ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

M. ROBIN

Contrôle impulsionnel avec retard pour des processus de Markov

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 61, série *Mathématiques*, nº 14 (1976), p. 115-128

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1976__61_14_115_0>

CONTROLE IMPULSIONNEL AVEC RETARD POUR DES PROCESSUS DE MARKOV

M. ROBIN, IRIA-LABORIA

Introduction.

On étudie ici un type particulier de problèmes de contrôle impulsionnel au sens de A. Bensoussan - J.L. Lions [1], [2]. Pour fixer les idées considérons un exemple typique : supposons que l'état d'usure d'une machine soit représenté par un processus stochastique x_t. Le fonctionnement de cette machine coûte $f(x)$ par unité de temps quand l'état est x ; d'autre part on suppose que l'on peut décider de remplacer cette machine par une autre dont on choisit l'état ξ, moyennant un coût $c(x,\xi)$ si x est l'état de l'ancien matériel au moment de la décision. De plus on supposera que la loi d'évolution de l'état de la nouvelle machine est la même que celle de l'ancienne machine. On a ici un problème de contrôle stochastique où la variable de contrôle est la suite des instants de remplacement et des états des machines que l'on met en place à ces instants.

On formulera le problème quand l'évolution d'une machine seule est markovienne et on cherchera à caractériser <u>un</u> contrôle optimal ainsi que le coût optimal. On mentionnera brièvement un exemple où le coût optimal peut être caractérisé par une inéquation quasi-variationnelle (cf. [1], [2]).

Les méthodes utilisées ici sont applicables à d'autres types de problèmes de contrôle impulsionnel. D'autre part, les résultats donnés ici généralisent ceux de [4].

1. Hypothèses - notations - Position du problème.

Soit $\Omega = D(o,\infty;E)$ espace des fonctions continues à droite, limitées à gauche, à valeurs dans E espace localement compact à base dénombrable. On pose $x_t(\omega) = \omega(t)$ pour $\omega \in \Omega$, $\mathfrak{F}_t^o = \sigma\{x_s\ , s \leq t\}$, $\mathfrak{F}^o = \mathfrak{F}_\infty^o$, et on note $\mathfrak{F}_t$, $\mathfrak{F}$ les complétées universelles de $\mathfrak{F}_t^o$, $\mathfrak{F}^o$.

On note également θ_t les opérateurs de translation. On suppose donné un processus de markov homogène

(1.1) $$X = (\Omega, \mathfrak{F}, x_t, P_x)$$

dont on note $\Phi(t)$ le semi groupe et l'on suppose vérifiées les propriétés suivantes :

On notera C l'espace des fonctions continues sur $E' = E \cup \{\infty\}$, C_o l'espace des fonctions continues sur E, nulle à l'infini.

(1.2) $$\forall f \in C_o \quad \lim_{t \downarrow 0} \Phi(t) f(x) = f(x)$$

(1.3) $$\forall f \in C_o \quad \Phi(t) f \in C_o \qquad \forall t > 0$$

(1.4) $$\Phi(t)1 = 1.$$

Remarque 1.1. **X** est quasi continu à gauche . L'hypothèse (1.4) n'est là que pour se restreindre à une durée de vie infinie. Pour obtenir un processus X vérifiant les hypothèses précédentes, on peut par exemple partir de la réalisation canonique d'un semi groupe de Feller et compléter les tribus.

■

Les autres données seront les suivantes :

on notera U un compact de E fixé dans la suite.

(1.5) Soit $f \in C \quad f \geq 0$

(1.6) $$c(x,\xi) \geq 0, \quad c \in C^0 \, (E' \times U)$$

α et $h > 0$ seront des constantes dans toute la suite. f représentera le coût par unité de temps du matériel en fonctionnement, $c(x,\xi)$ le coût de remplacement et h le retard nécessaire à la mise en place du nouveau matériel.

Pour définir complètement le problème de contrôle il nous faut définir successivement <u>les contrôles admissibles</u>, <u>l'évolution de l'état</u>, <u>et le critère.</u>

<u>Contrôles admissibles</u>.

On notera $\mathcal{V}$ l'ensemble des contrôles admissibles définis comme suit :

$v \in \mathcal{V} \iff v = (\tau^i, \xi^i)$ $i \geq 1$ ou τ^i est un temps d'arrêt de $\mathcal{F}_t$, $\forall i$, tel que

(1.7) $$\tau^{i+1} \geq \tau^i + h \quad , \quad \forall i \geq 1 \, ,$$

et ξ^i est une variable aléatoire à valeurs dans U, $\mathcal{F}_{\tau^i}$- mesurable.

<u>Evolution de l'état</u>.

Elle sera définie par une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ pour chaque $v \in \mathcal{V}$. Pour cela on commence par le lemme quivant :

<u>Lemme 1</u> : Soit τ un temps d'arrêt de $\mathcal{F}_t$, P une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$, ξ une variable aléatoire à valeurs dans E, $\mathcal{F}_\tau$-mesurable . On peut alors construire une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$, $\tilde{P}$, telle que

(1.8) $$\tilde{P}(A) = P(A) \quad \forall \; A \in \mathcal{F}_{(\tau+h)^-}$$

(1.9) $$\tilde{P}(A \cap \theta^{-1}_{\tau+h} B) = E \, [\chi_A . \, P_\xi(B)]$$

$$\forall \; A \in \mathcal{F}_{(\tau+h)^-} \; , \; A \subset \{\tau < +\infty\} \; ; \; \forall \; B \in \mathcal{F} \, .$$

De plus, $\forall\ \varphi$, measurable, bornée ,

$$(1.10) \qquad \tilde{E}[\chi_{\tau < +\infty}\ H.\ \varphi(x_{\tau+h+t+s})] = \tilde{E}[\chi_{\tau < +\infty}\ H.\ \Phi(t)\varphi(x_{\tau+h+s})\}$$

$\forall$ H v.a $\mathcal{F}_{\tau+h+t}$ mesurable, bornée, (χ_A est la fonction indicatrice de A).

Démonstration : on en donnera les grandes lignes. On commence par construire Q probabilité sur $(\Omega \times \Omega,\ \mathcal{F}_{(\tau+h)^-} \otimes \mathcal{F})$ par

$$\int_{\Omega \times \Omega} g(\omega,\omega')\ Q(d\omega\ d\omega') = \int_{\Omega \times \Omega} g(\omega,\omega')P(d\omega)P_{\xi(\omega)}(d\omega')\ .$$

Puis on définit une application $\varphi(\omega,\omega')$ de $\Omega \times \Omega$ dans Ω par

$$x_t(\varphi(\omega,\omega')) = x_t(\omega) \quad \text{si} \quad t < \tau(\omega)$$

$$x_t(\varphi(\omega,\omega')) = x_{t-\tau(\omega)}(\omega') \qquad t \geq \tau(\omega)$$

$$(\text{si } \tau(\omega) < +\infty\ ,\ \text{sinon } \varphi(\omega,\omega') = \omega).$$

On peut démontrer que φ est mesurable de $(\Omega \times \Omega,\ \mathcal{F}_{(\tau+h)^-} \otimes \mathcal{F})$ dans $(\Omega,\ \mathcal{F}^o)$, (en démontrant préalablement que $\tau(\varphi(\omega,\omega')) = \tau(\omega)$), donc que φ est mesurable de $(\Omega \times \Omega,\ \overline{\mathcal{F}_{(\tau+h)^-} \otimes \mathcal{F}})$ dans $(\Omega,\ \mathcal{F})$; on définit alors $\tilde{P}$ comme l'image de Q par φ (Q préalablement étendue à la completée $\overline{\mathcal{F}_{(\tau+h)^-} \otimes \mathcal{F}}$).

On vérifie alors que $\tilde{P}$ satisfait (1.8), (1.9), (1.10).

■

Remarque 1.2. On peut également vérifier que $x_{\tau+h} = \xi$ $\tilde{P}$ - p.s. ce qui correspond bien à ce que l'on peut entendre par "remplacement" par un matériel d'état ξ.

■

Pour définir l'évolution de l'état on construit comme au lemme précédent une suite de probabilité sur $(\Omega,\ \mathcal{F})$:

On note $\Pi(\tau,\xi,P_x)$ la probabilité construite au lemme 1.1 à partir des données τ, ξ, P_x. Alors pour $v = (\tau^i,\xi^i)$ $i \geq 1$, on définit

$$(1.11)\qquad \begin{cases} P_x^o = P_x \\ P_x^1 = \Pi(\tau^1, \xi^1, P_x^o) \\ \vdots \\ P_x^n = \Pi(\tau^n, \xi^n, P_x^{n-1}) \end{cases}$$

On a en particulier $P_x^n = P_x^{n-1}$ sur $\mathcal{F}_{(\tau^n+h)^-}$, $\forall$ n. Comme de plus $\tau^n \uparrow +\infty$ ($\forall\ \omega$) on peut définir une probabilité P_x^v sur $(\Omega, \mathcal{F})$ par

$$(1.12)\qquad P_x^v = P_x^{n-1} \quad \text{sur} \quad \mathcal{F}_{(\tau^n+h)^-} \ .$$

Critère.

On pose

$$(1.13)\qquad J_x(v) = E_x^v \{\int_0^{+\infty} \bar{e}^{\alpha s} f(x_s) ds + \sum_{i \geq 1} \bar{e}^{\alpha\tau^i} c(x_{\tau^i}, \xi^i)\}$$

qui sera le critère que l'on cherche à minimiser.

On pose enfin

$$(1.14)\qquad u(x) = \operatorname*{Inf}_{v \in \mathcal{V}} J_x(v).$$

2. Etude du problème de contrôle.

Eventuellement on va approcher u définie en (1.14) par une suite de fonctions u^n qui seront les coûts optimaux d'une suite de problèmes d'arrêt optimal dont on utilisera les propriétés pour obtenir une caractérisation de u et l'existence d'un contrôle optimal.

On définit

$$(2.1)\qquad u^o(x) = E_x \int_0^{+\infty} \bar{e}^{\alpha s} f(x_s) ds$$

$$(2.2)\qquad u^n(x) = \operatorname*{Inf}_{\tau} E_x \{\int_0^{\tau} \bar{e}^{\alpha s} f(x_s) ds + \bar{e}^{\alpha\tau} M u^{n-1}(x)\}$$

où

$$(2.3)\qquad Mu^{n-1}(x) = E_x \int_0^h \bar{e}^{\alpha s} f(x_s)ds + \underset{\xi \in \mathcal{V}}{\operatorname{Inf}} \left[c(x,\xi) + u^{n-1}(\xi)\,\bar{e}^{\alpha h}\right]$$

où l'infinimum dans (2.2) est pris sur tous les temps d'arrêt de $\mathcal{F}_t$.

On aura besoin d'un certain nombre de propriétés des problèmes d'arrêt optimal que l'on va donner ici.

Soit $g \in C$, posons pour τ temps d'arrêt,

$$(2.4)\qquad I_x(\tau) = E_x \left\{\int_0^\tau \bar{e}^{\alpha s} f(x_s)ds + \bar{e}^{\alpha\tau} g(x_\tau)\right\} ,$$

$$(2.5)\qquad w(x) = \underset{\tau}{\operatorname{Inf}}\ I_x(\tau) .$$

On peut alors démontrer le résultat suivant :

Théorème 2.1. Sous les hypothèses (1.2), (1.3), (1.4), (1.5) (et $g \in C$),

i) $w \in C$

ii) w est l'élément maximum de l'ensemble des fonctions φ telles que

$$(2.6)\qquad \begin{cases} \varphi \in C \\ \varphi(x) \leq g(x) \\ \varphi(x) \leq \bar{e}^{\alpha t}\Phi(t)\varphi(x) + \int_0^t \bar{e}^{\alpha s}\Phi(s)f(x)ds \end{cases}$$

iii) le temps d'arrêt

$$\hat{\tau} = \inf(s \geq 0,\ w(x_s) = g(x_s))$$

est optimal pour le problème (2.5).

Démonstration.

On ne donnera que les étapes essentielles de la démonstration qui est un peu longue.

Exactement comme dans A. Bensoussan - J.L. Lions [5] que l'équation suivante

$$(2.7) \qquad w_\varepsilon(x) = E_x \int_0^{+\infty} e^{-\alpha s}[f - \frac{1}{\varepsilon}(w_\varepsilon - g)^+] \, ds$$

à solution unique $w_\varepsilon \in \mathcal{D}_{\tilde{A}} \cap C$, où $\mathcal{D}_{\tilde{A}}$ est le domaine du générateur infinitésimal faible de $\Phi(t)$. De plus, en utilisant le fait que (2.7) et la propriété de Markov entraine que

$$e^{-\alpha s} \; w_\varepsilon(x_s) + \int_0^s e^{-\alpha t} \, [f - \frac{1}{\varepsilon}(w_\varepsilon - g)^+](x_t)dt$$

est une martingale (pour la mesure P_x) ;

On montre (cf. [5]), que

$$(2.8) \qquad w_\varepsilon(x) = \operatorname*{Inf}_v E_x \int_0^{+\infty} e^{-\alpha s} \, e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s v_\lambda \, d\lambda} [f + \frac{1}{\varepsilon} vg] \; (x_s)ds$$

où l'infinimum est pris sur les processus adaptés à $\mathcal{F}_t$, à valeur dans [0,1].

On montre d'autre part que

$$(2.9) \qquad w_\varepsilon(x) \; \geq \; J_x(\hat{\tau}_\varepsilon)$$

si $\hat{\tau}_\varepsilon = \operatorname{Inf} \; (s \geq 0, \;\; w_\varepsilon(x_s) \; \geq \; g(x_s))$

donc que

$$(2.10) \qquad w_\varepsilon(x) \geq w(x)$$

On cherche alors une estimation dans l'autre sens. Soit $\mathcal{D}(C)$ le domaine du générateur de Φ dans C et supposons d'abord $g \in \mathcal{D}(C)$.
On a alors

$$(2.11) \qquad w(x) - g(x) = \operatorname*{Inf}_\tau E_x \int_0^\tau e^{-\alpha s} \; \tilde{f}(x_s)ds$$

$$(2.12) \qquad \text{où } \; \tilde{f} = f + Ag - \alpha g \; \in \; C.$$

(si A désigne le générateur infinitesimal de Φ).

On a de même

$$(2.13) \qquad \tilde{w}_\varepsilon(x) = w_\varepsilon(x) - g(x) = \operatorname*{Inf}_v E_x \int_0^{+\infty} e^{-\alpha s} e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s v_\lambda d_\lambda} \tilde{f}(x_s) ds$$

Désignons par $I_x^\varepsilon(v)$ l'espérance intervenant dans (2.13) et par $I_x(\tau)$ celle intervenant dans (2.11). D'autre part pour τ temps d'arrêt quelconque, définissons $v_\tau(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < \tau . \\ 1 & \text{si } t \geq \tau . \end{cases}$

On a

$$(2.14) \qquad I_x^\varepsilon(v_\tau) - I_x(\tau) \leq E_x \int_\tau^{+\infty} e^{-\alpha s} e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^s v_\lambda d_\lambda} \|\tilde{f}\| ds$$

$$\leq \|\tilde{f}\| \frac{\varepsilon}{\alpha\varepsilon + 1}$$

Comme cette estimation est indépendante de τ on obtient avec (2.10)

$$(2.15) \qquad w(x) \leq w_\varepsilon(x) \leq w(x) + k.\varepsilon.$$

ce qui démontre le résultat quand $g \in \mathcal{D}(C)$.

Quand $g \in C$ seulement, on régularise g par $g^n = \frac{1}{h_n} \int_0^{h_n} \Phi(t) g\, dt$

$h_n \searrow 0$ ce qui donne une suite $g^n \in \mathcal{D}(C)$, et $g^n \to g$ dans C puisque Φ est fortement continu sur C. On obtient ainsi (i). Les autres propriétés du théorème peuvent s'obtenir comme (par exemple) dans Shiriaev [6]. On peut aussi les démontrer en utilisant u_ε et en adaptant [2].

■

Revenons aux définitions (2.1), (2.2). On a alors

<u>Lemme 2.1.</u> <u>Sous les hypothèses (1.2), (1.3), (1.4), (1.5)</u>

i) $0 \leq u^{n+1} \leq u^n \leq u^o \leq \frac{\|f\|}{\alpha} \quad \forall\ n \geq 1$

ii) $u^n \in C \quad \forall\ n \geq 0$

Démonstration.

On note $J_x^n(\tau)$ l'espérance intervenant au second membre de (2.2). Comme on peut prendre $\tau = +\infty$ on a facilement

$$u^1(x) \leq J_x^1(+\infty) = u^o(x) \leq \frac{\|f\|}{\alpha}$$

De plus la positivité de u^n est évidente $\forall$ n. Comme M est un opérateur croissant on obtient (i) par récurrence, (ii) est alors (par récurrence) une conséquence du théorème 2.1.

■

Lemme 2.2. Sous les hypothèses du Lemme 2.1.,

$$u^n(x) \searrow u(x) \quad \forall x .$$

Démonstration.

On démontre d'abord $u^n(x) \geq u(x)$ en construisant un contrôle v^n tel que $u^n(x) = J_x(v^n)$. Pour cela on note

(2.16)
$$\tau_n^1 = \text{Inf } (s \geq 0,\ u^n(x_s) = Mu^{n-1}(x_s))$$
$$\tilde{\tau}_n^i = \text{Inf } (s \geq 0,\ u^{n-i+1}(x_s) = Mu^{n-i}(x_s)) \ , \quad i \geq 2$$

(2.17)
$$\tau_n^i = \tau_n^{i-1} + h + \tilde{\tau}_n^i \quad \theta_{\tau_n^{i-1}+h} \quad , \ i \leq n$$

et si $\hat{\xi}_n(x)$ réalise le minimum de $\xi \to c(x,\xi) + e^{-\alpha s}u^n(\xi)$, et est mesurable, on définit

(2.18)
$$\xi_n^i = \hat{\xi}_{n-i+1}(x_{\tau_n^i})$$

(en convenant que sur $\{\tau_n^i = +\infty\}$ on prend ξ_n^i = constante arbitraire).

Alors une conséquence du lemme 1.1 et du Théorème 2.1 est alors (avec les notations de ce lemme et de ce théorème)

$$(2.19) \qquad e^{-\alpha\tau_h}\, w(\xi) = \tilde{P}\{ \int_{\tau_h}^{\hat{\nu}} e^{-\alpha s} f(x_s)ds + e^{-\alpha\hat{\nu}} g(x_{\hat{\nu}}) \;/\; \mathcal{F}_{\tau_h^-} \}$$

où $\hat{\nu} = \tau_h + \hat{\tau}_o\, \theta_{\tau_h}$, $\tau_h = t + h$, (2.19) étant écrit $\tilde{P}$, p.s. et également pour tout temps d'arrêt $\nu \geq \tau_h$

$$(2.20) \qquad e^{-\alpha\tau_h}\, w(\xi) \leq \tilde{E}\{ \int_{\tau_h}^{\nu} e^{-\alpha s} f(x_s)ds + e^{-\alpha\nu} g(x_\nu) \;/\; \mathcal{F}_{\tau_h^-} \} .$$

Autrement dit, on peut "translater" les résultats du Théorème 2.1. Ceci permet d'obtenir, compte tenu des définitions (2.16) à (2.18) que

$$(2.21) \qquad u^n(x) = E_x^{n-1} \{ \int_o^{\tau_n^n+h} e^{-\alpha s} f(x_s)ds + \sum_{j=1}^{h} e^{-\alpha\tau_n^j}\, c(x_{\tau_n^j}, \xi_n^j)$$

$$+ e^{-\alpha(\tau_n^n+h)}\, u^o(\xi_n^n) \}$$

où les P_x^j sont construites comme au lemme 1.1; ceci, compte tenu de la définition de u^o s'écrit encore

$$(2.22) \qquad u^n(x) = E_x^n \{ \int_o^{+\infty} e^{-\alpha s} f(x_s)ds + \sum_{j=1}^{n} e^{-\alpha\tau_n^j}\, c(x_{\tau_n^j}, \xi_n^j) \}$$

Autrement dit $u^n(x) = J_x(v^n)$ si $v^n = (\tau^i, \xi^i)_{i \geq 1}$ avec, $\tau^i = \tau_n^i$, $\xi^i = \xi_n^i$ si $i \leq n$ et $\tau^i = +\infty$, ξ^i = constante quelconque $\forall\, i \geq n+1$.

En utilisant (2.20) et un contrôle admissible quelconque $v = (\tau^i, \xi^i)_{i \geq 1}$, on obtient de manière analogue que

$$u^n(x) \leq E_x^{n-1} \{ \int_o^{\tau^n+h} e^{-\alpha s} f(x_s)ds + \sum_{j=1}^{n} c(x_{\tau^j}, \xi^j)\, e^{-\alpha\tau^j}$$

$$+ e^{-\alpha(\tau^n+h)}\, u^o(\xi^n) \}$$

Soit encore

$$u^n(x) \leq J_x(v) + E_x^{n-1}\; e^{-\alpha(\tau^n+h)} \cdot \frac{\| f \|}{\alpha}$$

Comme $\tau^n \uparrow +\infty$, on obtient

$$\lim_{n\uparrow\infty} u^n(x) \leq J_x(v) \qquad \forall\ v \in \mathcal{V}$$

d'où avec $u^n \geq u$, le résultat cherché.

■

On a alors le corollaire facile suivant

Lemme 2.3. (hypothèses du lemme 2.1)

$u^n \searrow u$ uniformément

Démonstration.

On a $\forall\ \tau$

$$|J_x^n(\tau) - J_x^{n-1}(\tau)| \leq E_x\ e^{-\alpha\tau}|Mu^{n-1}(x_\tau)-Mu^{n-2}(x_\tau)|$$

$$\leq e^{-\alpha h}\ \|u^{n-1} - u^{n-2}\|$$

=>

$$\|u^n - u^{n-1}\| \leq e^{-\alpha h}\ \|u^{n-1} - u^{n-2}\|$$

Donc u^n converge vers $\tilde{u}$ dans C mais comme $u^n(x) \searrow u(x)\ \ \forall\ x$, on a $\tilde{u}=u$.

■

On est maintenant en mesure de démontrer le résultat principal

Théorème 2.2. Sous les hypothèses du lemme 2.1,

i) u est l'élément maximum de l'ensemble des fonctions w vérifiant

(2.23) $$w \leq Mw$$

(2.24) $$w \leq e^{-\alpha t}\ \Phi(t)w + \int_0^t e^{-\alpha s}\ \Phi(s)\ f\ ds \qquad \forall\ t \geq 0$$

(2.25) $$w \in \mathbf{C}$$

ii) <u>il existe un contrôle optimal au problème (1.14). En particulier</u>

$$\hat{\tau} = \text{Inf } (s \geq 0 \quad u(x_s) = Mu(x_s))$$

et

$$\hat{\xi}(x) \text{ réalisant le minimum de } \xi \to c(x,\xi) + u(\xi)\, \bar{e}^{\alpha h}$$

sur U, <u>permet de construire un contrôle optimal.</u>

<u>Démonstration.</u>

Le fait que u est solution de (2.23) à (2.25) est immédiat en utilisant le lemme 2.3 et la caractérisation de u^n du Théorème 2.1. Pour démontrer que c'est la solution maximum, on prend w vérifiant les conditions (i).

(2.24), (2.25) impliquent que

$$\bar{e}^{\alpha t}\, w(x_t) + \int_0^t \bar{e}^{\alpha s}\, f(x_s) ds$$

est une sous martingale, continue à droite, bornée et donc le théorème d'arrêt permet de montrer que

$$w(x) \leq E_x\left(\int_0^\tau \bar{e}^{\alpha s}\, f(x_s) ds + \bar{e}^{\alpha\tau}\, Mw(x_\tau)\right) \tag{2.26}$$

(où l'on a utilisé (2.23)).

On en déduit $(\tau = +\infty)$ $w(x) \leq u^o$, donc $Mw \leq Mu^o$, donc $w \leq u^1$, etc.., donc $w \leq u^n$ $\forall$ n, ce qui donne bien $w \leq u$.

Pour montrer l'existence d'un contrôle optimal, on passe à la limite dans la définition de u^n pour obtenir que u est solution (unique) de

$$u(x) = \text{Inf}_\tau\, E_x\left(\int_0^T \bar{e}^{\alpha s} f(x_s) ds + \bar{e}^{\alpha\tau}\, Mu(x_\tau)\right). \tag{2.17}$$

Alors on utilise $\hat{\vartheta} = (\tau^i, \xi^i)_{i \geq 1}$ défini par

$$\hat{\tau} = \text{Inf } (s \geq 0, \quad u(x_s) = Mu(x_s))$$

$$\tau^1 = \hat{\tau}$$

$$\tau^i = \tau^{i-1} + h + \hat{\tau}_o\, \theta_{\tau^{i-1}+h} \qquad i \geq 2$$

$$\xi^i = \xi(x_{\tau^i})$$

où ξ est une fonction mesurable telle que $\xi(x)$ minimise $c(x,\xi) + u(\xi)e^{-\alpha h}$ sur U (U est compact, u et c sont continues), et comme pour le lemme 2.2 on montre que $u(x) = J_x(\hat{\vartheta})$.

■

Remarque 2.1. un résultat important est qu'il suffit de pouvoir calculer u pour obtenir un contrôle optimal ce qui est une situation générale en contrôle impulsionnel mais pas dans les problèmes de contrôle "continus" i.e. où le contrôle intervient par exemple dans les coefficients d'une diffusion, le calcul du contrôle faisant alors intervenir les dérivées du coût optimal.

■

Remarque 2.2. on peut démontrer que u est même solution maximum du système (2.23), (2.24) dans une classe plus grande de fonctions : à savoir l'ensemble des w telles que $u^o - w$ est α-excessive (pour $\Phi(t)$) et telles que $w \leq \mathbb{M}w$. On a aussi pour ces fonctions l'inégalité (2.26).

■

Remarque 2.3. les résultats précédents s'étendent au cas h=0 mais pas la construction du §.1. Il faut effectuer une construction (plus compliquée) sur $(\Omega^{\mathbb{N}}, \mathcal{F}^{\otimes \mathbb{N}})$ mais la méthode utilisant une suite de problèmes d'arrêt optimal peut encore être appliquée.

3. Remarques sur les inéquations quasi variationnelles.

On peut démontrer que si $u \in \mathcal{D}_{\tilde{A}}$ (domaine du générateur infinitésimal faible de $\Phi(t)$), alors u est l'unique solution du système.

$$(3.1)\qquad \begin{cases} -\tilde{A}u + \alpha u \leq f \\ u \leq Mu \\ (-\tilde{A}u + \alpha u - f)(u - Mu) = 0 \end{cases}$$

qui est l'analogue des inéquations quasi-variationnelles introduites par A. Bensoussan - J.L. Lions [1], [2] pour les diffusions.

Malheureusement on ne sait pas montrer, en général, que $u \in \mathcal{D}_{\tilde{A}}$. C'est cependant vrai pour un processus de Markov de saut à espace d'état dénombrable. Mais il est possible de donner des exemples où l'on sait caractériser u comme solution d'une inéquation quasi-variationnelle posée dans un espace plus grand que $\mathcal{D}_{\tilde{A}}$. cf. par exemple [1], [2], [3] pour les processus de diffusions, [4] pour un exemple concernant les processus semi-markoviens.

L'intérêt pratique des I.Q.V réside dans le fait que l'on peut les résoudre <u>numériquement</u>, ce qui n'est pas le cas de la caractérisation obtenue au §.2.

<u>Références</u>.

[1] A. Bensoussan - J.L. Lions ; "Nouvelles méthodes en contrôle impulsionnel". J. of Applied Math. and Optim. 1974 n°4, p. 284-312.

[2] A. Bensoussan - J.L. Lions ; "Contrôle impulsionnel et temps d'arrêt : inéquations variationnelles et quasi variationnelles d'évolutions". Cahier de Math. de la Décision - Paris IX, 1975.

[3] M. Robin ; "Contrôle impulsionnel avec retard pour les processus de diffusion". C.R.A.S. 1976, T. 282 Série A, pp. 463-466.

[4] M. Robin ; "Impulsive control with time lag". Proceeding JACC 1976. La Fayette Indiana.

[5] A. Bensoussan - J.L. Lions ; "<u>Temps d'arrêt et Contrôle impulsionnel</u>". <u>Hermann</u> Vol. 1, à paraître.

[6] A.N. Shiriaev ; "<u>Sequential statistical Analysis</u>". 1973 AMS. Providence, R.I.