ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

B. HEINKEL

Un théorème de la limite centrale dans $C(S)$

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 61, série *Mathématiques*, nº 14 (1976), p. 37-42

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1976__61_14_37_0>

UN THEOREME DE LA LIMITE CENTRALE DANS C(S)

B. HEINKEL, UNIVERSITE DE STRASBOURG

Dans un certain nombre de publications récentes ([3] et [5] par exemple) il apparaît que la méthode de "recouvrement", introduite par R.M. Dudley [1] pour l'étude de la régularité des processus gaussiens, est également une méthode fructueuse dans la recherche de conditions suffisantes pour qu'une v.a. à valeurs dans $C(S)$ satisfasse au Théorème de la limite centrale. Nous nous proposons de montrer qu'il en est de même de la technique des mesures majorantes de X. Fernique [2] ; les résultats que nous obtiendrons ont pour corollaires les principaux énoncés connus précédemment.

Soient (S,d) un espace métrique compact et $C(S)$ l'espace des fonctions continues sur S à valeurs réelles, muni de la norme $\|.\|_\infty$. On s'intéresse aux v.a. X à valeurs dans $C(S)$, centrées, telles que :

$$\sup_{s \in S} E\, X^2(s) < +\infty$$

On suppose de plus que l'écart τ sur S induit par la covariance de X , i.e. :

$$\forall s,t \in S \quad \tau(s,t) = (E(X(s)-X(t))^2)^{\frac{1}{2}}$$

est continu par rapport à d .

Donnons-nous à présent une suite (X_n) de v.a. indépendantes, de même loi que X .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n$$

et μ_n désigne la loi de la v.a. $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$.

On dira que X satisfait au Théorème de la Limite Centrale s'il existe une mesure de probabilité gaussienne μ sur $C(S)$, telle que μ_n converge étroitement vers μ.

Avant d'énoncer le résultat principal, nous allons introduire quelques notations.

i) ρ sera un écart privilégié sur S, continu par rapport à d, tel que X soit ρ-continu, et dont la nature sera précisée ultérieurement.

ii) Pour tout $r > 0$ et tout $s \in S$, $B_\rho(s,r)$ désignera la ρ-boule ouverte de centre s et de rayon r.

iii) à toute fonction $f : S \to \mathbb{R}$, on associe $\tilde{f} : S \times S \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\tilde{f}(s,t) = \frac{f(s)-f(t)}{\rho(s,t)} 1_{(\rho \neq 0)}(s,t)$$

iv) on notera φ la fonction : $t \to \sqrt{\operatorname{Log} t}$.

v) Enfin, on désignera par (X_n) une suite de v.a. indépendantes, de même loi que X, définies sur un espace probabilisé (Ω_1, F_1, P_1). On considérera d'autre part un autre espace probabilisé (Ω_2, F_2, P_2) sur lequel on suppose construite une suite de Rademacher (ε_n) (i.e. une suite de v.a.r. indépendantes de même loi que ε où :

$$P(\varepsilon = 1) = P(\varepsilon = -1) = \tfrac{1}{2}).$$

On notera $E_i (i = 1,2)$ l'espérance calculée par rapport à la probabilité $P_i(i = 1,$

On a l'énoncé suivant :

THEOREME. On suppose qu'il existe un écart ρ sur S, continu par rapport à d, tel que X soit ρ-continu et tel que de plus :

1) il existe une mesure de probabilité λ sur S (muni de la tribu ρ-borélienne telle que :

$$\limsup_{\substack{\varepsilon \downarrow 0 \\ x \in S}} \int_0^\varepsilon \varphi\left(\frac{1}{\lambda(B_\rho(x,u))}\right) du = 0$$

2) il existe une suite de v.a.r. indépendantes $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$, sur (Ω_1, F_1, P_1) de même loi que T, T étant une v.a.r. ≥ 0, de carré intégrable,

vérifiant :

$$\sup_n E_1 E_2 \operatorname{Log} \int_{S\times S} \exp\left(\frac{\left(\sum_{k=1}^{n} \tilde{X}_k(s,t)\varepsilon_k\right)^2}{\sum_{k=1}^{n} T_k^2}\right) d\lambda(s)d\lambda(t) < +\infty$$

Sous ces hypothèses, X satisfait au théorème de la limite centrale.

Donnons l'idée de la démonstration (la rédaction détaillée est à paraître [4]

On peut remarquer tout d'abord que par le même argument que N.C. Jain et M.B. Marcus ([5] Lemme 2) , on peut se restreindre au cas où X est symétrique. La symétrie de X , le théorème de la limite centrale en dimension finie et la continuité de ρ par rapport à d impliquent que la démonstration du théorème se réduit à établir que :

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, \eta > 0 \quad \exists\, \alpha > 0 \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tels que :}$$

$$\forall\, n \geq n_0 \quad P_1 \otimes P_2 \{ \sup_{\rho(s,t)\leq\alpha} \left| \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k (X_k(s) - X_k(t)) \right| \geq \varepsilon \} \leq \eta$$

Ce résultat découle par des majorations élémentaires du lemme suivant :

LEMME DE CONTINUITE : Supposons l'hypothèse (1) du théorème vérifiée. Pour toute fonction : $S \to \mathbb{R}$, ρ - continue, telle que :

$$d = \int_{S\times S} \exp \tilde{f}^2(s,t)\, d\lambda(s)\, d\lambda(t) < +\infty$$

on a :

$$\forall\, x,y \in S \quad |f(x)-f(y)| \leq 20 \sup_{z\in S} \int_0^{\frac{\rho(x,y)}{2}} \varphi\left(\frac{d}{\lambda^2(B_\rho(z,u))}\right) du$$

Donnons pour finir quelques corollaires.

Remarque 1 : On obtient comme corollaires du théorème cité plus haut, les 2 énoncés principaux de N.C. Jain et M.B. Marcus [5] :

COROLLAIRE 1 : Supposons qu'il existe une v.a.r. $M \geq 0$, de carré intégrable et un écart ρ sur S , continu par rapport à d , vérifiant :

$$\forall s,t \in S \ \forall \omega \in \Omega \quad |X(\omega,s) - X(\omega,t)| \leq M(\omega)\rho(s,t)$$

On suppose de plus vérifiée la condition :

$$\int_0 \varphi(N_\rho(u))du < +\infty$$

(où $N_\rho(u)$ désigne le nombre minimal de ρ - boules de rayon u suffisant à recouvrir S) alors X satisfait au Théorème de la Limite Centrale.

COROLLAIRE 2. On suppose vérifiées les conditions suivantes :

1) $\exists A > 0$ tel que :

$$\forall s,t \in S \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad E\{\exp \alpha (X(s) - X(t))\} \leq \exp A\alpha^2 \tau^2(s,t)$$

2) $\int_0 \varphi(N_\tau(u))du < +\infty$

alors X satisfait au Théorème de la Limite Centrale.

Le corollaire 1 est une conséquence immédiate du Théorème.
Le corollaire 2 se démontre en établissant tout d'abord que X est τ - continu, puis en montrant que les hypothèses du Théorème sont satisfaites pour l'écart ρ défini par :

$$\rho = 3\sqrt{A} \sup \left(\sup_{s,t} \tau(s,t), 1\right)\tau$$

et la v.a. T constante, égale à 1 .

Remarque 2 : On voit (en modifiant légèrement la démonstration de la τ - continuité de X dans la preuve du corollaire 2), que la condition suffisante de continuité des trajectoires d'une fonction aléatoire gaussienne de X. Fernique ([2] corollaire 6.2.3) l'est également pour les fonctions aléatoires séparables à accroissements sous-gaussiens (i.e. satisfaisant à la condition 1) du corollaire 2).
De façon précise, on a l'énoncé :

PROPOSITION. Soient (S,d) un espace métrique compact et $(X(t), t \in S)$ une fonction aléatoire séparable, centrée, de carré intégrable. On suppose de plus que l'écart τ induit par la covariance de X est continu par rapport à d et qu'il existe une constante $A > 0$, telle que :

$$\forall s,t \in S \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad E(\exp \alpha (X(s) - X(t))) \leq \exp A\alpha^2 \tau^2(s,t)$$

S'il existe une mesure de probabilité λ sur S (muni de la tribu τ - borélienn telle que :

$$(**) \quad \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sup_{x \in S} \int_0^\varepsilon \varphi\left(\frac{1}{\lambda(B_\tau(x,u))}\right) du = 0$$

alors X est à trajectoires p.s. continues.

Cet énoncé généralise le Théorème 3.1 de [6] . La condition (**) n'est par contre pas nécessaire pour qu'une fonction aléatoire X à accroissements sous-gaussiens soit à trajectoires p.s. continues comme le montre le contre-exemple considéré dans [4] .

R E F E R E N C E S.

[1] R.M. DUDLEY : The sizes of compact subsets of Hilbert space and continuity of gaussian processes. J. Functional Analysis 1 (1967) n° 3 p.290-330

[2] X. FERNIQUE : Régularité des trajectoires des fonctions aléatoires gaussiennes - Ecole d'Eté de Probabilités de St Flour 4 (1974) Lecture Notes in Math. 480 Springer p. 1-96 .

[3] E. GINE : On the central-limit theorem for sample continuous processes - The Ann. of. Prob. 2 (1974) n° 4 p. 629-641 .

[4] B. HEINKEL : Mesures majorantes et Théorème de la Limite Centrale dans C(S) (à paraître dans Z . Wahrscheinlichkeitstheorie and Verw.Gebiete)

[5] N.C. JAIN et M.B. MARCUS : Central-Limit theorems for C(S) - valued random variables. J. Functional Analysis 19 (1975) p. 216-231 .

[6] N.C. JAIN et M.B. MARCUS : Sufficient conditions for the continuity of stationary gaussian processes and applications to random series of functions. Ann. Ins. Fourier 24 (1974) 2 p. 117-141

Institut de Recherche Mathématique Avancée

Laboratoire Associé au C.N.R.S.

7, rue René Descartes

67084 STRASBOURG - Cédex