ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

M. GHIDOUCHE

Récurrence au sens de Harris des $GI/G/Q$

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 61, série *Mathématiques*, n° 14 (1976), p. 29-36

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1976__61_14_29_0>

RECURRENCE AU SENS DE HARRIS DES GI/G/Q

M. GHIDOUCHE, UNIVERSITE DE ROUEN

0. Introduction.

Le texte qui suit est un résumé de l'article [1], d'ailleurs diffusé à l'Ecole d'Eté de St-Flour 1976.

Le but de cet article est de démontrer la récurrence au sens de Harris des "temps d'attente" des GI/G/q lorsque $E(B_n) \leq qE(A_n)$, B_n étant le temps de service du (n-1)-ième client et A_n l'interarrivée entre le (n-1)-ième client et le n-ième. En effet seule la convergence en loi de ces temps d'attentes était connue ([6] ou le cours de J. NEVEU de St-Flour 1976) quand $E(B_n) < qE(A_n)$ et la récurrence en 0 quand $P(B_n < A_n) > 0$ [8].

Seule la démonstration du lemme 2-4 est indiquée, parce que bien qu'asse simple, elle décrit la structure probabiliste de la chaine de Markov des temps d'attentes et la mesure qui rendra cette chaine de Markov récurrente au sens de Harris. Elle permettra aussi d'obtenir toutes sortes de théorèmes limites [2]. Les autres démonstrations, plus techniques, sont d'un intérêt moindre.

Les notaitons et les résultats pour les chaines de Markov sont ceux de Revuz [7].

1. Notations et modèles

On considère une file de clients qui arrivent dans une enceinte illimitée et qui subissent un certain service dans l'un des q guichets. Les clients sont servis dans leur ordre d'arrivée.

Pour $n \geq 2$, soit A_n le temps écoulé entre l'arrivée du (n-1)-ième client et celle du n-ième. $T_1 = A_1$ désigne l'instant d'arrivée du premier client, $T_n = \sum_{i=1}^{i=n} A_i$ est l'instant d'arrivée du n-ième client. Par convention, $T_0 = 0$.

Pour $n \geq 2$, B_n est le temps de service du (n-1)-ième client.

La famille des $(A_n, B_m, n \geq 1, m \geq 2)$ est une famille de variables aléatoires indépendantes (v.a.i.), la famille $(A_n, n \geq 1)$ étant équidistribuée de v.a. parente A_0 de loi α, la famille $(B_m, m \geq 2)$ étant équidistribuée de v.a. parente B_0 de loi β.

q est un entier, représentant le nombre de guichets. On notera

- $\bar{f} = (1,0,0,0,\dots,0) \in \mathbb{R}^q$
- $\bar{e} = (1,1,1,\dots,1) \in \mathbb{R}^q$
- $S = \{s = (s^1, s^2, s^3, \dots, s^q) \in \mathbb{R}^q \;/\; 0 \leq s^1 \leq s^2 \leq s^3 \dots \leq s^q\}$.

Pour tout élément x de $\mathbb{R}^q$, on note :

$$||x|| = \max\, (|x^i| \;;\; 1 \leq i \leq q) \quad ; \quad x^\Sigma = \sum_{i=1}^{i=q} x^i \; .$$

Pour tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q$, on note :

- $x \leq y$ si pour tout i, $1 \leq i \leq q$, $x^i \leq y^i$
- $x < y$ si pour tout i, $1 \leq i \leq q$, $x^i < y^i$.

Pour tout élément x de $\mathbb{R}^q$, on note

- $x_+ = \max\,(x,0) = (\max(x^i,0) \quad 1 \leq i \leq q)$.

Pour tout élément x de $\mathbb{R}^q$, on note R(x) la fonction qui "ordonne les coordonnées de x", c'est à dire telle que :

$$R : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$$

$$\forall\; i,\; 1 \leq i \leq q \qquad R(x)^i \in \{x^1, x^2, x^3, \dots, x^q\}$$

$$R(x)^1 \leq R(x)^2 \leq \dots \leq R(x)^q \; .$$

On se propose d'étudier le processus $(W_n, n \geq 0)$ où $W_n = (W_n^1, W_n^2, \dots \dots W_n^q) \in S$; pour $n \geq 1$, W_n représente la suite ordonnée des temps de travail des q serveurs quand arrive le n-ième client ; en particulier, W_n^1 représente le temps d'attente effectif du n-ième client ; W_0 représente la suite ordonnée des travaux que doivent effectuer les serveurs à l'instant d'origine. Les $(W_n, n \geq 0)$ sont liés par la relation de récurrence :

$$(1) \qquad \forall\ n \geq 0,\ W_{n+1} = R\,(W_n + B_{n+1}\,\bar{f} - A_{n+1}\,\bar{e})_+ \ .$$

En effet, $(W_n^1, W_n^2, W_n^3, W_n^4, \dots, W_n^q)$ est la suite ordonnée des temps de travail qui restent à faire au moment où arrive le n-ième client. Le n-ième client ira au premier guichet vide, soit celui dont le temps de travail est W_n^1. Les temps de travail à effectuer sont alors $W_n^1 + B_{n+1}, W_n^2, \dots W_n^q$. Lorsqu'arrive le (n+1)-ième client, les temps qui restent à faire sont donc : $W_n^1 + B_{n+1} - A_{n+1}, W_n^2 - A_{n+1}, \dots, W_n^q - A_{n+1}$, et la suite ordonnée de ces temps nous donne W_{n+1}, d'où le résultat.

A étant un espace topologique, on notera $\mathcal{B}_A$ la σ-algèbre des boréliens de A. On note $\mathbb{N}^* = \{1,2,3,\dots,n,\dots\}$ la suite des entiers strictement positifs.

Soit
$$\Omega = (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}^*}$$
$$\mathcal{A} = (\mathcal{B}_{\mathbb{R}_+} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}_+})^{\otimes \mathbb{N}^*}$$
$$\mathbb{P} = (\alpha \times \beta)^{\times \mathbb{N}^*}$$

Pour $\omega = (\omega_1^n , \omega_2^n),\ n \in \mathbb{N}^*)$

on pose
$$A_n(\omega) = \omega_1^n$$
$$B_n(\omega) = \omega_2^n$$
$\Theta : \Omega \to \Omega$ l'opérateur translation :
$$A_n(\Theta(\omega)) = A_{n+1}(\omega)$$
$$B_n(\Theta(\omega)) = B_{n+1}(\omega)$$

Θ_n est le n-ième itéré de cet opérateur. $\mathcal{A}_n$ est alors la σ-algèbre engendrée par $\{A_i, B_i \quad 1 \leq i \leq n\}$, $\mathcal{A}_o = \{\emptyset, \Omega\}$.

On définit les W_n par récurrence :

$$\forall\ n \in \mathbb{N} \quad W_n : S \times \Omega \to S$$
$$\forall\ \omega \in \Omega \quad W_o(s,\omega) = s$$
$$\forall\ n \in N \quad \forall\ \omega \in \Omega \quad W_{n+1}(s,\omega) = R(W_n(s,\omega) + B_{n+1}(\omega)\bar{f} - A_{n+1}(\omega)\bar{e})_+ \ .$$

Il est clair que pour tout entier n, $W_n(s,.)$ est $\mathcal{A}_n$ mesurable.

On note encore :

$$W = (W_n \ ; \ n \geq 0) \qquad W_s = (W_n(s,.) \ ; \ n \geq 0) .$$

Lemme 1.1.

a) Pour tout entier n et pour tout ω de Ω la fonction de $\mathbb{S}$ dans $\mathbb{S}$: $s \to W_n(s,\omega)$ est croissante.

b) Pour tout entier n, pour tout ω de Ω et pour tout couple (s,t) d'éléments de $\mathbb{S}$:

$$||W_n(s,\omega) - W_n(t,\omega)|| \leq ||s - t|| .$$

Théorème 1.2.

Pour tout s de $\mathbb{S}$, le processus W_s est une chaine de Markov sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ par rapport à la famille $(\mathcal{A}_n, n \geq 0)$, homogène, de transition.

$$P(t,\Gamma) = \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+} \alpha(dx)\ \beta(dy)\ 1_p(R(t+y.\bar{f} - x.\bar{e})_+)$$

et de loi initiale ε_s (avec $\varepsilon_s(\Gamma) = 1$ ou 0 selon que $s \in \Gamma$ ou $s \notin \Gamma$).

Soit $\Omega' = \mathbb{S}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{A}' = \mathcal{B}_{\mathbb{S}}^{\otimes \mathbb{N}}$; W_s est une v.a. de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\Omega', \mathcal{A}')$. Soit $\mathbb{P}_s = \mathbb{P} \circ W_s^{-1}$ la loi du processus W_s. $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}_s)_{s \in \mathbb{S}}$ est l'espace canonique des chaines $(W_s, s \in \mathbb{S})$. On notera encore $(W_n \ ; \ n \geq 0)$ les coordonnées de Ω', quand il n'y aura pas de risque de confusion.

2. Etude de la récurrence de la chaine $(\dot{W}_n , n \geq 0)$ pour $E(B_0) \leq qE(A_0)$.

Notons : $a = \text{ess sup } A_0 = \inf (t \geq 0 : \alpha([0,t[) = 1)$

$b = \text{ess inf } B_0 = \sup (t \geq 0 : \beta([t,+\infty[) = 1)$

α et β sont supposées non concentrées ni à l'origine, ni à l'infini, donc :

$$0 < a \leq +\infty$$

$$0 \leq b < +\infty .$$

Soit $J = \max \{k \in \mathbb{N},\ ka \leq b\} = [\frac{b}{a}]$. Comme $E(B_o) \leq qE(A_o)$, alors $0 \leq j < q$ sauf le cas trivial où $A_o = a = \frac{b}{q} = B_o$

$$v = (0, \ldots, 0, b-ja, b-(j-1)a, \ldots, b-a) \quad \text{si } 0 < j < q$$

$$v = 0 \quad \text{si } j = 0$$

<u>Lemme 2.1.</u>

Quel que soit s de $\mathbb{S}$ et pour tout entier $n \geq j$

$$\mathbb{P}_s(W_n \geq v) = 1 .$$

L'ensemble $\{s \in S \ / \ s \geq v\}$ est absorbant pour W.

<u>Lemme 2.2.</u>

Soit un nombre $\delta > 0$ et $V_\delta = \{s \in \mathbb{S} \ / \ v \leq s \leq v+\delta \ . \ \bar{g}\}$.

Alors, quel que soit l'état initial s de la chaine W, on atteint V_δ avec une probabilité positive, c'est à dire :

$$\mathbb{P}_s \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{W_n \in V_\delta\} \right) > 0 .$$

$\bar{g}$ est le vecteur de $\mathbb{R}^q$ dont les (q-j) premières coordonnées sont nulles et les autres égales à l'unité si $0 < j < q$

$\bar{g} = 0 \in \mathbb{R}^q$ si $j = 0$ et $\bar{g} = \bar{e}$ si $j \geqslant q$

<u>Lemme 2.3.</u>

Soit $\delta = \dfrac{(j+1)a - b}{j+1}$

Soit pour $j = 0$, $V = \{0\} \in \mathbb{R}^q$

pour $j > 0$ $V = \{s \in \mathbb{S} \ / \ v \leq s \leq (0,\ldots,0 \ ; \ (b-j(a-\delta),(b-(j-1)(a-\delta),\ldots b-(a-\delta))\}$.

Posons $\{W_o \in V,\ T_o = 0\} = \{W_o \in V,\ W_1 \notin V\}$

$k > 0$ $\{W_o \in V,\ T_o = K\} = \{W_o \in V,\ W_1 \in V \ldots W_k \in V,\ W_{k+1} \notin V\}$

T_o est donc le temps de "persistance" de V ; alors

$\forall\ s \in V,\ \mathbb{P}_s(T_o = k) = \gamma^k\ (1-\gamma)$

où $\gamma = \mathbb{P}(B_o - A_o \leq b-a+\delta)$.

<u>Lemme 2.4.</u>

Soit $U_1 = \inf \{n \in N,\ n \geq j\ ,\ W_n \in V\}$, si $\forall\ s \in \mathbb{S}, \mathbb{P}_s(U_1 < +\infty) = 1$, alors $(W_n\ ;\ n \geq 0)$ est récurrente au sens de Harris.

Démonstration :

Soit T_1 défini par :

$$T_1 + 1 = \inf (n \geq 0 : W_{U_1+n} \notin V)$$

et par récurrence pour $n \geq 2$

$$U_p = \inf (n \geq U_{p-1} + T_{p-1} + 1 : W_n \in V)$$

$$T_p + 1 = \inf (n \geq 0 : W_{u_p+n} \notin V) .$$

Par hypothèse , toutes ces v.a. sont p.s. définies, les v.a. T_p sont indépendantes de $\mathcal{U}_{u_p}$ et les v.a. $(T_p : p \geq 1)$ sont indépendantes et de même loi géométrique que T_o du lemme 2.3. On constate par ailleurs que si $s \in V$ et $T_o(\omega) \geq j$, $W_n(s,\omega)$ est indépendant de s dés que $n \geq j$. La mesure $\mu(A) = E_s(\sum_{n=j}^{n=T_o} 1_A(W_n))$ est alors indépendante de $s \in V$. Alors le fait que $\mu(A) > 0$; $\sum_{n=0}^{\infty} 1_A(W_n) = +\infty$ $\mathbb{P}_s$ p.s. $\forall s \in S$ est alors une conséquence des hypothèses et du fait que les v.a. $(\sum_{U_p+j}^{U_p+T_p} 1_A(W_n); p \geq 1)$ sont des v.a. indépendantes et équidistribuées.

Remarque :

On peut facilement, à l'aide des S_n et des T_n trouver l'analogue des points de renouvellement classiques utilisée dans l'étude des GI/G/1. On généralise alors sans difficultés les résultats de W.WHITT [8] : cet auteur utilise une hypothèse supplémentaire (qui équivaut, avec nos notations, à $j = 0$) qui lui assure la récurrence en 0. On obtient alors, pour les GI/G/q, toutes sortes de théorèmes limites comme, par exemple, ceux démontrés par IGLHEHART [4] pour les GI/G/1. C'est ce que nous ferons dans un prochain article.

Lemme 2.5. Dispersion des serveurs.

Les v.a. $\sum_{i=1}^{q-1} (W_n^q - W_n^i) = (q-1)W_n^q - \sum_{i=1}^{q-1} W_n^i$ sont majorées par des v.a. V_n formant une chaine de Markov récurrente au sens de Harris, positive et apériodique.

En particulier : $\forall s \in \mathbb{S}$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0$, $\exists N > \mathbb{N}$, $\forall n \in N$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}_s(W_n^1 \leq x) - \mathbb{P}_s(W_n^1 \leq x,\ W_n^2 \leq x+\alpha\ \ldots,\ W_n^q \leq x+\alpha) \leq \varepsilon \quad .$$

Remarque :

Ce lemme, avec le lemme 2.4., forme l'outil essentiel pour la démonstration de la récurrence dans le cas $E(B_o) \leq q\ E(A_o)$. Il est démontré, sous une forme un peu moins générale dans [3] et [6]. Mais ces auteurs ne démontrent pas la récurrence, mais seulement la convergence en loi des $(W_n\ ;\ n \geq 0)$ dans le cas où $E(B_o) < q\ E(A_o)$.

Théorème 2.6.

Si $E(B_o) \leq q\ E(A_o)$, la chaine $(W_n\ ;\ n \geq 0)$ est récurrente au sens de Harris et apériodique. La récurrence est nulle pour $E(B_o) = q\ E(A_o)$ et elle est positive pour $E(B_o) < q\ E\ (A_o)$.

Corollaire 2.7.

Si $E(B_o) \leq q\ E(A_o)$, on a p.s. pour une infinité de n

$$W_n^i = 0 \qquad 1 \leq i \leq q-j$$

$$b-(j-i+1)a \leq W_n^{q-j+i} \leq b-(j-i+1)a + \varepsilon \qquad 1 \leq i \leq j \ .$$

En particulier, $(q-j)$ serveurs sont libres une infinité de fois.

Corollaire 2.8.

Si $E(B_o) < q\ E(A_o)$, pour toute fonction mesurable bornée f de $\mathbb{S}$ dans $\mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} E_s\ (f(W_n)) = \int f(t)\quad (dt)$$

où μ est l'unique probabilité sur $(\mathbb{S}, \mathcal{B}_S)$, P-invariante. En particulier, W_n converge en loi vers μ.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHARLOT, F. GHIDOUCHE, M. HAMAMI,M. Irréductibilité et récurrence au sens de Harris des "temps d'attente" des GI/G/q. Document de travail n° 3, juin 1976. Labo. de Proba. et de Stat. de l'Université de Rouen.

[2] CHARLOT,F. GHIDOUCHE, M. Théorèmes limites pour les GI/G/q (à paraitre).

[3] DUFLO, M. Simulation et files d'attente (Alger, 1974)

[4] IGLEHART, D. Functionnal limit theorems for the GI/G/1 queues in light traffic, Adv. App. Prob. 3, 269-281 (1971)

[5] KENNEDY, D.P. A note on the number of busy servers in a GI/G/1 queue in light traffic, J. Appl. Prob. 9, 868-869 (1972)

[6] KIEFFER, J. et WOLFOWITZ, J. On the theory of queues with many servers Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 78 1-18 (1975)

[7] REVUZ, D. Markov Chains (North Holland 1975).

[8] WHITT, W. Embedded renewal processes in the GI/G/1 queues, J. Appl. Proba. 9 650-658 (1972).