ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

D. NUALART RODON
M. SANZ SOLE

Intégrales stochastiques par rapport au processus de Wiener à deux paramètres

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 61, série *Mathématiques*, n° 14 (1976), p. 89-99

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1976__61_14_89_0>

INTEGRALES STOCHASTIQUES PAR RAPPORT AU PROCESSUS DE WIENER A DEUX PARAMETRES

D. NUALART RODON, UNIVERSITE DE TOULOUSE

M. SANZ SOLE, UNIVERSITE DE BARCELONE

Nous développons ici le calcul différentiel stochastique au sens d'Itô par rapport au processus de Wiener à deux paramètres $W=\{W_z, z\in R_+^2\}$ celui-ci étant défini comme un processus Gaussien, à moyenne nulle et fonction de covariance $E(W_z.W_{z'})=(x\wedge x')(y\wedge y')$, où $z=(x,y)$ et $z'=(x',y')$.

On présente, dans la Section 1, plusieurs conditions de martingales qu'on peut imposer aux fonctions aléatoires à deux paramètres, d'après les idées de Cairoli et Walsh [1]; et on étudie après, dans la Section 2, les diverses intégrales stochastiques par rapport au processus de Wiener à deux paramètres, qui nous seront nécessaires pour en déduire des formules de différentiation stochastique présentées dans la Section 3.

1. Propiété de martingale pour les fonctions aléatoires à deux paramètres.

Dans un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ on considère une suite croissante $\{\mathcal{A}_z, z\in R_+^2\}$ de sous-σ-algèbres de $\mathcal{A}$, par rapport à l'ordre partiel de R_+^2:

$$(x,y)\leqslant(x',y') \quad \text{si et seulement si } x\leqslant x' \text{ et } y\leqslant y'.$$

On dira qu'un processus $X=\{X_z, z\in R_+^2\}$ est $\mathcal{A}_z$-adapté si X_z est $\mathcal{A}_z$-mesurable pour tout z.

Définition 1.1. Un processus $X=\{X_z, z\in R_+^2\}$ est une martingale par rapport à l'ordre partiel si X est intégrable, $\mathcal{A}_z$-adapté et

$$E\{X_{z'}/\mathcal{A}_z\}=X_z \qquad \forall \; z\leqslant z'.$$

D'autre part, on peut introduire la notion de martingale comme extension de celle de processus à accroissements indépendants. Rappelons qu'un processus $X=\{X_z, z\in R_+^2\}$ est à accroissements indépendants si pour toute famille de rectangles $\Delta_i=(x_i,x_i']\times(y_i,y_i']$ deux à deux disjoints, les accroissements $X(\Delta_i)=X_{(x_i',y_i')}-X_{(x_i',y_i)}-X_{(x_i,y_i')}+X_{(x_i,y_i)}$ sont des variables aléatoires indépendantes. Le processus de Wiener à deux paramètres en est un example.

X étant un processus intégrable, on peut donner les définitions suivantes:

Définition 1.2. X est une martingale si X est $\mathcal{A}_z$-adapté et

$$E\{X(\Delta)/\mathcal{A}_z\}=0,$$

pour tout rectangle Δ tel que $\Delta\cap A_z=\phi$, où $A_z=[0,x)\times[0,y)$ si $z=(x,y)$.

Définition 1.3. X est une i-martingale (i=1,2) si X est $\mathcal{A}_z^i$-adapté (où $\mathcal{A}_z^1=\bigvee_{t\geqslant 0}\mathcal{A}_{(x,t)}$ et $\mathcal{A}_z^2=\bigvee_{s\geqslant 0}\mathcal{A}_{(s,y)}$ si $z=(x,y)$), et

$$E\{X(\Delta) \;/\; \mathcal{A}_z^i\}=0,$$

pour tout rectangle Δ tel que $\Delta\cap A_z^i=\phi$, où $A_z^1=[0,x)\times R_+$ et $A_z^2=R_+\times[0,y)$ si $z=(x,y)$.

Définition 1.4. X est une martingale forte si X est A_z-adapté et

$$E\{X(\Delta) \ / \ A_z^1 V A_z^2 \}=0$$

pour tout rectangle Δ tel que $\Delta\cap(A_z^1 \cup A_z^2)=\phi$.

Alors, on peut vérifier facilement les propiétes suivantes (voir [1]) :

1. Tout processus X à accroissements indépendants, nul sur les axes et à moyenne constante est une martingale forte si on prend comme A_z la σ-algèbre générée par les variables $X_\alpha, \alpha \leqslant z$.

2. X est une martingale si et seulement si X est 1 et 2-martingale, et ceci entraîne la propiété de martingale par rapport à l'ordre partiel si $\{X_{(x,0)}, A_{(x,0)}, x \geqslant 0\}$ et $\{X_{(0,y)}, A_{(0,y)}, y \geqslant 0\}$ sont des martingales à un parametre.

3. Réciproquement, toute martingale par rapport à l'ordre partiel est une martingale si les σ-algèbres A_z^1 et A_z^2 sont conditionnellement indépendantes par rapport à A_z.

Dorénavant, on supposera toujours que A_z est la σ-algèbre générée par les variables $W_\alpha, \alpha \leqslant z$, où $W=\{W_z, z \in R_+^2\}$ est un processus de Wiener à deux paramètres, et alors la propiété de martingale équivaut à celle de martingale par rapport à l'ordre partiel.

Cependant, il faut la définition 1.2 pour construire l'intégrale stochastique par rapport à une martingale quelconque.

2. Intégrales stochastiques.

Soit $T=[0,1]^2$ et $W=\{W_z, z\in T\}$ un processus de Wiener à deux paramètres.

Nous savons (voir [2],[3]) que pour un processus $\phi=\{\phi_z, z\in T\}$ tel que

(a) $\phi(z,\omega)$ est $B\otimes A$-mesurable, où B désigne la tribu des Boréliens de T,

(b) ϕ est A_z-adapté et

(c) $\int_T E(\phi_t^2)dt<\infty$,

on peut définir l'intégrale stochastique de premier type

$$I_1(\phi)=\int_T \phi_z dW_z,$$

qui suppose une généralisation immédiate de l'intégrale d'Itô et satisfait les propiétés:

(i) isométrie: $E\{I_1(\phi)I_1(\psi)\}=\int_T E\{\phi_z\psi_z\}dz$, et

(ii) $\{I_1(\phi.1_{A_z}),z\in T\}$ est une martingale forte.

Le problème de représentation de toute martingale relative à la suite de σ-algèbres $\{\mathcal{A}_z,z\in T\}$ sous la forme d'intégrales stochastiques par rapport au processus de Wiener à deux paramètres, a obligé à E. Wong dans [3], à introduire un deuxième type d'intégrale stochastique:

Pour tout processus $\psi=\{\psi(z,z'),(z,z')\in TxT\}$ tel que

(a) $\psi(z,z',\omega)$ est $\mathcal{B}^2\otimes\mathcal{A}$-mesurable,

(b) $\psi(z,z')$ est $\mathcal{A}_{z\vee z'}$-mesurable, où $z\vee z'=(x\vee x',y\vee y')$ et

(c) $\int_T\int_T E\{\psi(z,z')^2\}dzdz'<\infty$,

on définit l'intégrale de deuxième type

$$I_2(\psi)=\int_T\int_T \psi(z,z')dW_z dW_{z'} ,$$

dont l'idée est de prendre la restriction à l'ensemble

$$G=\{(z,z')\in TxT/ \text{ z et z' sont non ordonnés}\}$$

de l'intégrale stochastique double au sens d'Itô (voir [4]).

Pour développer le calcul différentiel stochastique à deux paramètres, on doit considérer d'autres types d'intégrales stochastiques.

Pour tout processus $\phi=\{\phi_z,z\in T\}$ tel que

(a) $\phi(z,\omega)$ est $\mathcal{B}\otimes\mathcal{A}$-mesurable,

(b) ϕ est $\mathcal{A}_z$-adapté et

(c) $\int_T E(\phi_z^2)xydz<\infty$,

on peut définir une simplification de l'intégrale de deuxième type,

$$\tilde{I}_2(\phi)=\int_T \phi_z d_1W_z d_2W_z.$$

En effet, si ϕ est simple, c'est à dire, s'il existe une partition de T $\{\Delta_\nu\}_{\nu=1,\dots,k}$, $\Delta_\nu=[x_\nu,x'_\nu)x[y_\nu,y'_\nu)$ telle que $\phi=\sum_{\nu=1}^{k}\phi_\nu.1_{\Delta_\nu}$, on pose:

$$\tilde{I}_2(\phi)=\sum_{\nu=1}^{k}\phi_\nu[W_{(x_\nu,y'_\nu)}-W_{(x_\nu,y_\nu)}][W_{(x'_\nu,y_\nu)}-W_{(x_\nu,y_\nu)}] ,$$

et on prolonge cette définition par la méthode usuelle de passage à la limite en moyenne quadratique.

Cette intégrale vérifie les propiétés suivantes:

(i) isométrie: $E\{\tilde{I}_2(\phi)\tilde{I}_2(\phi')\}=\int_T E\{\phi_z\phi'_z\}xydz$,

(ii) $\{\tilde{I}_2(\phi.1_{A_z}), z\in T\}$ est une martingale et

(iii) si on écrit $\psi(z,z')=\phi_{(z\vee z')}$, alors $2\tilde{I}_2(\phi)=I_2(\psi)$.

Il faut aussi introduire les <u>intégrales stochastiques mixtes</u>: Pour tout processus $\phi=\{\phi_z, z\in T\}$ tel que

(a) $\phi(z,\omega)$ est $\mathcal{B}\otimes\mathcal{A}$-mesurable,

(b) ϕ est $\mathcal{A}^1_z$-adapté et

(c) $\int_T E(\phi_z^2)ydz<\infty$,

on construira l'intégrale

$$\tilde{I}_3(\phi)=\int_T \phi_z d_1W_z dy,$$

en prenant pour les processus simples la définition

$$\tilde{I}_3(\phi)=\sum_{\nu=1}^{k}\phi_\nu[W_{(x'_\nu,y_\nu)}-W_{(x_\nu,y_\nu)}](y'_\nu-y_\nu).$$

On a les propiétés suivantes:

(i) calcul comme une intégrale itérée:

$$\tilde{I}_3(\phi)=\int_0^1[\int_0^1\phi_{(x,y)}d_1W_{(x,y)}]dy,$$

(ii) isométrie:

$$E\{\tilde{I}_3(\phi)^2\}=2\int_T\int_0^y E\{\phi_z\phi_{(x,\eta)}\}\eta d\eta dz\leq\int_T E\{\phi_z^2\}ydz \text{ et}$$

(iii) $\{\tilde{I}_3(\phi.1_{A_z}), z\in T\}$ est une 1-martingale.

De la même façon on peut construire

$$\tilde{I}_4(\phi)=\int_T\phi_z d_2W_z dx.$$

Si ϕ est un processus tel qu'on peut définir toutes les intégrales $I_1(\phi)$, $\tilde{I}_2(\phi)$, $\tilde{I}_3(\phi)$, $\tilde{I}_4(\phi)$, alors la deuxième est orthogonale aux autres et on peut vérifier les égalités suivantes:

$$E\{\tilde{I}_3(\phi)I_1(\phi)\}=\int_T\int_0^y E\{\phi_z\phi_{(x,\eta)}\}d\eta dz,$$

$$E\{\tilde{I}_4(\phi)I_1(\phi)\}=\int_T\int_0^x E\{\phi_z\phi_{(\xi,y)}\}d\xi dz,$$

$$E\{\tilde{I}_3(\phi)\tilde{I}_4(\phi)\}=1/2\int_T\int_T E\{\phi_z\phi_{z'}\}.1_G(z,z')dzdz'$$

Les conditions plus faibles d'intégrabilité d'un processus :

$$\int_T \phi_z^2 dz<\infty,\ \int_T \phi_z^2 xydz<\infty,\quad \int_T \phi_z^2 xdz<\infty\ ,\int_T \phi_z^2 ydz<\infty,\ \text{p.s.}\ ,$$

qui entraînent des définitions des intégrales au moyen de la convergence en probabilité, et les intégrales stochastiques sur tout le domaine R_+^2, peuvent être introduites de la façon habituelle.

3. Formule de différentiation.

D'abord on peut établir la suivante formule de différentiation pour le processus

$X=\{ X_z=f(W_z,z)-f(W_{(x,0)},x,0)-f(W_{(0,y)},0,y)+f(W_{(0,0)},0,0),z=(x,y)\in T\}$,

où $f(u,x,y)$, $u\in R$, $(x,y)\in T$ est une fonction réelle.

Théorème 3.1. Si la fonction f admet les dérivées partielles continues

$$\frac{\partial^4 f}{\partial u^4},\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial u^2},\quad \frac{\partial^3 f}{\partial y\partial u^2},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},$$

on a pour tout $z\in T$:

$$X_z=M(z)+M_1(z)+M_2(z)+B(z),$$

où

$$M(z)=\int_{A_z} f'_u(W_\alpha,\alpha)dW_\alpha+\int_{A_z} f''_{uu}(W_\alpha,\alpha)d_1W_\alpha d_2W_\alpha,\quad \alpha=(\xi,\eta)\in T,$$

$$M_1(z)=\int_{A_z} D_2(f'_u)(W_\alpha,\alpha)d_1W_\alpha d\eta\quad ,$$

$$M_2(z)=\int_{A_z} D_1(f'_u)(W_\alpha,\alpha)d_2W_\alpha d\xi\quad ,$$

$$B(z)=\int_{A_z}(D_1\circ D_2)(f)(W_\alpha,\alpha)d\alpha\quad ,$$

étant D_1 et D_2 les opérateurs différentiels

$$D_1=\frac{1}{2}y\frac{\partial^2}{\partial u^2}+\frac{\partial}{\partial x},\quad D_2=\frac{1}{2}x\frac{\partial^2}{\partial u^2}+\frac{\partial}{\partial y}\ .$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer la formule d'Itô à un parametre et de faire un passage à la limite au sens de la convergence en probabilité, en prenant une suite de partitions de T, dont le diamètre tend vers zéro.□

Remarquons que le processus $M=\{M(z),z\in T\}$ est une martingale et le processus $M_i=\{ M_i(z),z\in T\}$ $(i=1,2)$ est une i-martingale, tandis que $B(z)$ a ses trajectoires absolument continues p.s. .

En conséquence, si $D_2(f)=0, D_1(f)=0$, ou $D_1(f)=D_2(f)=0$, le processus X est respectivement une 1-martingale, une 2-martingale, En généralisant, on peut considérer, comme extension de la notion de semimartingale à un paramètre, un processus $X=\{X_z,\ z\in T\}$ admettant une décomposition de la forme

$$X_z=M(z)+M_1(z)+M_2(z)+B(z)$$

avec les conditions suivantes:

$\{M(z),\ z\in T\}$ est une martingale de carré intégrable,
$\{M_1(z),\ z\in T\}$ est une 1-martingale $\mathcal{A}_z$-adaptée et pour tout $x\in[0,1]$ fixé, $\{M_1(x,y),\ y\in[0,1]\}$ a ses trajectoires absolument continues avec dérivée $N_1(x,y)$ telle que $\int_0^y E(N_1(x,\eta)^2)d\eta<\infty$,
$\{M_2(z),\ z\in T\}$ est une 2-martingale $\mathcal{A}_z$-adaptée et pour tout $y\in[0,1]$ fixé, $\{M_2(x,y),\ x\in[0,1]\}$ a ses trajectoires absolument continues avec dérivée $N_2(x,y)$ telle que $\int_0^x E(N_2(\xi,y)^2)d\xi<\infty$,
$\{B(z),\ z\in T\}$est à trajectoires absolument continues.

On se pose d'abord le problème d'exprimer le processus X sous forme d'intégrales stochastiques par rapport au processus de Wiener à deux paramètres.

Le théorème de représentation de Wong (voir [3]) fournit deux processus uniques ϕ_z, $\psi(z,z')$ I_1-intégrable et I_2-intégrable respectivement, et tels que

$$M(z)=\int_{A_z}\phi_\alpha dW_\alpha+\int_{A_z}\int_{A_z}\psi(\alpha,\alpha')dW_\alpha dW_{\alpha'}\ .$$

Pour le processus $M_1(z)$ on a obtenu le résultat suivant:

<u>Proposition 3.1</u>. Il existe un processus unique $\Gamma_1(\alpha,\eta')$, où $\alpha=(\xi,\eta)\in T$, $\eta'\in[0,\eta]$, avec les propiétés:

(a) $\Gamma_1(\alpha,\eta',\omega)$ est $\mathcal{B}'\otimes\mathcal{A}$-mesurable, où $\mathcal{B}'$ désigne les Boréliens de $T'=\{(\alpha,\eta')\ /\alpha\in T,\ \eta'\in[0,\eta]\}$.
(b) $\Gamma_1(\alpha,\eta')$ est $\mathcal{A}_\alpha$-mesurable, et
(c) $\int_{A_z}\int_0^\eta E(\Gamma_1(\alpha,\eta')^2)d\eta' d\alpha<\infty$ pour chaque $z\in T$,

tel que

$$M_1(z)=\int_{A_z}\int_0^\eta\ \Gamma_1(\alpha,\eta')dW_{(\xi,\eta')}d\eta\ .$$

<u>Remarque</u>: Cette intégrale mixte qu'on vient d'introduire, peut

être définie pour les processus $\Gamma_1(\alpha,\eta')$ vérifiant (a), (b), (c) comme une intégrale itérée:

$$I_3(\Gamma_1)=\int_0^y\int_{A(x,\eta)}\Gamma_1((\xi,\eta),\eta')dW_{(\xi,\eta')}d\eta \ ,$$

et satisfait les propiétés:

(i) si $\Gamma_1(\alpha,\eta')=\Gamma_1(\alpha)$ ne dépend pas de η', alors $I_3(\Gamma_1)=\tilde{I}_3(\Gamma_1)$,

(ii) isométrie:

$$E(I_3(\Gamma_1)^2)=2\int_{A_z}\int_0^{\eta}\int_0^{\eta_1} E(\Gamma_1((\xi,\eta),\eta')\Gamma_1((\xi,\eta_1),\eta')d\eta'd\eta_1$$
$$d\xi d\eta\leqslant\int_{A_z}\int_0^{\eta} E(\Gamma_1(\alpha',\eta)^2)d\eta'd\alpha \ ,$$

(iii) $\{I_3(\Gamma_1.1_{A_z}(\alpha)),\ z\in T\}$ est une 1-martingale.

<u>Démonstration.</u> D'après Wong (voir [3]), toute variable Y $\mathcal{A}_z$-mesurable et de carré intégrable s'écrit comme:

$$Y=\int_{A_z}\phi_\alpha dW_\alpha+\int_{A_z}\int_{A_z}\psi(\alpha,\alpha')dW_\alpha dW_{\alpha'}=\int_{A_{(x,y)}}[\phi_\alpha+\int_0^{\xi}\int_\eta^y(\psi(\alpha,\alpha')+$$
$$\psi(\alpha',\alpha))dW_\alpha]dW_\alpha=\int_{A_{(x,y)}}\Gamma^*((\xi,\eta),y)dW_\alpha \ .$$

En conséquence, si le processus $Y=\{Y_z,\ z\in T\}$ est tel que, pour chaque y fixé, $\{Y_{(x,y)},\ \mathcal{A}_{(x,y)},\ x\in[0,1]\}$ est une martingale à un paramètre de carré intégrable, il existe un seul processus $\Gamma^*(\alpha,y)$ définit par $\alpha=(\xi,\eta)\in T$, $\eta\leqslant y\leqslant 1$, $\mathcal{A}_{(\xi,y)}$-mesurable, tel que

$$Y_z=\int_{A_z}\Gamma^*(\alpha,y)dW_\alpha \ .$$

Ce résultat appliqué au processus $\{N_1(x,\eta),\ (x,\eta)\in T\}$ donné par $M_1(x,y)=\int_0^y N_1(x,\eta)d\eta$, dont on peut prouver la propiété de 1-martingale à partir de celle de M_1, donne alors

$$N_1(x\ ,\eta)=\int_{A(x,\eta)}\Gamma_1^*((\xi,\eta'),\eta)dW_{(\xi,\eta')}$$

et on prend $\Gamma_1((\xi,\eta),\eta')=\Gamma_1^*((\xi,\eta',\eta)$. $\square$

On obtient un résultat semblable pour le processus $M_2(z)$, en introduisant une nouvelle intégrale stochastique mixte qu'on désignera par:

$$I_4(\Gamma_2)=\int_{A_z}\int_0^{\xi}\Gamma_2(\alpha,\xi')dW_{(\xi',\eta)}d\xi \ ,$$

définie pour les processus $\Gamma_2(\alpha,\xi')$, où $\alpha=(\xi,\eta)\in T$ et $\xi'\in[0,\xi]$, vérifiant les propiétés

(a) $\Gamma_2(\alpha,\xi',\omega)$ est $\mathcal{B}''\otimes\mathcal{A}$-mesurable, où $\mathcal{B}''$ désigne les Boréliens de $T''=\{(\alpha,\xi')\ /\alpha\in T,\xi'\in[0,\xi]\}$

(b) $\Gamma_2(\alpha,\xi')$ est $\mathcal{A}_\alpha$-mesurable, et

(c) $\int_{A_z}\int_0^\xi E(\Gamma_2(\alpha,\xi')^2)d\xi' d\alpha<\infty$.

Le théorème suivant n'est que la conclusion des propositions précédentes.

<u>Théorème 3.2</u>. Il existent des processus ϕ, I_1-intégrable, ψ, I_2-intégrable, Γ_1, I_3-intégrable, Γ_2, I_4-intégrable et Γ,$\mathcal{B}\otimes\mathcal{A}$-mesurable et $\mathcal{A}_z$-adapté, tels que

$$X_z=\int_{A_z}\phi_\alpha dW_\alpha+\int_{A_z}\int_{A_z}\psi(\alpha,\alpha')dW_\alpha dW_{\alpha'}+\int_{A_z}\int_0^\eta\Gamma_1(\alpha,\eta')dW_{(\xi,\eta')}d\eta+\int_{A_z}\int_0^\xi\Gamma_2(\alpha,\xi')dW_{(\xi',\eta)}d\xi+\int_{A_z}\Gamma_\alpha d\alpha\ .$$

Finalement, cette expression intégrale du processus est assez générale, dans le sens où le processus

$$Y_z=f(X_z,z)-f(X_{(x,0)},x,0)-f(X_{(0,y)},0,y)+f(X_{(0,0)},0,0)$$

admet une expression semblable, et on peut énoncer une formule de différentiation plus générale:

<u>Théoreme 3.3</u>. Avec les hypothèses du théorème 3.1., on a

$$Y_z=\int_{A_z}\phi^*_\alpha dW_\alpha+\int_{A_z}\int_{A_z}\psi^*(\alpha,\alpha')dW_\alpha dW_{\alpha'}+\int_{A_z}\int_0^\eta\Gamma^*_1(\alpha,\eta')dW_{(\xi,\eta')}d\eta+\int_{A_z}\int_0^\xi\Gamma^*_2(\alpha,\xi')dW_{(\xi',\eta)}d\xi+\int_{A_z}\Gamma^*_\alpha\,d\alpha\ ,$$

où les coefficients de cette formule sont donnés par:

$$\phi^*_\alpha=f'_u(X_\alpha,\alpha)\phi_\alpha,$$

$$\psi^*(\alpha,\alpha')=f'_u(X_{\alpha\vee\alpha'},\alpha\vee\alpha')\psi(\alpha,\alpha')+f''_{uu}(X_{\alpha\vee\alpha'},\alpha\vee\alpha')\delta_1(\alpha,\eta\vee\eta')$$

$$\delta_2(\alpha',\xi\vee\xi')-\frac{1}{2}\phi_\alpha\phi_{\alpha'}f''_{uu}(X_{\alpha\vee\alpha'},\alpha\vee\alpha'),\qquad \text{où}$$

$$\delta_1(\alpha,\eta_1)=\phi_\alpha+\int_0^\xi\int_\eta^{\eta_1}(\psi(\alpha,\alpha'')+\psi(\alpha'',\alpha))dW_{\alpha''}+\int_\eta^{\eta_1}\Gamma_1((\xi,\eta''),\eta)d\eta'',$$

et $$\delta_2(\alpha,\xi_1)=\phi_\alpha+\int_\xi^{\xi_1}\int_0^\eta(\psi(\alpha,\alpha'')+\psi(\alpha'',\alpha))dW_{\alpha''}+\int_\xi^{\xi_1}\Gamma_2((\xi'',\eta),\xi)d\xi'',$$

$$\Gamma_1^*(\alpha,\eta')=f'_u(X_\alpha,\alpha)\Gamma_1(\alpha,\eta')+f''_{uu}(X_\alpha,\alpha)\delta_1((\xi,\eta'),\eta)\gamma_1(\alpha)+$$
$$D_2(f'_u)(X_\alpha,\alpha)\delta_1((\xi,\eta'),\eta),\quad \text{où}$$

$$\gamma_1(\alpha)=\int_{A_\alpha}\Gamma_1((\xi',\eta),\eta')dW_{\alpha'}+\int_0^\xi\Gamma(\xi',\eta)d\xi' ,$$

$$\Gamma_2^*(\alpha,\xi')=f'_u(X_\alpha,\alpha)\Gamma_2(\alpha,\xi')+f''_{uu}(X_\alpha,\alpha)\delta_2((\xi',\eta),\xi)\gamma_2(\alpha)+$$
$$D_1(f'_u)(X_\alpha,\alpha)\delta_2((\xi',\eta),\xi),\quad \text{où}$$

$$\gamma_2(\alpha)=\int_{A_\alpha}\Gamma_2((\xi,\eta'),\xi')dW_{\alpha'}+\int_0^\xi\Gamma(\xi,\eta')d\eta' ,$$

$$\Gamma^*(\alpha)=f'_u(X_\alpha,\alpha)\Gamma(\alpha)+f''_{uu}(X_\alpha,\alpha)\gamma_1(\alpha)\gamma_2(\alpha)+D_1(f'_u)(X_\alpha,\alpha)\gamma_1(\alpha)+$$
$$D_2(f'_u)(X_\alpha,\alpha)\gamma_2(\alpha)+(D_1\circ D_2)(X_\alpha,\alpha),$$

étant $D_1=\frac{1}{2}A_2(x,y)\frac{\partial^2}{\partial u^2}+\frac{\partial}{\partial x}$ et $D_2=\frac{1}{2}A_1(x,y)\frac{\partial^2}{\partial u^2}+\frac{\partial}{\partial y}$, où

$A_1(x,y)$ ($A_2(x,y)$) est, pour chaque $y\in[0,1]$ ($x\in[0,1]$), le processus croissant continu associé à la partie de martingale dans la décomposition de la semimartingale à un paramètre $\{X_{(x,y)},\ x\in[0,1]\}$ ($\{X_{(x,y)},\ y\in[0,1]\}$).

Démonstration: Il s'agit de déduire d'abord ce qu'on peut écrire formellement comme

$$Y_z=\int_{A_z}[f'_u dX+f''_{uu}d_1Xd_2X+D_1(f'_u)d_2Xd\xi+D_2(f'_u)d_1Xd\eta+$$
$$(D_1\circ D_2)(f)d\xi d\eta],$$

on substitue ensuite X par sa représentation intégrale. □

BIBLIOGRAPHIE.

[1]. Cairoli, R. and Walsh, J.B.: "Stochastic integrals in the plane". Acta Mathematica, 134, 111-183 (1975).

[2] Park, W.J.:"A multiparameter Gaussian process". Ann. Math. Satist. 41, 1582-1595 (1970).

[3] Wong, E. and Zakai, M.: "Martingales and stochastic integrals for processes with a multi-dimensional parameter". Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete, 29, 109-122 (1974).

[4] Itô, K.: "Multiple Wiener integral", J. Math. Soc. Japan, 3, 157-169 (1951)