ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

D. MOUCHTARI

La topologie du type Sazonov pour les Banach et les supports hilbertiens

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 61, série *Mathématiques*, n° 14 (1976), p. 77-87

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1976__61_14_77_0>

LA TOPOLOGIE DU TYPE SAZONOV POUR LES BANACH ET LES SUPPORTS HILBERTIENS

D. MOUCHTARI, UNIVERSITE DE CLERMONT

1. Introduction

Notations : $\{E, |\cdot|\}$ est un espace vectoriel métrique complet (e.v.m.c.), $V_\varepsilon(x)$ un -voisinage de x, $V_\varepsilon \overset{\text{déf}}{=} V_\varepsilon(0)$. Pour tous les espaces de variables aléatoires $L^0(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on utilise les notations
L^0, $f = \int_\Omega \frac{|f|}{1+|f|} \, dP$.

Soit E un espace vectoriel topologique séparé par son dual E'. $\mathcal{L}$ l'algèbre des ensembles cylindriques sur E.

Chaque application linéaire $\phi : E' \to L^0$ définit une mesure cylindrique μ_ϕ sur $(E, \mathcal{L})$. La principale question pour μ_ϕ est la suivante : quand peut-elle être prolongée en une mesure de Radon P_ϕ sur E ? (On dira que μ_ϕ est de Radon). Dnas le cas où E est un Hilbert séparable, Sazonov [1] a trouvé une condition nécessaire et suffisante pour que μ_ϕ soit de Radon : la continuité de ϕ par rapport à la topologie $\mathcal{T}$ définie par la famille $(.,.)_{(K,P)}$ de produits scalaires (K compact de E, P probabilité de Radon sur K) :

$$(x', y')_{(K,P)} = \int_K \langle x', . \rangle \langle y', . \rangle \, dP(.). \tag{1}$$

Définition 1 :

Soit E un e.v.t. séparé par son dual E'. Une topologie $\mathcal{T}$ sur E' est dite S-topologie si la $\mathcal{T}$-continuité d'une application linéaire $\phi : E' \to L^0$ est la condition nécessaire et suffisante pour que μ_ϕ soit de Radon.

Définition 2 :

Disons que E est de type (S) si sur E' il existe au moins une S-topologie.

Dans leurs thèses, Sazonov et Sudakov ont démontré que [2] la topologie définie par les produits scalaires (1) n'est pas une S-topologie pour

Proposition 2

Soit E un espace de type (S). Alors, $\mathcal{S}$ est une S-topologie sur E'.

Démonstration : Il suffit de démontrer que $\mathcal{S}$ est suffisante. Soit ϕ $\mathcal{S}$-continue. Soit $V(\phi_n ; \delta_n)$ une suite de voisinages de 0 dans $\mathcal{S}$ telle que $V(\phi_n ; \delta_n) \subset V(\phi ; 1/n)$. Soit $\tilde{\mathcal{T}}$ une S-topologie dans E'. Alors, par la définition des S-topologies, toutes les ϕ_n sont $\tilde{\mathcal{T}}$-continues ; donc ϕ est $\tilde{\mathcal{T}}$-continue et μ_ϕ est de Radon.

2. Les espaces de type (S)

Proposition 3

Soit E un e.v.m.c. admettant la propriété d'approximation, c'est à dire qu'il existe une suite $T_n : E \to E$ d'opérateurs linéaires continus de rang fini telle que, pour chaque $x \in E$, $\lim\limits_{n\to\infty} T_n x = x$. Alors E est séparé par son dual.

En effet, chaque fonctionnelle $x^{(n)} \circ T_n : E \to R$, où $x^{(n)}$ est une forme linéaire sur $T_n E$, est une forme linéaire continue sur E.EE est alors séparé par l'enveloppe algébrique de l'ensemble de ces fonctionnelles : en effet. pour tous x, y distincts dans E, on peut trouver n tel que $T_n x \neq T_n y$ et trouver une forme linéaire x' sur $T_n(E)$ qui sépare ces points.

Proposition 4

Soit E, F, deux e.v.m.c., $\{T_n\}$ une suite d'opérateurs de rang fini qui converge vers l'opérateur continu T. Alors, pour chaque $\varepsilon > 0$, on peut trouver $\delta > 0$ tel que, pour chaque n, $T_n V_\delta \subset V_\varepsilon$.

Démonstration : Posons $A = \bigcap_n T_n^{-1} V_{\varepsilon/2}$. A est fermé et absorbant, donc de catégorie 2 ; donc, pour un $x \in A$, $V_\delta(x) \subset A$. Alors, pour chaque $y \in V_\delta$, pour chaque n $T_n y = T_n y' - T_n x$, où $y' \in V_\delta\{x\}$,

$$|T_n y|_o \leq |T_n y'|_o + |T_n x|_o \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \leq \varepsilon .$$

Théorème 1

Soit E un sous-espace vectoriel fermé de L^o admettant la propriété d'approximation. Alors E est un espace de type (S).

Les opérateurs de rang fini définissant la propriété d'approximation seront toujours désignés par T_n ; et on notera T'_n l'opérateur transposé de T_n.

Nous utiliserons les lemmes préliminaires :

Lemme 1 : Soit E un espace vectoriel topologique séparé par son dual E'. Une probabilité cylindrique μ sur E se prolonge d'une façon unique en une probabilité de Radon P sur E si et seulement si pour chaque $\varepsilon > 0$ on peut trouver un compact K_ε tel que pour chaque $C \in \mathcal{L}$, $C \cap K_\varepsilon = \emptyset$, $\mu(C) < \varepsilon$. (Voir par exemple [7]).

Lemme 2 : Soit E un e.v.m.c. admettant la propriété d'approximation. Alors $\phi : E' \to L^o$ définit une probabilité cylindrique prolongeable en une mesure de Radon si et seulement si pour chaque $\varepsilon > 0$ on trouve $n(\varepsilon)$ tel que $\mu_\phi C < \varepsilon$ chaque fois que $C \in \mathcal{L}$, $n > n(\varepsilon)$ et $C \cap V_\varepsilon \{T_n E\} = \emptyset$. (Conséquence immédiate du lemme 1.)

Lemme 3 : Supposons remplies les conditions du théorème 1. Soit $\phi : E' \to L^o$ linéaire faiblement séquentiellement continue. Alors μ_ϕ est de Radon si et seulement si pour chaque $\varepsilon > 0$ on peut trouver $n(\varepsilon)$ et $p(\varepsilon)$ entiers tels que

$$\int_{E'} |\phi\, T'_p|_o \, dP_{T_m - T_n} < \varepsilon \qquad (2)$$

dès que $m > n > n(\varepsilon)$, $p > p(\varepsilon)$. (Ici l'application $T_m - T_n : E \to L^o$ définit la probabilité de Radon $P_{T_m - T_n}$ sur E').

Démonstration :

Remarquons que si P_ϕ est une mesure de Radon sur E, f une fonction bornée Lusin-mesurable sur E, T un opérateur continu de E, T' son transposé

$$\int_E f(x)\, dP_{\phi T'} = \int_E f(Tx)\, dP_\phi \; . \tag{3}$$

Nécessité :

$$\int_{E'} |\phi T_p'(x')|_o \, P_{T_m - T_n} = \int_{E'} \int_E \frac{|\langle x,x'\rangle|}{1+|\langle x,x'\rangle|} \, dP_{\phi T_p'} \, dP_{T_m - T_n}$$

$$= \int_E |(T_m - T_n)(x)|_o \, dP_{\phi T_p'} = \int_E |(T_m - T_n)T_p(x)|_o \, dP_\phi \; .$$

$(T_m - T_n)\, T_p(x)$ converge vers 0 quand p, m, n $\to \infty$. En effet, $(T_m - T_n)x$ converge vers 0, $(T_m - T_n)(T_p - Id)(x)$ converge vers 0,parce que, pour δ fixé, $|T_p x - x|_o < \delta$ pour p assez grand et (proposition 4) pour $\varepsilon > 0$ fixé, on peut trouver $\delta > 0$ tel que $|(T_m - T_n)(x)|_o < \varepsilon$ chaque fois que $|x|_o < \delta$.

Alors

$$\limsup_{p,n,m \to \infty} \{x : |(T_m - T_n)T_p x|_o > \varepsilon/2\} = \emptyset \;;$$

ainsi, pour chaque $\varepsilon > 0$ et pour $m,n > n(\varepsilon)$, $p > p(\varepsilon)$

$$P_\phi \{x : |(T_m - T_n)T_p x|_o > \varepsilon/2\} < \varepsilon/2 \quad ;$$

et donc

$$\int_E |(T_m - T_n)T_p x|_o \, dP_\phi(x) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \; .$$

Suffisance : Supposons que (2) soit vrai, mais que μ_ϕ ne soit pas de Radon. Alors, selon le lemme 2, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour chaque $n \in N$ il existe C_n dans $\mathcal{L}$ disjoint de $V_\varepsilon\{T_n E\}$ tel que $\mu_\phi\, C_n > \varepsilon$. Soit $\tilde{C}_n$ un espace vectoriel de dimension finie dans E' tel que $C_n + \tilde{C}_n^\circ = C_n$. Alors C_n est contenu dans

$$B_n = \{x : (x + \tilde{C}_n^\circ) \cap V_\varepsilon \{T_n E\} = \emptyset\}$$

et $\mu_\phi\, B_n > \varepsilon$. L'intersection des ensembles $V_{\varepsilon/2}\{T_n E\}$ et $V_{\varepsilon/2}\{B_n\}$ est vide et ces deux ensembles sont ouverts. $V_{\varepsilon/2}\{B_n\} + \tilde{C}_n^\circ = V_{\varepsilon/2}\{B_n\}$, donc $V_{\varepsilon/2}\{B_n\}$ est cylindrique. Comme $T_p' x' \to x'$ faiblement pour tout x',

$\phi T_p' x'$ converge vers μ_ϕ cylindriquement. Donc, $\liminf_{p\to\infty} P_{\phi T_p'} V_{\varepsilon/2}\{B_n\} > \varepsilon$ et pour $p > p_o$, $P_{\phi T_p'} V_{\varepsilon/2}\{B_n\} > \varepsilon$. En appliquant le théorème de Lebesgue nous avons pour $n, m > n(\varepsilon^2/4)$, $p > p(\varepsilon^2/4)$:

$$\int_E |(T_n - Id)(x)|_o \, dP_{\phi T_p'} = \lim_{m\to\infty} \int_E |(T_n - T_m)(x)|_o \, dP_{\phi T_p'} \leq \varepsilon^2/4 .$$

Mais $x \in V_{\varepsilon/2}\{B_n\}$ entraine $|(T_n - Id)x|_o > \varepsilon/2$, et en prenant $p > p_o$, nous avons

$$\int_E |(T_n - Id)(x)|_o \, dP_{\phi T_p'} > \int_{V_{\varepsilon/2}\{B_n\}} |(T_n - Id)(x)|_o \, dP_{\phi T_p'} > (\varepsilon/2).\varepsilon \; ;$$

nous obtenons ainsi une contradiction.

<u>Démonstration du théorème</u> :

Il suffit de démontrer que la topologie $\mathcal{S}$ est suffisante. Soit $\phi : E' \to L^o$ $\mathcal{S}$-continue.

(a) <u>ϕ est séquentiellement faiblement continue</u>. Soit $x_n' \to 0$ faiblement. Donc $x_n'(x) \to 0$ partout sur E. Alors, pour tout $\bar\phi \in \underline{\underline{S}}$, $x_n' \to 0$ $P_{\bar\phi}$-presque partout ; donc $x_n' \overset{P_{\bar\phi}}{\to} 0$; donc $\bar\phi(x_n') \overset{P}{\to} 0$. Par définition de ϕ, pour chaque $\varepsilon > 0$ on peut trouver $\delta > 0$ et $\bar\phi \in \underline{\underline{S}}$ tels que $|\phi(x')|_o < \varepsilon$ chaque fois que $|\bar\phi(x')|_o < \delta$. Mais pour $n > n(\delta)$, $|\bar\phi(x_n')|_o < \delta$; et donc $|\phi(x_n')|_o < \varepsilon$.

(b) <u>ϕ a la propriété (2)</u>. $\bar\phi$ a la propriété (2). Donc, pour $m,n > n(\varepsilon\delta)$, $p > p(\varepsilon\delta)$, nous avons

$$\begin{aligned}\varepsilon\delta &> \int_{E'} |\bar\phi T_p'(x')|_o \, dP_{T_m - T_n} \\ &> \int_{E'/V(\bar\phi T_p',\delta)} |\bar\phi T_p'(x')|_o \, dP_{T_m - T_n} \\ &> \delta \, . \, P_{T_m - T_n}\{E'/V(\bar\phi\, T_p', \delta)\} .\end{aligned}$$

Donc, $P_{T_m - T_n}(E'/V(\bar\phi\, T_p', \delta)) < \varepsilon$. Comme $|\bar\phi T_p'(x')|_o < \delta$ entraine $|\phi T_p'(x')|_o < \varepsilon$, nous avons pour tous $m > n > n(\varepsilon\delta)$, $p > p(\varepsilon\delta)$

$$\int_{E'} |\phi T_p'(x')| \quad dP_{T_m - T_n}(x') < 2\varepsilon .$$

(c) Donc, par le lemme 3, μ_ϕ est de Radon.

La démonstration du théorème est analogue à celle du théorème 1 [8] . Ici les rôles de E et E' sont échangés.

Théorème 2 :

a) Le produit E d'une suite $\{E_n\}$ d'espaces de type (S) est un espace de type (S).

b) Tout sous-espace fermé E_o d'un espace localement convexe E de type (S) est un espace de type (S).

c) La somme directe E d'une suite $\{E_n\}$ d'espaces de type (S) est un espace de type (S).

Démonstration :

(a) Soit $\phi : E' = \sum E_n' \to L^o$ $\mathcal{S}$-continue. Comme la projection sur $E^{(n)} = \prod_{i=1}^{n} E_i$ d'une mesure de Radon sur E est une mesure de Radon, la topologie sur $E^{(n)'} = \sum_{i=1}^{n} E_i'$ induite par $\mathcal{S}$ est identique à la topologie $\mathcal{S}$ pour le couple $(E^{(n)}, E^{(n)'})$. Alors, pour chaque entier n, la restriction de ϕ à $\sum_{i=1}^{n} E_i'$ définit une mesure de Radon sur $E^{(n)}$. Il est bien connu que μ_ϕ est alors de Radon sur E.

(b) Soit $\phi : E_o' = E'/E^o \to L^o$ $\mathcal{S}$-continue. Chaque mesure de Radon sur E_o définit une mesure de Radon sur E ; donc l'application $\Psi : E' \to E'/E_o^o \to L^o$, composée de ϕ et de l'application canonique, est $\mathcal{S}$-continue dans E'. Donc μ_Ψ est de Radon sur E et l'application du corollaire II.2.4. [9] nous donne que μ_ϕ est de Radon.

(c) En utilisant les mêmes raisonnements que dans la démonstration de (a) et de (a) du théorème 1, on démontre que pour chaque $\phi : E' \to L^o$ linéaire continue par rapport à $\mathcal{S}$ sa restriction à $\prod_{i=1}^{n} E_i'$ définit une mesure de Radon sur $\sum_{i=1}^{n} E_i$ et que ϕ est séquentiellement faiblement continue sur E'. Donc il suffit de démontrer le lemme suivant.

<u>Lemme 4</u> : Soit $E = \sum_{i=1}^{\infty} E_i$, $E' = \prod_{i=1}^{\infty} E_i'$. Soit $\phi : E' \to L^0$ linéaire séquentiellement continue telle que pour chaque n la restriction $\phi^{(n)}$ de ϕ à $E^{(n)\prime} = \prod_{i=1}^{n} E_i'$ définit une mesure de Radon sur $E^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} E_i$. Alors μ_ϕ est de Radon.

<u>Démonstration</u> :

(a) Posons ${}^{(n)}E = \sum_{i=n+1}^{\infty} E_i$; et pour $v \in E'$, posons

$$v^{(n)}(x) = \begin{cases} v(x) & \text{si } x \in E^{(n)} \\ 0 & \text{si } x \in {}^{(n)}E \end{cases} \quad ; \quad {}^{(n)}v = v - v^{(n)} \ ;$$

$\phi^{(n)}(v) = \phi(v^{(n)})$ et ${}^{(n)}\phi(v) = \phi({}^{(n)}v)$.

Pour chaque $\varepsilon > 0$ on peut trouver $n(\varepsilon)$ assez grand tel que, pour tout $v \in E'$,

$$P\{\omega : {}^{(n(\varepsilon))}\phi(v)(\omega) = 0\} \geq 1 - \varepsilon/2.$$

Sinon il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour chaque n on peut trouver v_n dans E' et $\delta_n > 0$ tels que

$$P\{\omega : |\phi({}^{(n)}v_n)(\omega)| > \delta_n\} > \varepsilon/4.$$

Cela n'est pas possible, parce que $\delta_n^{-1} \cdot {}^{(n)}v_n$ converge faiblement vers 0, donc $\phi(\delta_n^{-1} \cdot {}^{(n)}v_n)$ converge en probabilité vers 0.

(b) Choisissons un compact $K(\varepsilon) \ni 0$ dans $E^{(n(\varepsilon))}$ tel que pour chaque ensemble cylindrique C de $E^{(n(\varepsilon))}$ disjoint de $K(\varepsilon)$ on ait $\mu_{\phi^{(n(\varepsilon))}}(C) < \varepsilon/2$. Démontrons que $K(\varepsilon)$ est ε-compact pour μ_ϕ sur E. Supposons le contraire : il existe un cylindre C_0 de E disjoint de $K(\varepsilon)$ tel que $\mu_\phi(C_0) > \varepsilon$;

$$C_0 = \{x : (\langle x,v_1\rangle \ldots \langle x,v_k\rangle) \in B\}$$

où B est un ensemble borélien dans R^k. D'après (a),

$$\mu_\phi\{x : \langle x, {}^{(n(\varepsilon))}v_i\rangle = 0 \text{ pour chaque } i\} \geq 1 - \varepsilon/2 \quad .$$

Donc

$$\mu_{\phi(n(\varepsilon))}(C_o \cap E^{(n)}) = \mu_\phi(C_o \cap \{x : \langle x, {}^{(n(\varepsilon))}v_i\rangle = 0 \text{ pour}$$

chaque $i\}) > \varepsilon/2$.

Corollaire : Tout sous-espace fermé de $L^1[0,1]$ est un espace de type (S).

3. Quelques caractérisations de Banach et de Fréchet de type (S)

Les résultats que je cite ici (sans démonstration) sont tout à fait semblables à ceux de [10] .

Théorème 3

Soit E un espace p-normé de type (S) séparable complet. Alors E est plongeable dans un L^q pour $q < p$, donc dans un L^o.

Théorème 4

Un espace de Fréchet de type (S) est plongeable dans un L^o.

Théorème 5

Soit E un Fréchet de type (S). La topologie $\mathcal{S}_p$, $0 < p < 1$ définie par les voisinages

$$\{x' : \int_K |\langle x,x'\rangle|^p \, dP \leq 1\} \tag{*}$$

(K compact de E, P probabilité de Radon sur K) est une S-topologie.

Théorème 6

Soit E un Banach de type (S) et de type q. Si $0 < p < q$, la topologie $\mathcal{S}_p$ définie par les voisinages (*) est une S-topologie.

Théorème 7

Soit E un Banach de type (S) tel que la S-topologie dans E' soit définie par des voisinages convexes de type (p). Alors, E est de type p.

Théorème 8

Soit E un Fréchet dont la topologie est définie par une suite de produits scalaires. Alors, dans E', il existe une S-topologie définie par des produits scalaires.

Théorème 9

Soit E un Fréchet tel que dans E' il existe une S-topologie définie par des produits scalaires. Alors, la topologie de E est définie par des produits scalaires.

Définition 5 :

Disons qu'une mesure μ sur E a son support hilbertien si μ est concentrée sur les compacts hilbertiens.

Corollaire : Soit E un Fréchet. Si chaque mesure de Radon sur E a un support hilbertien, la topologie de E est définie par des produits scalaires.

En effet, dans ce cas, la topologie sur E' définie par toutes les normes de type (*) où p = 2 et K compact est une S-topologie.

Bibliographie

[1] Sazonov V.V., Une remarque sur les fonctionnelles caractéristiques. Teoria verojatnostei i primenenia 3, N2 (1958) (en russe).

[2] Sazonov V.V., Dissertation candidate, Moscou, 1961 (en russe)

[3] Sudakov V.N., Dissertation candidate, Leningrad, 1962 (en russe).

[4] Sudakov V.N., Veršik A.M., Les questions topologiques de la théorie de la mesure dans les espaces linéaires, Uspekhi Mat. Nauk, 17, N4 (1962), 217-219 (en russe).

[5] Sudakov V.N., Veršik A.M., Les mesures de probabilité dans les espaces de dimension infinie. Zapiski Nauch Seminarov LOMI, Vol. 12 (1969), 7-67 (en russe).

[6] Dudley R.M., Random linear functionals. Trans. Amer. Math. Soc. 136 (1969) 1-24.

[7] Dudley R.M., Feldman J., Le Cam L., On seminorms and probabilities, and abstract Wiener spaces. Ann. of Math. 93 (1971), 390-408.

[8] MOUCHTARI D. Kh., Some general questions of the theory of probability measures in linear spaces, Teoria verojatnostei i primenenia XVIII, N1 (1973) 66-77 (en russe).

[9] Badrikian A., Chevet S., Mesures cylindriques, Espaces de Wiener et fonctions aléatoires gaussiennes, Lecture Notes in Mathematics n° 379 (1974).

[10] MOUCHTARI D. Kh., Sur l'existence d'une topologie du type Sazonov sur un espace de Banach. Séminaire Maurey-Schwartz, 1975-76, Ecole Polytechnique Exp. XVII.