow (y \rightarrow z))) \rightarrow ((x \rightarrow (x \rightarrow y)) \rightarrow (x \rightarrow (x \rightarrow z))) = 1$
1. $y \leq y \vee (x \rightarrow (x \rightarrow z))$ AWT15.
 2. $(x \rightarrow y) \leq (x \rightarrow y \vee (x \rightarrow (x \rightarrow z)))$ AWT13.1.
 3. $(x \rightarrow (x \rightarrow y)) \leq (x \rightarrow (x \rightarrow y \vee (x \rightarrow (x \rightarrow z))))$ AWT13.2.
 4. $(x \rightarrow (x \rightarrow y)) \leq (x \rightarrow (x \rightarrow ((y \rightarrow (x \rightarrow (x \rightarrow z))) \rightarrow (x \rightarrow (x \rightarrow z))))$ 3.AWD1.
 5. $(x \rightarrow (x \rightarrow y)) \leq ((y \rightarrow (x \rightarrow (x \rightarrow z))) \rightarrow (x \rightarrow (x \rightarrow (x \rightarrow (x \rightarrow z))))$ 4.AWT24.
 6. $(x \rightarrow (x \rightarrow (x \rightarrow (x \rightarrow z)))) \leq (x \rightarrow (x \rightarrow (x \rightarrow z))) \leq (x \rightarrow (x \rightarrow z))$
AWT13.ex.AWT79.
 7. $((y \rightarrow (x \rightarrow (x \rightarrow z))) \rightarrow (x \rightarrow (x \rightarrow (x \rightarrow (x \rightarrow z)))) \leq ((y \rightarrow (x \rightarrow (x \rightarrow z))) \rightarrow (x \rightarrow (x \rightarrow z)))$ AWT13.6.
 8. $(x \rightarrow (x \rightarrow y)) \leq ((y \rightarrow (x \rightarrow (x \rightarrow z))) \rightarrow (x \rightarrow (x \rightarrow z)))$ AWT2.5.7.
 9. $(x \rightarrow (x \rightarrow (y \rightarrow z))) \leq ((x \rightarrow (x \rightarrow y)) \rightarrow (x \rightarrow (x \rightarrow z)))$ AWT24.8.
- AWT81. Si $x \leq x \rightarrow y$ et $M_x \leq M_x \rightarrow M_y$ alors $x \leq y$
1. $(x \rightarrow y) \leq (x \rightarrow y)$ AWT3.
 2. $N_x \leq (x \rightarrow M_y)$ AWT4.
 3. $x \leq (M_x \rightarrow M_y)$ AWT2.AWT50.hyp.
 4. $M_x \leq (x \rightarrow M_y)$ 3.AWT24.
 5. $(N_x \rightarrow x) \leq (x \rightarrow M_y)$ 4.AWT48.
 6. $x \rightarrow M_y = 1$ AWT23.2.5.
 7. $N_y \leq (x \rightarrow y)$ 6.AWT48.AWT24.
 8. $x \rightarrow y = 1$ AWT23.hyp.1.7.

- ANNEXE II -

Matrices d'indépendance :

Pour toutes les matrices M_n ($n = 1, \dots, 15$), 1 est la seule valeur désignée. Dans toutes les démonstrations d'indépendance utilisant ces matrices M_n nous avons désigné, pour simplifier, par M_{n_i} ($i = 1, \dots, 5$) la matrice obtenue à partir de la matrice M_n en ne conservant que les tableaux définissant les i connecteurs primitifs envisagés.

Matrice M1 :

→	1 0
1	1 0
0	0 1

	N	M
1	1	1
0	0	1

Matrice M2 :

→	1 2 u 0
1	1 u u 0
2	1 1 1 0
u	1 1 1 1
0	1 1 1 1

	N	M
1	0	1
2	2	1
u	2	1
0	1	0

∨	1 2 u 0
1	1 1 1 1
2	1 2 u 2
u	1 u u u
0	1 2 u 0

∧	1 2 u 0
1	1 2 u 0
2	2 2 u 0
u	u u u 0
0	0 0 0 0

Matrice M3 :

→	1 2 0
1	1 2 2
2	1 1 2
0	1 1 2

	N	M
1	0	1
2	0	1
0	0	2

∨	1 2 0
1	1 1 1
2	1 2 2
0	1 2 2

Matrice M4 :

→	1 0
1	1 0
0	1 1

	N	M
1	1	1
0	0	1

∨	1 0
1	1 1
0	1 0

∧	1 0
1	1 0
0	0 0

Matrice M5 :

→	1 0
1	1 0
0	1 1

	N	M
1	0	1
0	1	1

∨	1 0
1	1 1
0	1 0

∧	1 0
1	1 0
0	0 0

Matrice M6 :

→	1 0
1	1 0
0	1 1

	N	M
1	0	0
0	1	0

∨	1 0
1	1 1
0	1 0

∧	1 0
1	1 0
0	0 0

Matrice M14 :

\rightarrow	1	0
1	1	0
0	1	1

	N	M
1	0	1
0	1	0

\vee	1	0
1	1	1
0	1	0

\wedge	1	0
1	1	1
0	0	0

Matrice M15 :

\rightarrow	1	0
1	1	0
0	1	1

	N	M
1	0	1
0	1	0

\vee	1	0
1	1	1
0	1	0

\wedge	1	0
1	0	0
0	0	0

- ANNEXE III -

Nous utiliserons les théorèmes et métathéorèmes établis dans (2).

Démonstrations formelles à partir du système β .

$\beta T1.$ $x \vee y \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow y)$

1. $(x \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow y)) \rightarrow ((y \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow y)) \rightarrow (x \vee y \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow y)))$ ex. $\beta 9$.

2. $(\beta T1)$

WR1.WT4.ex. $\beta 1.1$.

$\beta R1.$ $\frac{x \rightarrow y}{((x \rightarrow z) \rightarrow z) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow z)}$

ex.WR5.

$\beta R2.$ $\frac{x \rightarrow y}{((x \rightarrow y) \rightarrow y) \rightarrow y}$

1. $x \rightarrow x$

2. $((x \rightarrow y) \rightarrow y) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow y)$

3. $(x \rightarrow y) \rightarrow (((x \rightarrow y) \rightarrow y) \rightarrow y)$

4. $((x \rightarrow y) \rightarrow y) \rightarrow y$

WR4:WT14.WT13.

ex.1.

WR9.2.

WR1:hyp.3.

$\beta R3.$ $\frac{x \rightarrow z, y \rightarrow z}{((x \rightarrow y) \rightarrow y) \rightarrow z}$

1. $((x \rightarrow y) \rightarrow y) \rightarrow ((z \rightarrow y) \rightarrow y)$

2. $((z \rightarrow y) \rightarrow y) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow z)$

3. $((y \rightarrow z) \rightarrow z) \rightarrow z$

4. $((x \rightarrow y) \rightarrow y) \rightarrow z$

$\beta R1$.hyp.

ex.WT19.

$\beta R2$.hyp.

WR4:1,2,3.

$\beta T2.$ $((x \rightarrow y) \rightarrow y) \rightarrow x \vee y$

$\beta R3$: $\beta 7, \beta 8$.

Démonstrations formelles à partir du système δ .

$\delta T1.$ $N((Nx \rightarrow Ny) \rightarrow Ny) \rightarrow x \wedge y$

1. $Nx \rightarrow ((Nx \rightarrow Ny) \rightarrow Ny)$

2. $Ny \rightarrow ((Nx \rightarrow Ny) \rightarrow Ny)$

3. $N((Nx \rightarrow Ny) \rightarrow Ny) \rightarrow x$

4. $N((Nx \rightarrow Ny) \rightarrow Ny) \rightarrow y$

5. $(\delta T1)$

ex.WT4.

ex. $\delta 1$.

WMT3.1.WMT2.

WMT3.2.WMT2.

WR1.ex. $\delta 9.3.4$.

$\delta R1.$ $\frac{x \rightarrow z, y \rightarrow z}{((x \rightarrow y) \rightarrow y) \rightarrow z}$

démonstration identique à celle de $\beta R3$.

$\delta T2.$ $x \wedge y \rightarrow N((Nx \rightarrow Ny) \rightarrow Ny)$

1. $Nx \rightarrow N(x \wedge y)$

2. $Ny \rightarrow N(x \wedge y)$

3. $((Nx \rightarrow Ny) \rightarrow Ny) \rightarrow N(x \wedge y)$

4. $(\delta T2)$

WMT3. $\delta 7$.

WMT3. $\delta 8$.

$\delta R1.1.2$.

WMT3.3.WMT2.

Démonstrations formelles à partir du système ζ .

$\zeta T1.$ $N(Nx \vee Ny) \rightarrow x \wedge y$

1. $Nx \rightarrow Nx \vee Ny$

2. $N(Nx \vee Ny) \rightarrow x$

3. $Ny \rightarrow Nx \vee Ny$

4. $N(Nx \vee Ny) \rightarrow y$

ex. $\zeta 7$.

WR12.1.WMT2.

ex. $\zeta 8$.

WR12.3.WMT2.

5. ($\zeta T1$) WR1.2.4.ex. $\zeta 12$.
- $\zeta T2.$ $x \wedge y \rightarrow N(Nx \vee Ny)$ WR12. $\zeta 10$.
 1. $Nx \rightarrow N(x \wedge y)$ WR12. $\zeta 11$.
 2. $Ny \rightarrow N(x \wedge y)$ WR1.1.2.ex. $\zeta 9$.
 3. $Nx \vee Ny \rightarrow N(x \wedge y)$ WR12.3.WMT2.
 4. ($\zeta T2$)

Démonstrations formelles à partir du système θ .

- $\theta T1.$ $N(Nx \vee Ny) \rightarrow x \wedge y$ ex. $\theta 7$.
 1. $Nx \rightarrow Nx \vee Ny$ WR12.1.WMT2.
 2. $N(Nx \vee Ny) \rightarrow x$ ex. $\theta 8$.
 3. $Ny \rightarrow Nx \vee Ny$ WR12.3.WMT2.
 4. $N(Nx \vee Ny) \rightarrow y$ WR1.2.4.ex. $\theta 10$.
 5. ($\theta T1$)
- $\theta T2.$ $x \vee y \rightarrow N(Nx \wedge Ny)$ ex. $\theta 9$.WR12.1.WMT2.
- $\theta T3.$ $N(Nx \vee Ny) \rightarrow x \vee y$ ex. $\theta T1$.WR12.1.WMT2.
- $\theta T4.$ $(x \rightarrow z) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow (x \vee y \rightarrow z))$
 1. $(Nz \rightarrow Nx) \rightarrow ((Nz \rightarrow Ny) \rightarrow (Nz \rightarrow Nx \wedge Ny))$ ex. $\theta 10$.
 2. $(x \rightarrow z) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow (N(Nx \wedge Ny) \rightarrow z))$ WMT3.1.WMT2.
 3. ($\theta T4$) WMT1. $\theta T2$. $\theta T3$.2.

Démonstrations formelles à partir du système ι .

- $\iota T1.$ $x \rightarrow x \vee y$ WR4.WT4. $\iota 7$.
- $\iota T2.$ $y \rightarrow x \vee y$ WR4.ex. $\iota 1$. $\iota 7$.

Démonstrations formelles à partir du système χ .

- $\chi R3.$ $\frac{x \rightarrow y, y \rightarrow z}{x \rightarrow z}$ $\chi R1$.hyp. $\chi 4$.
- $\chi R4.$ $\frac{x \rightarrow z, y \rightarrow z}{x \vee y \rightarrow z}$ $\chi R1$.hyp. $\chi 7$.
- $\chi R5.$ $\frac{x \rightarrow y, x \rightarrow z}{x \rightarrow y \wedge z}$ $\chi R1$.hyp. $\chi 10$.
- $\chi T1.$ $x \rightarrow (y \rightarrow x)$ ex. $\chi 5$.
 1. $Mx \rightarrow Mx \vee Ny$ $\chi R3$. $\chi 1.1$.
 2. $x \rightarrow Mx \vee Ny$ ex. $\chi 6$.
 3. $x \rightarrow MNy \vee x$ $\chi R5$.3.2.
 4. $x \rightarrow (MNy \vee x) \wedge (Mx \vee Ny)$ 4.D5.
 5. ($\chi T1$)
- $\chi R6.$ $\frac{x \rightarrow y}{x \wedge z \rightarrow y \wedge z}$ ex. $\chi 8$.
 1. $x \wedge z \rightarrow x$ $\chi R3$.1.hyp.
 2. $x \wedge z \rightarrow y$ ex. $\chi 9$.
 3. $x \wedge z \rightarrow z$ $\chi R5$.2.3.
 4. $x \wedge z \rightarrow y \wedge z$

$\chi T2.$ $x \wedge y \rightarrow y \wedge x$	$\chi R5.\chi9.\chi8.$
$\chi R7.$ $\frac{x \rightarrow y, z \rightarrow t}{x \wedge z \rightarrow t \wedge y}$	
1. $x \wedge z \rightarrow y \wedge z$	$\chi R6.hyp.$
2. $z \wedge y \rightarrow t \wedge y$	$\chi R6.hyp.$
3. $y \wedge z \rightarrow t \wedge y$	$\chi R3.ex.\chi T2.2.$
4. $x \wedge z \rightarrow t \wedge y$	$\chi R3.1.3.$
$\chi T3.$ $(Nx \rightarrow Ny) \rightarrow (y \rightarrow x)$	
1. $MNNx \rightarrow Mx$	$\chi R2.\chi2.$
2. $Mx \rightarrow Mx \vee Ny$	$ex.\chi5.$
3. $MNNx \rightarrow Mx \vee Ny$	$\chi R3.1.2.$
4. $Ny \rightarrow Mx \vee Ny$	$ex.\chi6.$
5. $MNNx \vee Ny \rightarrow Mx \vee Ny$	$\chi R4.3.4.$
6. $x \rightarrow MNy \vee x$	$ex.\chi6.$
7. $NNx \rightarrow MNy \vee x$	$\chi R3.\chi2.6.$
8. $MNy \rightarrow MNy \vee x$	$ex.\chi5.$
9. $MNy \vee NNx \rightarrow MNy \vee x$	$\chi R4.8.7.$
10. $(MNNx \vee Ny) \wedge (MNy \vee NNx) \rightarrow (MNy \vee x) \wedge (Mx \vee Ny)$	$\chi R7.5.9.$
11. $(\chi T3)$	$10.D5.$
$\chi T4.$ $x \rightarrow NNx$	
1. $NNNx \rightarrow Nx$	$ex.\chi2.$
2. $(NNNx \rightarrow Nx) \rightarrow (x \rightarrow NNx)$	$ex.\chi T3.$
3. $(\chi T4)$	$\chi R1.1.2.$
$\chi T5.$ $Mx \rightarrow (Nx \rightarrow x)$	
1. $Mx \rightarrow MNNx$	$\chi R2.\chi T4.$
2. $MNNx \rightarrow MNNx \vee x$	$ex.\chi5.$
3. $Mx \rightarrow MNNx \vee x$	$\chi R3.1.2.$
4. $Mx \rightarrow Mx \vee NNx$	$ex.\chi5.$
5. $Mx \rightarrow (MNNx \vee x) \wedge (Mx \vee NNx)$	$\chi R5.3.4.$
6. $(\chi T5)$	$5.D5.$
$\chi T6.$ $x \rightarrow x$	$\chi R3.\chi T4.\chi2.$
$\chi T7.$ $(Nx \rightarrow x) \rightarrow Mx$	
1. $Mx \rightarrow Mx \vee x$	$ex.\chi5.$
2. $MNNx \rightarrow Mx$	$\chi R2.\chi2.$
3. $MNNx \rightarrow Mx \vee x$	$\chi R3.2.1.$
4. $x \rightarrow Mx \vee x$	$ex.\chi6.$
5. $MNNx \vee x \rightarrow Mx \vee x$	$\chi R4.3.4.$
6. $NNx \rightarrow Mx \vee x$	$\chi R3.\chi2.4.$
7. $Mx \vee NNx \rightarrow Mx \vee x$	$\chi R4.1.6.$
8. $(MNNx \vee x) \wedge (Mx \vee NNx) \rightarrow (Mx \vee x) \wedge (Mx \vee x)$	$\chi R7.5.7.$
9. $(Mx \vee x) \wedge (Mx \vee x) \rightarrow Mx \vee x$	$ex.\chi8.$
10. $Mx \rightarrow Mx$	$ex.\chi T6.$
11. $Mx \vee x \rightarrow Mx$	$\chi R4.10.\chi1.$
12. $(MNNx \vee x) \wedge (Mx \vee NNx) \rightarrow Mx$	$\chi R3.8.9.11.$
13. $(\chi T7)$	$12.D5.$

Démonstrations formelles à partir du système λ .

$\lambda R4.$	$\frac{x \rightarrow y, y \rightarrow z}{x \rightarrow z}$	$\lambda R1.hyp.\lambda 4.$
$\lambda R5.$	$\frac{x \rightarrow z, y \rightarrow z}{x \vee y \rightarrow z}$	$\lambda R1.hyp.\lambda 7.$
$\lambda T1.$	$x \rightarrow (y \rightarrow x)$ 1. $Ny \vee x \rightarrow (Ny \vee x) \vee N(NMNy \vee NMx)$ 2. $x \rightarrow Ny \vee x$ 3. $(\lambda T1)$	$ex.\lambda 5.$ $ex.\lambda 6.$ $\lambda R4.2.1.D6.$
$\lambda R6.$	$\frac{x \rightarrow y}{x \vee z \rightarrow z \vee y}$	
	1. $y \rightarrow z \vee y$ 2. $x \rightarrow z \vee y$ 3. $z \rightarrow z \vee y$ 4. $x \vee z \rightarrow z \vee y$	$ex.\lambda 6.$ $\lambda R4.hyp.1.$ $ex.\lambda 5.$ $\lambda R5.2.3.$
$\lambda T2.$	$x \vee y \rightarrow y \vee x$	$\lambda R5.\lambda 6.\lambda 5.$
$\lambda R7.$	$\frac{x \rightarrow y, z \rightarrow t}{x \vee z \rightarrow y \vee t}$	
	1. $x \vee z \rightarrow z \vee y$ 2. $z \vee y \rightarrow y \vee t$ 3. $x \vee z \rightarrow y \vee t$	$\lambda R6.hyp.$ $\lambda R6.hyp.$ $\lambda R1.1.2.$
$\lambda T3.$	$(Nx \rightarrow Ny) \rightarrow (y \rightarrow x)$	
	1. $NNx \vee Ny \rightarrow Ny \vee x$ 2. $MNNx \rightarrow Mx$ 3. $NMx \rightarrow NMNNx$ 4. $NMx \vee NMNy \rightarrow NMNy \vee NMNNx$ 5. $NMNy \vee NMx \rightarrow NMNNx \vee NMNy$ 6. $N(NMNNx \vee NMNy) \rightarrow N(NMNy \vee NMx)$ 7. $(\lambda T3)$	$\lambda R6.\lambda 2.$ $\lambda R3.\lambda 2.$ $\lambda R2.2.$ $\lambda R6.3.$ $\lambda R5.ex.\lambda T2.4.$ $\lambda R2.5.$ $\lambda R7.1.6.D6.$
$\lambda T4.$	$(Nx \rightarrow x) \rightarrow Mx$	
	1. $NNx \rightarrow Mx$ 2. $NNx \vee x \rightarrow Mx$ 3. $NMx \rightarrow NMNNx \vee NMx$ 4. $N(NMNNx \vee NMx) \rightarrow NNMx$ 5. $N(NMNNx \vee NMx) \rightarrow Mx$ 6. $(\lambda T4)$	$\lambda R4.\lambda 2.\lambda 1.$ $\lambda R5.1.\lambda 1.$ $ex.\lambda 6.$ $\lambda R2.3.$ $\lambda R4.4.ex.\lambda 2.$ $\lambda R5.2.5.D6.$
$\lambda T5.$	$x \rightarrow NNx$	
	1. $NNNx \rightarrow Nx$ 2. $(\lambda T5)$	$ex.\lambda 2.$ $\lambda R1.1.ex.\lambda T3.$
$\lambda T6.$	$x \rightarrow x$	$\lambda R4.\lambda T5.\lambda 2.$
$\lambda T7.$	$Mx \rightarrow (Nx \rightarrow x)$	
	1. $Mx \rightarrow MNNx$ 2. $NMNNx \rightarrow NMx$	$\lambda R3.\lambda T5.$ $\lambda R2.1.$

- | | |
|--|--------------------------------|
| 3. $NMNN_x \vee NM_x \rightarrow NM_x$ | $\lambda R5.2.ex. \lambda T6.$ |
| 4. $NNM_x \rightarrow N(NMNN_x \vee NM_x)$ | $\lambda R2.3.$ |
| 5. $M_x \rightarrow N(NMNN_x \vee NM_x)$ | $\lambda R4.ex. \lambda T5.4.$ |
| 6. $M_x \vee (NN_x \vee x) \rightarrow (NN_x \vee x) \vee N(NMNN_x \vee NM_x)$ | $\lambda R6.5.$ |
| 7. $M_x \rightarrow (NN_x \vee x) \vee N(NMNN_x \vee NM_x)$ | $\lambda R4.ex. \lambda 5.6.$ |
| 8. $(\lambda T7)$ | $7.D6.$ |

- BIBLIOGRAPHIE -

- (1) D. I. BAKARELOV, *Notes on the semantics of three-valued Lukasiewicz logic* (Russian) C.R. Acad. Bulgare Sci., 25, 1972, p. 1467-1469.
- (2) D. BECCHIO, *Nouvelle démonstration de la complétude du système de Wajsberg axiomatisant la logique trivalente de Lukasiewicz*, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 275, 1972, p. 679-682.
- (3) D. BECCHIO, *Sur les définitions des algèbres trivalentes de Lukasiewicz données par A. Monteiro*, Logique et Analyse, n° 63-64, 1973, p. 339-344.
- (4) R. BLANCHE, *La logique trivalente de Lukasiewicz*, Introduction à la logique contemporaine, Librairie Armand Colin, 1968, p. 101-105.
- (5) V. BOICESCU, *Sur les algèbres de Lukasiewicz*, Logique Automatique Informatique, Editions de l'Académie de la République Socialiste de Roumanie, 1971, p. 71-89.
- (6) L. BORKOWSKI et J. SLUPECKI, *The logical works of J. Lukasiewicz*, Studia Logica, tome VIII, 1958, p. 7-56.
- (7) S. Mc CALL et R. K. MEYER, *Pure three-valued Lukasiewiczian implication*, J.S.L. vol. 31, n° 3, p. 399-405.
- (8) R. CIGNOLI, *Boolean elements in Lukasiewicz algebras I*, Proceedings of the Japan Acad., vol. 41, 1965, p. 670-675.
- (9) R. CIGNOLI et A. MONTEIRO, *Boolean elements in Lukasiewicz II*, Proceedings of the Japan Acad., vol. 41, 1965, p. 676-680.
- (10) R. CIGNOLI, *Boolean multiplicative closures I, II.*, Proceedings of the Japan Acad., vol. 42, 1966, p. 1168-1174.
- (11) R. CIGNOLI, *On Varlet's characterization of three-valued Lukasiewicz algebras*, Notices A. M. S., 16, 4, 1969, p. 661-662.
- (12) P. DIENES, *On ternary logic*, J. S. L., vol. 14, n° 2, 1949, p. 85-94.
- (13) V. K. FINN, *The precompleteness of a class of functions that corresponds to the three-valued logic of J. Lukasiewicz* (Russian), Nauch. Tehn. Informacija (VINITI) Ser 2 Inform. Processy i Sistemy, 1969, n° 10, p. 35-38.
- (14) V. K. FINN, *Certain characteristic truth-tables of classical logic and of the three-valued logic of J. Lukasiewicz* (Russian), *Studies in systems of logic* (dedicated to the memory of S.A. Janovskaja), (Russian), Izdat «Nauka» Moscow, 1970, p. 215-261.
- (15) J. L. GARDIES, *Les particularités du système propositionnel trivalent de Lukasiewicz s'expliquent-elles par le conflit de deux exigences ?* Studia Logica, XXIX, 1971, p. 149-152.
- (16) G. GEORGESCU et VRACIU, *On the characterization of centered Lukasiewicz algebras*, Journal of algebra, vol. 16, n° 4, 1970, p. 486-495.
- (17) H. GOLDBERG, H. LEBLANC et G. WEAVER, *A strong completeness theorem for 3-valued logic*, Notre Dame Journal of Formal Logic, vol. XV, n° 2, 1974, p. 325-330.
- (18) J. B. GRIZE, *Une logique trivalente*, Logique et connaissance scientifique, Encyclopédie de la Pléiade, 1967, p. 263-265.
- (19) K. ISEKI, *Some three-valued logics and its algebraic representations*, Proceedings of the Japan Acad., vol. 42, 1966, p. 761-762.

- (20) L. ITURRIOZ, *Axiomas para el calculo proposicional trivalente de Lukasiewicz*, Revista de la Union Matematica Argentina y de la Asociacion Fisica Argentina, XXII, n° 3, 1965, p. 150.
- (21) J. LUKASIEWICZ, *Treść wykładu poseginalnego wygłoszonego w sali Uniwersytetu Warszawskiego dnia 7 marca 1918* (Leçon d'adieu prononcée dans la salle de l'Université de Varsovie le 7 mars 1918) Warszawa 1918.
- (22) J. LUKASIEWICZ, *O projekciu możliwości*, R. F. 5, 1919, 1920, p. 169-170, traduit par H. Hiz dans *Polish Logic, 1920-1939*, édité par Storrs Mc Call, Clarendon Press, 1967, p. 15.
- (23) J. LUKASIEWICZ, *O logice trójwartościowej*, R. F. 5, 1920, p. 170-171, traduit par H. Hiz dans *Polish Logic, 1920-1939*, édité par Storrs Mc Call, Clarendon Press, 1967, p. 16, traduit par O. Wojtasiewicz dans *Jan Lukasiewicz selected works*, édité par Borkowski, North Holland, 1970, p. 87-88.
- (24) J. LUKASIEWICZ, *Philosophische Bemerkungen zu mehrwertigen Systemen das Aussagenkalküls*, Comptes rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, Cl III, 23, 1930, p. 51-77, traduit par H. Weber dans *Polish Logic, 1920-1939*, édité par Storrs Mc Call, Clarendon Press, 1967, p. 40-65.
- (25) R. MAYET, *Relations entre les anneaux booléens, les anneaux monadiques et les algèbres trivalentes de Lukasiewicz*, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 275, 1972, p. 1-3.
- (26) Gr. C. MOISIL, *Recherches sur les logiques non chrysippiennes*, Annales scientifiques de l'Université de Jassy, 1940, XXVI, 1ère section, p. 431-466.
- (27) Gr. C. MOISIL, *Notes sur les logiques non chrysippiennes*, Annales scientifiques de l'Université de Jassy, 1941, XXVII, 1ère section, p. 86-98.
- (28) Gr. C. MOISIL, *Sur les anneaux de caractéristiques 2 ou 3 et leurs applications*, Bulletin de l'Ecole polytechnique de Bucarest, XIIe année, 1941, n° 1 et 2.
- (29) Gr. C. MOISIL, *Logique modale*, Disquisitiones math. et phys. Bucarest, II, 1, 1942, p. 3-98.
- (30) Gr. C. MOISIL, *Sur les théories déductives à logique non chrysippienne*, Comptes rendus des Séances de l'Académie des Sciences de Roumanie, V, 1.2., 1941.
- (31) Gr. C. MOISIL, *Les logiques à plusieurs valeurs et l'automatique*, *Infinistic Methods in mathematics*, Sept. 1959, p. 337-345.
- (32) Gr. C. MOISIL, *Les logiques à plusieurs valeurs et les circuits à contacts et relais*, Communication présentée à la conférence roumaine-soviétique «Les problèmes scientifiques des sciences de la nature», juin 1959, imprimée en 1960 aux éditions de l'académie de la république populaire roumaine.
- (33) Gr. C. MOISIL, *Asupra calculului predicatelor in logica cu trei valori*, Încercări vechi și noi de logică neclasică, Editura Științifică, București, 1965, p. 340-354.
- (34) Gr. C. MOISIL, *Sur les idéaux des algèbres lukasiewiczziennes trivalentes*, Analele Universitatii bucurești, seria acta logica, n° 1, 1960, p. 83-95.
- (35) Gr. C. MOISIL, *Sur la logique à trois valeurs de Lukasiewicz*, *Acta Logica*, 1962, tome V, p. 103-117.
- (36) Gr. C. MOISIL, *Les logiques non chrysippiennes et leurs applications*, *Acta Philosophica Fennica*, fasc. 16, 1963, p. 137-152.
- (37) Gr. C. MOISIL, *Les logiques à plusieurs valeurs et leur intérêt dans l'étude des circuits à contacts et relais*, *Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. de la R.S.R.*, tome 12, (60), n° 3, 1968, p. 73-79.

- (38) Gr. C. MOISIL, *La logique mathématique pure et appliquée en R. S. de Roumanie*, XIIIe congrès international d'histoire des Sciences, Moscou, 18-24 août 1971.
- Les publications (26) à (30), (32) à (35), de Gr. C. Moisil figurent également en roumain dans le livre «Încercări vechi și noi de logică neclasică», Editura Științifică, București, 1965, et en français dans le livre «Essais sur les logiques non chrysippiennes», Editions de l'Académie de la République Socialiste de Roumanie, 1972.
- (39) L. MONTEIRO, *Axiomes indépendants pour les algèbres de Lukasiewicz trivalentes*, Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. Phys. de la R.P.R., tome 7 (55) n° 3.1., 1963.
- (40) L. MONTEIRO et L. G. COPPOLA, *Sur une construction des algèbres de Lukasiewicz trivalentes*, Portugaliae Mathematica, vol. 23, fasc. 3, 1964, p. 157-167.
- (41) L. MONTEIRO, *Sur les algèbres de Lukasiewicz injectives*, Proceedings of the Japan Acad., vol. 41, 1965, p. 578-581.
- (42) L. MONTEIRO, *Sur le principe de détermination de Moisil dans les algèbres de Lukasiewicz trivalentes*, Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. de la R. S. de Roumanie, tome 13, (61) n° 4, 1969, p. 447-448.
- (43) L. MONTEIRO, *Extension d'homomorphismes dans les algèbres de Lukasiewicz trivalentes*, Internat. Logic Rev. n° 2, 1970, p. 193-200.
- (44) L. MONTEIRO, *Les algèbres de Heyting et de Lukasiewicz trivalentes*, Notre Dame Journal Formal Logic, 11, 1970, p. 453-466.
- (45) L. MONTEIRO et L.G. COPPOLA, *Un théorème sur les algèbres de Lukasiewicz trivalentes*, Notas de Logica Matematica Universidad Nacional del Sur, Bahia Blanca 21.
- (46) L. MONTEIRO, *Algebras de Lukasiewicz trivalentes monadicas*, Notas de Logica matematica, Universidad Nacional del Sur, Bahia Blanca, n° 32, 1974.
- (47) A. MONTEIRO, *Sur la définition des algèbres de Lukasiewicz trivalentes*, Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. Phys. de la R.P.R., tome 7 (55) n.1.2., 1963, p. 3-10.
- (48) A. MONTEIRO, *Construction des algèbres de Lukasiewicz trivalentes dans les algèbres de Boole monadiques. 1.*, Math. Japon. 12, 1967, p. 1-23.
- (49) A. MOSTOWSKI, *L'oeuvre scientifique de Jan Lukasiewicz dans le domaine de la logique mathématique*, Fundamenta Mathematicae, XLIV, 1957, p. 1-11.
- (50) Gh. S. NADIU, *On a method of construction of trivalent Lukasiewicz algebras* (Romanian), Stud. Cerc. Mat. 19, 1967, p. 1063-1070.
- (51) A. PETCU, *The definition of the trivalent Lukasiewicz algebras by three equations*. Revue roumaine de maths pures et appliquées, XIII, n.2, 1968, p. 247-250.
- (52) A. N. PRIOR, *Three-valued and intuitionist logic*, Formal logic, Clarendon Press, 1955, p. 230-259.
- (53) T. PRUCNAL, *A proof of completeness of the three-valued C-N-sentential calculus of Lukasiewicz*, Studia Logica, XVIII, 1966, p. 65-71.
- (54) A. ROSE, *Axiom systems for three-valued logic*, The journal of the london mathematical society, XXVI, 1951, p. 50-58.
- (55) A. ROSE, *An axiom system for three-valued logic*, Methodos, 1951, p. 233-239.
- (56) A. SADE, *Algèbre de Lukasiewicz dans la logique trivalente*, Publications de la Faculté d'électrotechnique de l'Université à Belgrade, Série Mathématiques et Physique, N° 273, 1969.

- (57) A. SADE, *Fonctions propositionnelles monadiques dans la logique trivalente*, Ann. Soc. Sci. Bruxelles, Sér. I, 83, 1969, p. 203-214.
- (58) C. SICOE, *A characterization of Lukasiewiczian Algebra 1, 11*, Proceedings of the Japan Aca., vol. 43, 1967, n° 8, p. 729-736.
- (59) F.M. SIOSON, *Further axiomatizations of the Lukasiewicz three-valued calculus*, Notre Dame Journal of Formal Logic, vol V, n. 1, 1964, p. 62-70.
- (60) J. SLUPECKI, G. BRYLL et T. PRUCNAL, *Some remarks on three-valued logic of J. Lukasiewicz*, Studia Logica, tome 21, 1967, p. 1-26.
- (61) J.C. VARLET, *Algèbres de Lukasiewicz trivalentes*, Bulletin de la société royale des sciences de Liège, 36e année, n° 9-10, 1968, p. 399-408.
- (62) J.C. VARLET, *Considérations sur les algèbres de Lukasiewicz trivalentes*, Bulletin de la société royale des sciences de Liège, 38e année, n° 9-10, 1969, p. 462-469.
- (63) M. WAJSBERG, *Aksjomatyzacja trojwartosciowego rachunku zdan*, Comptes rendus des séances de la société des sciences et des lettres de Varsovie, Cl.III, 24, 1931, p. 126-145, traduit par B. Gruchman et S. Mc Call dans Polish Logic, 1920-1939, Clarendon Press, 1967, p. 264-284.

TABLE DES MATIERES

1. Aspect sémantique de la logique trivalente de Lukasiewicz.
2. Aspect syntactique de LTL. Problèmes de complétude et d'indépendance.
3. Algèbres trivalentes de Lukasiewicz.
4. Equivalence des algèbres de Lukasiewicz définies par Moisil et des algèbres de Wajsberg définies par A. Monteiro.
5. Algèbre de Wajsberg associée à LTL.
6. Autres systèmes d'axiomes définissant une algèbre de Wajsberg et indépendance de ces systèmes.
7. Démonstration «algébrique» de certains théorèmes de LTL.
8. Autres axiomatisations de LTL.
9. Propriétés des AL et des AW.

Annexe 0. Démonstrations des théorèmes et propriétés énoncés dans les paragraphes 1 à 9 .

Annexe I. Démonstrations formelles des théorèmes formels d'une algèbre de Wajsberg utilisés dans l'annexe 0.

Annexe II. Matrices d'indépendance utilisées dans le paragraphe 2 et l'annexe 0.

Annexe III. Démonstrations formelles d'énoncés démontrables dans certains systèmes de LTL utilisées dans l'annexe 0.

Bibliographie.