ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

G. LETAC

Récurrence des librairies sur un arbre

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 61, série *Mathématiques*, n° 14 (1976), p. 71-76

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1976__61_14_71_0>

RECURRENCE DES LIBRAIRIES SUR UN ARBRE

G. LETAC, UNIVERSITE DE TOULOUSE

1) L'Arbre

Soit (T, A) un arbre, c'est à dire un graphe non orienté, connexe et sans cycle. On suppose que l'ensemble T des sommets est fini ou dénombrable et on distingue un sommet ω dans T ; T devient ainsi un ensemble ordonné partiellement : $s \leqslant t$ si l'unique chemin allant de ω à t passe par s. L'arbre est dit linéaire s'il est totalement ordonné. Si $t \in T$, on note :

$\{\omega = t_0(t), t_1(t), \ldots, t_k(t) = t\}$ l'unique chemin allant de ω à t, avec $t_0(t) < t_1(t) < \ldots < t_k(t)$. On définit enfin pour tout t de T la permutation τ_t de T par $\tau_t(s) = s$ si $s \nleqslant t$,

$$\tau_t\,(t_i(t)) = t_{i-1}(t) \text{ si } 0 < i \leqslant k$$

$$\tau_t(\omega) = t.$$

Attention, τ_t n'est pas un automorphisme d'arbre. Il est clair que le semi groupe pour la composition engendré par les τ_t est le groupe dénombrable G_0 des permutations de T ne déplaçant qu'un nombre fini de τ.

2) Livres rangés sur l'arbre

Soit maintenant B un ensemble de même cardinalité que T, dont les éléments b sont appelés livres. Soit e une bijection de T sur B (ce qui revient à placer le livre b = e(t) au sommet de T). Notons $E = e \circ G_0$: c'est l'ensemble dénombrable des rangements π des livres ne différant du rangement e qu'en un nombre fini de points. Nous allons introduire une transformation g(b) de E, qui correspond à changer le rangement π lorsqu'on prend le livre b (à la place $t = \pi^{-1}(b)$), qu'on le place en ω et en faisant "glisser" les livres se trouvant sur l'unique chemin allant de ω à t.

La définition de $g(b) : E \to E$ est

$$g(b)\pi = \pi \circ \pi_{\pi^{-1}(b)},$$

Une autre transformation de E nous sera utile;si $t \in T$, on définit $h(t) : E \to E$ par :

$$h(t)\pi = \pi \circ \tau_t^{-1} .$$

Attention : il y a une transformation $g(b)$ par livre b, une transformation $h(t)$ par place t. Ni $g(b)$ ni $h(t)$ ne sont des bijections de E.

3) Librairie sur l'arbre

Soit maintenant une suite $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ de variables aléatoires à valeurs dans B, indépendantes et de même loi définie par :

$$P\left[X_n = b\right] = p_b.$$

(X_n est le livre lu à l'instant n).

On définit alors une suite $Y = (Y_n)_{n=0}^{\infty}$ de variables aléatoires à valeurs dans E par :

$$Y_o = e \quad , Y_{n+1} = g\left[X_{n+1}\right] Y_n$$

Y_n est donc le rangement des livres à l'instant n. Y constitue à l'évidence une chaîne de Markov sur E. La classe de e est essentielle et apériodique lorsque $p_{e(s)} = 0$ implique que $p_{e(t)} = 0$ pour tout $t \geqslant s$, hypothèse que nous ferons désormais. Cette chaîne est appelée une librairie, et on s'intéresse à ses propriétés de récurrence.

Si l'arbre (T, A) est linéaire, la question est résolue dans : G. Letac (1974). Nous démontrons ici (théorème 2) un résultat conjecturé par P. Nelson, à savoir que notre librairie n'est jamais récurrente positive dans le cas infini non linéaire.

4) Une mesure stationnaire

Théorème 1 : Si $\pi \in E$ on pose $q_s(\pi) = \sum_{s \leqslant t} p_{\pi(t)}$.

Alors $u_\pi = \prod_{s \in T} \frac{q_s(e)}{q_s(\pi)}$ est une mesure stationnaire de la librairie.

<u>Esquisse de démonstration</u> : On vérifie facilement que $(u_\pi)_{\pi \in E}$ est une mesure stationnaire si et seulement si :

$$\sum_{t \in T} p_{\pi(\omega)} \frac{u_{h(t)\pi}}{u_\pi} = 1 \quad \text{pour tout } \pi .$$

Or la définition de u_π entraine que

$$\frac{u_{h(t)\pi}}{u_\pi} = \prod_{s \in T} \frac{q_s(\pi)}{q_s(h(t)\pi)} = \prod_{s \leqslant t} \frac{q_s(\pi)}{q_s(\pi) - p_{\pi(s)} + p_{\pi(\omega)}}$$

car $q_s(h(t)\pi) - q_s(\pi) = p_{\pi(\omega)} - p_{\pi(s)}$ si $s \leqslant t$

$= 0$ sinon.

Posant $\alpha_s = p_{\pi(s)}$, $\beta_s = \sum_{s \leqslant t} \alpha_t$, il reste à vérifier que :

$$\sum_t \alpha_\omega \prod_{s \leqslant t} \frac{\beta_s}{\beta_s - \alpha_s + \alpha_\omega} = 1$$

si $\alpha_t \geqslant 0$ et $\sum_{t \in T} \alpha_t = 1$; une démonstration probabiliste de cette identité se fait en considérant une chaîne de Markov $(Z_n)_{n=0}$ sur T, d'état initial $Z_0 = \omega$ et de transition :

$$p_{s,t} = \frac{\alpha_t}{\beta_s - \alpha_s + \alpha_\omega} \qquad \text{si} \quad s \leqslant t \quad \text{et } |t - s| = 1,$$

$$p_{s,\omega} = \frac{\alpha_\omega}{\beta_s - \alpha_s + \alpha_\omega}$$

Le premier membre de l'égalité à démontrer est la probabilité $P[\exists n > 0 ; Z_n = \omega]$. Comme :

$$P[Z_{n+1} = \omega | Z_n] = \frac{\alpha_\omega}{\beta_{Z_n} - \beta_{Z_n} + \alpha_\omega} \geqslant \frac{\alpha_\omega}{1 + \alpha_\omega} > 0 ,$$

le théorème du renouvellement permet de conclure.

5) Le cas fini

Si (T, A) est un arbre fini, on peut lui associer une caractéristique fort utile : c'est le nombre :

$$K(T) = \frac{|T|\,!}{\prod_{t \in T} \# \{s \; ; \; s \geqslant t\}}$$

où $|T|$ est le nombre de sommets. On montre sans difficulté que K(T) est un entier positif.

Dans le cas où T est fini, le théorème précédent peut être précisé grâce à la proposition suivante :

Proposition 1 : Si T est fini, alors :

$$\sum_{\pi \in E} \frac{1}{q_t(\pi)} = \frac{K(T)}{\prod_{b \in B} p_b}$$

La démonstration est assez fastidieuse : elle procède par récurrence non sur le nombre de sommets de T, mais sur le nombre N de branches "issues du tronc" : convenons de dire que s appartient au tronc si pour tout t de T, ou bien $s \leqslant t$ ou bien $s \geqslant t$. Si s_o est le plus grand élément du tronc, N est le nombre de t de T tels que $t \geqslant s_o$ et $|s - t_o| = 1$.

L'utilité de K(T) est qu'il donne une mesure de la linéarité de l'arbre. En particulier K(T) = 1 si et seulement si l'arbre est linéaire. Semblablement :

Proposition 2 : Soit T infini et $\mathbb{N} \to T$ une bijection telle que $t_o = \omega$ et $T_k = \{t_o, t_1, \ldots, t_k\}$ soit un arbre pour la structure induite. Alors si T n'est pas linéaire, $K(T_k) \xrightarrow[k\,\infty]{} +\infty$.

Démonstration : Soit t_o le plus grand élément du tronc. Soit t_o tel que $t_{n_o} = s_o$. Alors $K(T_k) = 1$ si $k \leqslant n_o$. Prenant k assez grand, soit N_k le nombre de branches issues du tronc de T_k ; N_k est croissant et $\geqslant 2$ à partir d'un certain rang, T n'étant pas linéaire. Si $s_1, s_2, \ldots, s_{N_k}$ sont supérieurs à s_o et tels que $|s_i - s_o| = 1$ avec $i = 1, 2 \ldots N_k$ il est clair que :

$$K_{T_k} \geqslant \frac{(k-n_o)\,!}{m_1\,!\; m_2\,! \ldots m_{N_k}\,!}$$

où $m_i = \# \{s \ ; \ s \in T_k$ et $s \geqslant s_i\}$ pour $i = 1, \ldots, N_k$ comme on a $m_i \geqslant 1$ et $m_1 + \ldots + m_{N_k} = k-n_o$. On a $K_{T_k} \geqslant k - n_o$ et donc $K_{T_k} \xrightarrow[k \infty]{} \infty$.

6) La librairie dans le cas infini non-linéaire

Théorème 2 : Si $p_b > 0$ pour tout b dans B, si T est infini et non linéaire, la librairie n'est jamais récurrente positive.

Démonstration : Il suffit de montrer que $\sum_{\pi \in E} u_\pi = \infty$, où $(u_\pi)_{\pi \in E}$ est défini au théorème 1. L'idée est d'approcher la librairie par une librairie finie. Soit une application $k \longmapsto t_k$ de $\mathbb{N}$ dans T satisfaisant aux hypothèses de la proposition 2. On pose $B_k = e(T_k)$, Ext T_k l'ensemble des sommets maximaux de T_k, et E_k l'ensemble des π de E tels que $\pi(t) = e(t)$ si $t \notin T_k$. On munit B de la probabilité $p^{(k)}$ suivante :

$p_b^{(k)} = 0$ si $b \notin B_k$, $p_b^{(k)}$ si $e^{-1}(b) \in T_k \setminus \text{Ext } T_k$ et

$p_b^{(k)} = q_t(e)$ si $t = e^{-1}(b) \in \text{Ext } T_k$. On pose enfin :

$$q_t^{(k)}(\pi) = \sum_{s \geqslant t} p^{(k)}_{\pi(s)} \quad \text{si} \quad \pi \in E_k.$$

Il est clair que $p^{(k)}_{e(t)} \leqslant q_t(e)$ si $t \in T_k$

et que $q_t(\pi) \leqslant q_t^{(k)}(\pi)$ si $t \in T_k$ et $\pi \in E_k$

Donc $u_\pi \geqslant \prod_{t \in T_k} \dfrac{p^k_{e(t)}}{q_t^{(k)}(\pi)}$ si $\pi \in E_k$. Donc, d'après la proposition 1 :

$$\sum_{\pi \in E} u_\pi \geqslant \sum_{\pi \in E_k} u_\pi \geqslant K(T_k)$$

Comme d'après la proposition 2, $\lim_{k \infty} K(T_k) = \infty$, on a le résultat.

B I B L I O G R A P H I E

G. LETAC

1974 "Transience and recurrence of an intersting Markov chain" J. of Appl. Prob. 11, 818 - 824.

1975 "Librairies" Rapport technique C.R.M. 569. Centre de Recherches mathématiques de l'Université de Montréal.

1976 "Récurrence des librairies" C.R.A.S. Juillet 1976. Tome 283, 49 - 52.

P. NELSON

1975 Ph. D. Thesis, Case Western Reserve University, Cleveland Ohio.