ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

R. CARMONA

Loi du logarithme itère pour les suites de vecteurs gaussiens

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 61, série *Mathématiques*, n° 14 (1976), p. 5-9

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1976__61_14_5_0>

LOI DU LOGARITHME ITERE POUR LES SUITES DE VECTEURS GAUSSIENS

R. CARMONA, UNIVERSITE DE MARSEILLE-LUMINY

Le but de cette note est de présenter une loi du logarithme itéré "à la Strassen" pour des suites de vecteurs gaussiens faiblement asymptotiquement indépendants ([2. Théorème 4.1]).

1. INTRODUCTION :

En 1964 paraissaît le remarquable résultat de V. Strassen sur la forme fonctionnelle de la loi du logarithme itéré pour le processus du mouvement brownien ([13]). Une littérature abondante a été consacrée à la généralisation de ce résultat. Citons par exemple les travaux de H. Oodaira ([11] et [12]) dans lesquels le processus du mouvement brownien est remplacé par un processus gaussien : malheureusement les hypothèses sur ce processus sont nombreuses et techniques et les résultats sont souvent partiels. La démonstration de Strassen (comme celles d'Oodaira) reposait sur l'étude de suites lacunaires et un contrôle du comportement des termes de la suite entre deux termes successifs de la suite lacunaire. T.L. Lai a alors eu l'idée de formuler la loi du logarithme itéré pour ces suites lacunaires :

Théorème (Lai [7]) :

Soit $\{Y(t)\ ;\ t \in [0,1]$ un processus gaussien centré séparable satisfaisant :

$$(*) \qquad E\{|Y(t) - Y(s)|^2\} \leq \varphi(|t-s|)^2 \qquad s,\ t \in [0,1]$$

où φ est une fonction continue non-décroissante sur [0,1] qui satisfait $\int_1^{+\infty} \varphi(e^{-u^2})\, du < +\infty$, et soit K la boule unité fermée de l'espace reproduitsant associée à Y. Soit maintenant $\{Y_n\ ;\ n \geq 1\}$ une suite gaussienne de processus ayant la même loi que Y et satisfaisant :

$$(**) \qquad \lim_{\substack{n\to\infty \\ m-n\to\infty}} E\ \{E^2\ \{\ Y_m(t)\ |\ F_n\}\} = 0 \quad \text{pour tout } t \in [0,1]$$

où F_n désigne la tribu engendrée par les variables aléatoires $Y_j\ (t)$, $t \in [0,1]$, $j = 1, \ldots, n$. Dans ces conditions nous avons presque sûrement :

$$(\text{L.L.I.}) \qquad \frac{Y_n}{\sqrt{2\text{Log}n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{c.a.}} K$$

Ici la notation $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{c.a.}} A$ signifie que la distance de x_n à A tend vers 0 et que l'ensemble des points limites de la suite $\{x_n\ ;\ n \geqslant 1\}$ est égal à A (on dit que x_n converge vers A et s'accumule en tout point de A). Ce résultat se généralise au cas où les Y_n sont des vecteurs gaussiens identiquement distribués dans un espace de Banach (rappelons que si B est un espace de Banach réel séparable un vecteur gaussien dans B est une variable aléatoire à valeurs dans B telle que pour tout $f \in B^*$(dual de B) la variable aléatoire réelle $<f, Y>$ soit gausienne centrée) : si F_n désigne la tribu engendrée par les vecteurs Y_j, $j = 1, \ldots, n$, la seule hypothèse (**) suffit pour impliquer (L.L.I.) (voir [6 p. 248] ou [8. Théorèm 4.1]).

Nous allons généraliser ce résultat d'une part en affaiblissant l'hypothèse (**) et d'autre part en n'exigeant plus que les Y_n soient identiquement distribués.

Notons que dans le cas identiquement distribué G.C. Mangano avait déjà réussi à affaiblir l'hypothèse (**) (voir [8. Théorèm 4.1]) et que, dans le cas des processus gaussiens sur [0,1] et avec l'hypothèse (**) il avait "réussi" à sortir du cas identiquement distribué en imposant une condition uniforme analogue à (*) (voir [9. Théorem 4.2]).

2. RESULTAT :

Théorème ([2]) :

Soit B un espace de Banach réel séparable et soit $\{Y_n\ ;\ n \geqslant 1\}$une suite de vecteurs gaussiens dans B ; supposons que pour tout $f \in B^*$ la condition suivante soit satisfaite :

$$\lim\ \sup_{\substack{n\to\infty \\ m-n\to\infty}} E\{<f,\ Y_m>\ <f,\ Y_n>\} \leqslant 0 \qquad (\text{I.A})$$

et supposons qu'il existe un vecteur gaussien Y dans B limite en loi des Y_n. Dans ces conditions, si K désigne la boule unité fermée de l'espace reproduisant associé à Y nous avons presque sûrement :

$$\frac{Y_n}{\sqrt{2 \text{ Log} n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{c.a.}} K. \qquad \text{(L.L.I.)}$$

Pour démontrer ce théorème nous utilisons un résultat de J. Kuelbs ([6]) :

Lemme K :

Si $\{Y_n \ ; \ n \geqslant 1\}$ est une suite de variables aléatoires dans B, si K est la boule unité fermée de l'espace reproduisant associé à un vecteur gaussien dans B et si $\{a_n \ ; \ n \geqslant 1\}$ est une suite de réels positifs telles que :

(K.1) . $\forall f \in B^*$, $\limsup_{n\to\infty} a_n^{-1} \langle f, Y_n\rangle = \sup_{x\in K} \langle f, x\rangle$ p.s.

(K.2) . $\{a_n^{-1} \ Y_n \ ; \ n \geqslant 1\}$ est presque sûrement relativement compact dans B.

Dans ces conditions nous avons, presque sûrement :

$$a_n^{-1} \ Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{c.a.}} K.$$

La démonstration du théorème se ramène donc à la vérification des conditions (K.1) et (K.2) avec $a_n = \sqrt{2 \text{ Log } n}$. La relation (K.1) se démontre directement dans le cas où $\sup_{x\in K} \langle f, x\rangle = 0$ et s'obtient à partir des théorèmes 1 et 2 de [10] dans le cas contraire. La relation (K.2) est facile à démontrer si Y_n est remplacé par PY_n où P est une projection de rang fini dans B (il suffit en fait de montrer que $\{PY_n \ ; \ n \geqslant 1\}$ est presque sûrement borné). Si Q désigne la projection complémentaire (i.e : $Q = I - P$ ou I est l'opérateur identité de B) il suffit donc de choisir P de façon à ce que pour tout $\varepsilon > 0$ la suite $\{a_n^{-1} \ QY_n \ ; \ n \geqslant 1\}$ puisse se faire en utilisant les conséquences suivantes du résultat d'intégrabilité des vecteurs gaussiens de X. Fernique ([4]) :

Lemme F1 ([2. Lemme 3.1])

Soit $\{Y_n\ ;\ n \geqslant 1\}$ une suite de vecteurs gaussiens qui converge en loi vers Y ; pour tout a > 0 nous avons :

$$\lim_{n\to\infty} E\ \{||Y_n||^a\} = E\ \{||Y||^a\}.$$

Lemme F2 ([2. Remarque 2.1])

Si Y est un vecteur gaussien non trivial, nous avons, pour tout $t \geqslant 2$:

$$\Pr\ \{||Y|| \geqslant t\ E^{1/2}\ \{||Y||^2\}\} \leqslant \exp\left[-\frac{t^2\ \mathrm{Log}^3}{96}\right]$$

3 . REMARQUES :

(i) - Lai a montré comment son résultat permettait de retrouver le résultat de Strassen. Son idée permet de déduire le résultat de [5] (et donc l'expression du module local de continuité) pour le processus du mouvement brownien dans un espace de Banach à partir de la version de son théorème écrite en terme de vecteurs gaussiens. Malheureusement la condition (**) est trop restrictive pour retrouver l'expression du module de continuité uniforme du mouvement brownien dans un espace de Banach ([1]) : il est montré en [2. Corollaire 4.2] que la condition d'indépendance asymptotique (I.A.) est suffisamment faible pour permettre de retrouver ce résultat.

(ii) - Le résultat que nous avons présenté nous paraît être un outil efficace pour l'étude de certains processus gaussiens : il a notamment permis l'étude des propriétés locales et asymptotiques d'un processus fondamental en théorie quantique des champs ([3]). Notons aussi qu'il a permis de compléter la loi du logarithme itéré pour le mouvement brownien fractionnaire ([14]).

(iii) - Notre résultat suppose la convergence en loi d'une suite de vecteurs gaussiens. Il est possible de donner des conditions nécessaires et suffisantes relativement simples pour qu'une telle convergence ait lieu (voir le paragraphe 3 de [2]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] - R. CARMONA - Module de continuité uniforme des mouvements browniens à valeurs dans un espace de Banach. C.R. Acad. Sc. Paris ser. A 281 (1975) 659-662.

[2] - R. CARMONA - N. KONO - Convergence en loi et lois du logarithme itéré pour les vecteurs gaussiens. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. (à paraître).

[3] - R. CARMONA - Measurable norms and some Banach space valued gaussian processes. Duke Math. Journal (à paraître)

[4] - X. FERNIQUE - Intégrabilité des vecteurs gaussiens. C.R. Acad. Sc. Paris ser. A 270 (1970) 1698-1699.

[5] - J. KUELBS - R.D. LE PAGE - The law of the iterated logarithm for brownian motion in a Banach space. Trans. Amer. Math. Soc. 185 (1973) 253-264.

[6] - J. KUELBS - The law of the iterated logarithm and related strong convergence theorems for Banach space valued random variables. Lecture Notes in Math. 539 p. 224-314.

[7] - T.L. LAI - Reproducing kernel Hilbert spaces and the law of the iterated logarithm for gaussian processes. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Greb. 29 (1974) 7-19.

[8] - G. C. MANGANO - On Strassen - type laws of the iterated logarithm for gaussian elements in abstract spaces (preprint).

[9] - G. C. MANGANO - On the law of the iterated logarithm for non identically distributed random processes (preprint).

[10] - M. NISIO - On the extreme values of gaussian processes, Osaka J. Math. 4 (1967) 313 - 326.

[11] - H. OODAIRA - On Strassen's version of the law of the iterated logarithm for gaussian processes. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 21 (1972) 289 - 299.

[12] - H. OODAIRA - The law of the iterated logarithm for gaussian processes. The Annals of Probability 1 (1973) 954 - 967.

[13] - V. STRASSEN - An invariance principle for the law of the iterated logarithm. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 3 (1964) 211-226.

[14] - M.S. TAQQU - Smooth variation and the functional law of the iterated logarithm Cornell University preprint.