

ANNALES SCIENTIFIQUES  
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2  
*Série Mathématiques*

GÖRAN HÖGNÄS

**Marches aléatoires récurrentes sur les demi-groupes  
localement compacts**

*Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2*, tome 65, série *Mathématiques*, n° 15 (1977), p. 96-102

<[http://www.numdam.org/item?id=ASCFM\\_1977\\_\\_65\\_15\\_96\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1977__65_15_96_0)>

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>



Dans le cas discret, Martin-Löf [3] montre que  $I$  est exactement l'idéal minimal de  $S$ . Si  $S$  est commutatif, alors  $I$  est un groupe. Dans cette note nous étudierons  $I$  dans le cas localement compact sous quelques conditions supplémentaires sur  $P$ . Nous nous bornerons au cas *abélien*.

2.

Supposons d'abord que  $P$  soit *fortement continu* [5] (fortement fellérien dans la terminologie de [6]), c'est-à-dire, la fonction  $x \mapsto P(x, A)$ ,  $x \in S$ , est continue pour chaque borélien  $A \subset S$ .

Lemme 1.  $I$  est un idéal fermé minimal.  $\sum \mu^n(I^c) < \infty$ .

Démonstration. Il est facile à voir que  $I^c$  (le complémentaire de  $I$ ) est ouvert. Le fait que  $I$  est un idéal est démontré dans [4, pp. 190-191].

Nous montrons maintenant que  $\overline{xS}$  (l'adhérence topologique de  $xS$ ) =  $I$  pour tout  $x \in I$ , ce qui prouve que  $I$  est minimal dans l'ensemble des idéaux fermés.

Soit

$$(1) \quad \nu = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \mu^n.$$

Alors  $\nu$  est une probabilité régulière dont le support est tout  $S$ .

Si  $A$  est un idéal et  $\nu(A) > 0$  il s'ensuit que  $\sum \mu^n(A^c) < \infty$ , car  $A$  est absorbant pour  $\{Z_n\}$ , cf. [3].  $P$  fortement continu implique que, quel que soit  $x \in S$ ,  $P(\cdot, xS) > 0$  dans un ouvert, et, par conséquent,

$$\nu(xS) > 0 \text{ pour tout } x \in S.$$

En particulier, on a  $\sum \mu^n((xS)^c) < \infty$  pour tout  $x$ . Si  $x \in I$  et  $\overline{xS} \neq I$  on aurait  $\sum \mu^n(U) \leq \sum \mu^n((xS)^c) < \infty$  pour un ouvert

U contenant points de I , une contradiction □

Soit  $x \in I$ .  $\overline{xI} = I$  , car  $\overline{xI}$  est un idéal fermé. Alors on a

$$(2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n(x^{-1}N) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} P^n(x,N) = \infty$$

pour tout voisinage N de x .

$P(\cdot, I^c) = 0$  sur I. Il est donc possible de restreindre  $\{Z_n\}$  à I . Cette chaîne restreinte  $\{X_n\}$  est aussi markovienne. Elle est  $\phi$ -irréductible, [7], pour  $\phi = v(x^{-1} \cdot)$ , c'est-à-dire,  $\text{Prob}\{\exists n: X_n \in A \mid X_0 = y\} > 0$  pour tout  $y \in I$ , quel que soit A avec  $\phi(A) > 0$  ou, ce qui est équivalent,  $\sum P^n(x,A) > 0$ .

Par [7, cf. Theorem 4.1 et Definition 1.2] , (2) entraîne l'existence d'une mesure de Radon invariante  $\pi$ ,

$$(3) \quad \pi = \pi P ,$$

équivalente à  $\phi$ . Le support de  $\pi$  est alors tout I .

Lemme 2. (a)  $\pi(Ka^{-1}) < \infty$  pour tout  $a \in I$  et tout compact  $K \subset I$  ,  
 (b)  $\pi(I \setminus aI) = 0$  pour tout  $a \in I$ .

Démonstration. (a) Les points ne satisfaisant pas à (a) constituent un idéal E :

$$\pi(Ka^{-1}) = \infty \Rightarrow \pi(Kb(ab)^{-1}) = \infty .$$

La démonstration ci-dessus montre qu'alors  $v(E) > 0$ . Mais l'invariance de  $\pi$  implique

$$\infty > \pi(K) \geq \int_I \pi(dy) v'(y^{-1}K) = \int_I \pi(Ky^{-1}) v'(dy)$$

d'où  $\pi(Ky^{-1}) < \infty$  v'-p.p. où  $v'$  est la restriction de  $v$  à I.

(Il existe un ensemble nul commun pour tous les compacts K , S étant la réunion d'une suite croissante de compacts d'intérieurs non-vides.)

(b)  $\{X_n\}$  est  $\pi$ -irréductible. Il en suit immédiatement que  $\pi((aS)^c) = 0$ . Supposer que  $\pi((aI)^c) > 0$ . Alors la probabilité

d'atteindre  $(aI)^c$  à partir de  $a^2 \in I$  est positive, ce qui est absurde  $\square$

Théorème 1.  $I$  est un groupe topologique.

Démonstration. Nous emploierons une version d'une méthode introduite par Gelbaum et Kalisch, cf. [1], [4, p. 17] .

Prendre  $a, b \in I$ . Si

$$(4) \quad \pi_0 \equiv \pi(\cdot b^{-1}) ,$$

Lemme 2 montre que  $\pi_0$  est une mesure de Radon sur  $I$  . Pour tout  $a \in I$ ,  $\pi_0(aIb) \geq \pi(aI) > 0$ , et

$$(5) \quad \pi_0(I \setminus aIb) = 0 .$$

Les applications  $\theta(x,y) \equiv (x,xy)$  et  $\beta(x,y) \equiv (y,x)$  sont mesurables par rapport à  $\pi_0 \times \pi_0$  .

$$(\pi_0 \times \pi_0)(\theta(aIb \times aIb)) = \int_{aIb} \pi_0(dy) \pi_0(y \cdot aIb) > 0$$

par (5). Nous avons donc

$$(\pi_0 \times \pi_0)(\beta\theta(aIb \times aIb)) > 0 .$$

Toutes les sections  $B_y \equiv \{z \mid (y,z) \in B\}$  de l'ensemble

$$B \equiv (aIb \times aIb) \setminus \theta(aIb \times aIb)$$

sont  $\pi_0$ -nulles (Lemme 2 (b)); d'où

$$(6) \quad (\pi_0 \times \pi_0)(B) = 0 ,$$

et encore,

$$(7) \quad \beta\theta(aIb \times aIb) \cap \theta(aIb \times aIb) \neq \emptyset ,$$

ce qui veut dire qu'il existe  $s, t, u, v \in aIb$  tels que

$$(st, s) = (u, uv) .$$

Cela implique que  $s = stv = s(tv)^2$  .  $aI$  étant cancellatif,

[4, p. 18] , nous voyons que  $tv \in aIb \subset aI$  est idempotent.

L'existence d'un élément idempotent implique  $aI = I$ .  $I$  est

donc un groupe (algébriquement).  $I$  est aussi un espace localement compact. Par le théorème d'Ellis, [4, p. 7],  $I$  est de même un groupe topologique  $\square$

Remarque. Si  $S = I$ , la condition de continuité forte de  $P$  équivaut à ce que  $\mu$  soit absolument continue par rapport à une mesure de Haar sur  $I$ , cf. [7, Theorem 5.1].

3.

Si  $S$  est un groupe topologique, non nécessairement récurrent, ou commutatif,  $\mu$  est étalée si et seulement si  $P$  a la propriété suivante:

- (8) Il existe un  $\theta$ ,  $0 < \theta < 1$ , et un noyau sous-markovien non-trivial  $T$ , tels que

$$T(x,A) \leq \theta(1-\theta)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \theta^n P^n(x,A) \quad (x \in S, A \text{ borélien de } S)$$

et l'application

$$x \sim T(x,A)$$

est semi-continue inférieurement (s.c.i.), quel que soit  $A$  borélien, [7, Theorem 5.1].

Nous dirons, suivant [7], que la chaîne dont le noyau de transition  $P$  satisfait à (8), a  $T$  comme *composante continue*.

Remarque. Dans le cas d'une marche aléatoire sur un groupe, il suffit de supposer qu'il existe un point  $x_0$  où  $T(x_0, \cdot)$  est non-trivial. Il suit que  $T(x, \cdot)$  est non-trivial pour chaque  $x \in S$ .

Retournons au cas d'un demi-groupe commutatif récurrent (au sens  $I$  non-vide). Supposons maintenant qu'il existe un point  $x_0 \in I$  où la composante continue  $T$  est non-triviale, c'est-à-dire,  $P(x,A) \equiv \mu(x^{-1}A)$  satisfait à (8).

On peut alors démontrer, voir [2], que

$$(i) \quad \overline{x_0 S} = \overline{x_0 I} = I$$

- (ii) Poser  $M \equiv \{x \in I \mid T(x, S) > 0\}$ ,  $A \equiv \{x \in I \mid \sum P^n(x, M) = 0\}$  et  $G \equiv I \setminus A$ .

$A$  est un idéal fermé,  $\nu$ -nul, d'intérieur vide.

Suivant la méthode décrite ci-dessus, il est possible d'obtenir le résultat suivant:

Théorème 2.  $G$  est un groupe topologique localement compact.

Si  $G$  est compact, alors  $A = \Phi$ .

#### REFERENCES

1. B.R. Gelbaum et G.K. Kalisch, Measure in semigroups, *Can. J. Math.* 4 (1952), 396-406.
2. G. Högnäs, On random walks with continuous components, Preprint, Aarhus Universitet, Matematisk Institut, Preprint Series 1976/77, No. 26, 60 pp.
3. P. Martin-Löf, Probability theory on discrete semigroups, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete* 4 (1965), 78-102.
4. A. Mukherjea et N.A. Tserpes, *Measures on Topological Semigroups*, Lecture Notes in Mathematics 547, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1976.
5. D.B. Pollard et R.L. Tweedie, R-theory for Markov chains on a topological state space I, *J. London Math. Soc.* 10 (1975), 389-400.
6. D. Revuz, *Markov Chains*, North Holland / American Elsevier, Amsterdam-Oxford-New York 1975.

7. P. Tuominen et R.L. Tweedie, Markov chains with continuous components, Preprint, *Reports of the Department of Mathematics, University of Helsinki*, Ser. A, No. 10, August 1976, 39 pp.

Göran Högnäs

Département de Mathématiques

Åbo Akademi

20500 Åbo 50

Finlande