

ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

PAOLO BALDI

Sur la classification des groupes récurrents

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 65, série *Mathématiques*, n° 15 (1977), p. 12-18

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1977__65_15_12_0>

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2* » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LA CLASSIFICATION DES GROUPES RECURRENTS

Paolo BALDI

Université de Pise, Italie

-:-:-:-:-

Soit G un groupe LCD, V un voisinage de l'origine qui engendre le groupe, m la mesure de Haar de G . On dira que G est à croissance polynomiale d'exposant $\leq \alpha$ si il existe $c > 0$ telle que

$$m(V^n) \leq c n^\alpha .$$

On dira que G est à croissance exponentielle s'il existent $c > 0$ et $\rho > 1$ tels que

$$m(V^n) \geq c \rho^n$$

L'idée est d'utiliser la notion de croissance pour déterminer quand est-ce qu'un groupe est récurrent; soit on imagine que plus un groupe a une grande croissance, moins il est récurrent. Plus précisément:

Conjecture. Un groupe LCD est récurrent si et seulement si il est à croissance polynomiale d'exposant ≤ 2 .

A l'heure actuelle on ne sait pas résoudre cette conjecture en toute généralité, mais on sait la démontrer dans un cadre assez vaste:

Théorème 1. Soit G un groupe de Lie connexe. Alors il est récurrent si et seulement si il est à croissance polynomiale d'exposant ≤ 2 .

On va donner dans la suite une idée des différentes étapes qui

menent à la démonstration du théorème 1.

On donnera d'abord des résultats de structure qui permettront de réduire le problème à l'étude de certains groupes bien précis, qu'on traitera dans la deuxième partie.

1.

Comme on sait qu'un groupe récurrent est de type R ([6]), il n'est pas restrictif de ne considérer que ce cas (on rappelle qu'un groupe de Lie est de type R si les valeurs propres de l'application adjointe sont toutes de module égal à 1).

Soit

$$G = R S$$

une décomposition de Lévy de G . Si la partie semisimple S n'est pas compacte G ne serait pas moyennable et donc transitoire et à croissance exponentielle ([6]). Si S est compact deux cas se présentent suivant que S est distingué dans G ou pas.

Proposition 1.1

Soit G un groupe de Lie connexe de type R tel que dans une décomposition de Lévy la partie semisimple ne soit pas distinguée. Alors G possède un quotient qui est le produit semidirect $R^d \rtimes_{\sigma} K$ ($d \geq 3$) de R^d et d'un groupe K de rotations qui opère de manière irréductible sur R^d .

Démonstration: voir [6], chap. V.

Si par contre S est distingué dans G , on peut passer à considérer G/S qui, est un groupe résoluble, sans rien changer ni à la croissance ni à la récurrence du groupe.

Dans la suite on désignera par

G_2 = le groupe des déplacements du plan

\tilde{G}_2 = le revêtement de G_2 , soit un groupe dont les éléments sont du type (z,x) $z \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{R}$ avec l'opération

$$(z,x) \cdot (z',x') = (z + e^{ix} z', x+x')$$

H_1 = le premier groupe de Heisenberg, soit \mathbb{R}^3 muni de l'opération

$$(x,y,z) \cdot (x',y',z') = (x+x', y+y', z+z'+xy')$$

Δ = le groupe diamant soit le produit semidirect $H_1 \rtimes_{\sigma} SO(2)$ où $SO(2)$ opère par rotations sur les coordonnées x,y .

Proposition 1.2

Soit G un groupe de Lie connexe résoluble de type R dont le quotient par le sousgroupe compact distingué maximum est $\neq \{0\}$, \mathbb{R} , \mathbb{R}^2 , G_2 ; alors si G est nilpotent il admet H_1 ou, \mathbb{R}^3 comme quotient. Si G n'est pas nilpotent il admet comme quotient Δ , \tilde{G}_2 ou le produit semidirect $\mathbb{R}^d \rtimes_{\sigma} A$ ($d \geq 3$) de \mathbb{R}^d et d'un groupe compact A abélien de rotations de \mathbb{R}^d .

Démonstration: voir [6], chap. V.

Comme le passage au quotient par un sousgroupe compact ne change pas le croissance, si G est résoluble et à croissance polynomiale d'exposant

≤ 2 , le quotient par le sousgroupe compact normal maximum ne peut donner comme résultat que $\{0\}$, R , R^2 , G_2 , comme les autres groupes qui figurent dans la proposition 1.2 sont à croissance polynomiale d'ordre 3, sauf H_1 , et Δ qui sont d'ordre 4. Par contre la proposition 1.1 montre que si la partie semisimple n'est pas distinguée dans G il existe un quotient qui est isomorphe au produit semidirect $R^d \rtimes_{\sigma} K$ ($d \geq 3$) où K est un sousgroupe de $SO(d)$ qui opère de façon irréductible; un tel groupe est à croissance polynomiale d'ordre 3, et la croissance de G est donc d'ordre ≥ 3 .

Pour terminer la démonstration du théorème, il reste donc à prouver que R^3 , H_1 , Δ , \tilde{G}_2 , $R^d \rtimes_{\sigma} K$, $R^d \rtimes_{\sigma} A$ sont transitoires.

2.

Le fait que R^3 est transitoire est bien connu depuis longtemps. Pour les autres cas :

Proposition 2.1.

Soit G un des groupes $\tilde{G}_2, H_1, \Delta, R^d \rtimes_{\sigma} K, R^d \rtimes_{\sigma} A$, μ une loi de probabilité sur G , à support compact et symétrique. Alors μ est transitoire.

Démonstration: voir [7], [8], [9], [6].

L'idée générale de la démonstration de la proposition 2.1 est la suivante. On construit d'abord une fonction barrière, soit une fonction f telle que

$$f < 1$$

$$\lim_{g \rightarrow \partial} f(g) = 1$$

$$\mu * f(g) \geq f(g)$$

pour tout g hors d'un compact K (∂ désigne le point à l'infini dans la compactification d'Alexandroff de G).

On voit deuxièmement que si K' est un compact contenant K , $z_n^g = X_n X_{n-1} \dots X_1 g$, l'état de la marche au temps n et $T_{K'}^g$, le premier temps d'entrée dans K' en partant de g ,

$$f(z_{n \wedge T_{K'}^g}^g)$$

est une surmartingale. Donc:

$$f(g) \leq E \left[f(z_{n \wedge T_{K'}^g}^g) \right] = E \left[f(z_n^g); n < T_{K'}^g \right] + E \left[f(z_{T_{K'}^g}^g; n \geq T_{K'}^g \right] \leq$$

$$\leq P(n \leq T_{K'}^g) + \xi P \left[n > T_{K'}^g \right] = 1 - (1 - \xi) P(n > T_{K'}^g)$$

où $\xi = \sup_{g \notin K'} f(g) < 1$

A la limite pour $n \rightarrow \infty$ on a donc

$$(1) \quad P(T_{K'}^g < \infty) \leq \frac{1 - f(g)}{1 - \xi}$$

qui pour g assez grand est < 1 .

La proposition suivante permet de conclure ([2]):

Proposition 2.2

Un groupe G est transitoire si et seulement si sont transitaires les marches symétriques à support compact.

Il est important de remarquer que dans les cas G_2 , H_1 , et $R^d \times_{\sigma} A$ il existe une autre méthode de démonstration de la transience tout à fait différente et qui n'a pas besoin de passer par l'intermédiaire de la proposition 2.2. ([5], [6]).

3.

Quelques questions ouvertes.

1. Il est traditionnel d'étudier en même temps la transience et le renouvellement des marches aléatoires. Dans le cadre des groupes de Lie connexes de type R on sait que si $G = R \times_{\sigma} A$, \tilde{G}_2 ou H_1 la seule valeur d'adhérence du potentiel à l'infini est la mesure nulle ([5], [6]). Cela est certainement vrai aussi pour les autres cas, mais pour $R^d \times_{\sigma} K$ où Δ on est encore obligés de faire des hypothèses de moments ([7], [8], [9]) ou d'étalement ([6]) pour μ . Il semble raisonnable un résultat analogue à la proposition 2.2 pour le renouvellement.

2. Le théorème 1 a été étendu à une classe plus vaste de groupes ([6]) mais, notamment pour les groupes discrets, le théorème 1 n'a pas d'analogue. La question essentielle serait d'avoir des bons résultats de structure.

Bibliographie

- 1 R. Azencott - "Espaces de Poisson des groupes localement compacts-
Springer L.N. n. 148 .
- 2 P. Baldi, J. Peyrière, N. Lohoué - à paraître C.R.A.S.
- 3 P. Crepel - "Marches aléatoires sur les déplacements du plan" -
C.R.A.S., t. 278, (1^{er} Avril 1974) série A, pag. 961 .
- 4 Y. Derriennic, Y. Guivarc'h - "Théorème de renouvellement pour les groupes
non moyennables" - C.R.A.S. t, 277, (1^{er} Oct. 1973), série A, pag. 613 .
- 5 Y. Guivarc'h, M. Keane - "Transience des marches aléatoires sur les groupes
nilpotents" - Asterisque N. 4, (1973), pag. 27.
- 6 Y. Guivarc'h, M. Keane, B. Roynette - "Marches aléatoires sur les groupes
de Lie " - à paraître L.N. Springer .
- 7 B. Roynette - "Marches aléatoires sur le groupe des déplacements de l'espace".
- 8 B. Roynette - "Récurrence et transience des groupes de Lie résolubles
connexes" - à paraître.
- 9 B. Roynette, M. Sueur - "Marches aléatoires sur un groupe nilpotent ".
Z.W. 30, (1974), p. 25-34 .