ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

M. METIVIER
J. PELLAUMAIL

Une construction élémentaire de l'intégrale stochastique

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 61, série *Mathématiques*, n° 14 (1976), p. 101-113
<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1976__61_14_101_0>

UNE CONSTRUCTION ELEMENTAIRE DE L'INTEGRALE STOCHASTIQUE

M. METIVIER ET J. PELLAUMAIL

UNIVERSITE DE RENNES

INTRODUCTION : Le but de cet exposé est uniquement de donner une construction élémentaire de l'intégrale stochastique dans un cadre très légèrement plus général que celui considéré en [2] ; cet exposé ne comporte donc pas de résultats nouveaux et, même, les conditions d'intégrabilité obtenues sont moins générales que celles indiquées en [7] ou [8].

La technique fondamentale est l'utilisation de la notion de processus régional (cf. A-5 ci-après). Notons que ceci permet de donner un traitement simple et unifié de l'intégrale stochastique que ce soit par rapport à une martingale, un processus croissant, ou une quasi-martingale locale.

A - PROCESSUS REGIONAL :

A-1 : Données et notations générales :

Dans toute cette étude, on considère :

$T = [0,1]$ (intervalle unité de la droite réelle); un espace probabilisé complet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$; une suite croissante $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ de sous-tribus de $\mathcal{F}$, chaque tribu $\mathcal{F}_t$ contenant tous les ensembles de mesure nulle de $\mathcal{F}$ (cette propriété n'est pas nécessaire pour la construction du processus intégrale stochastique à une modification près).

Quand on parlera de processus adapté, de temps d'arrêt, de martingale, etc..., ce sera toujours relativement à la base $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t \in T})$

Quand on parlera de processus réel (sans préciser), il s'agira d'une application de $(\Omega \times T)$ dans $\mathbb{R}$; par contre, si $(X_t)_{t \in T}$ est une famille indexée par T, d'éléments de $L_0(\Omega, \mathcal{F}, P)$, on dira, suivant l'abus de langage usuel, que X est un "processus défini à une modification près".

On notera :

$\Omega' = \Omega \times (T \setminus \{0\})$

$\mathcal{R} = \{H \times]s,t], \; s < t, \; H \in \mathcal{F}_s\}$

$\mathcal{R}$ est donc une famille de partie de Ω'.
$\mathcal{A}$ = algèbre engendrée par $\mathcal{R}$;

$\mathcal{P}$ = tribu engendrée par $\mathcal{A}$; cette tribu est appelée tribu des prévisibles ; un processus Y est dit prévisible si'il est mesurable par rapport à cette tribu.

On dira qu'un processus réel X est cadlag si, pour P-presque toutes trajectoires ω, la fonction réelle $t \rightsquigarrow X_t(\omega)$ est continue à droite et admet en tout point une limite à gauche.

On dira que deux processus X et X' sont indistinguables, si $P\{\omega : \exists\, t,\ X_t(\omega) \neq X'_t(\omega)\} = 0$. En fait, pour l'essentiel, les processus considérés dans la suite le seront à une indistinguabilité près. Si u et v sont deux temps d'arrêt, on notera $]u,v]$ la partie (intervalle stochastique) de $\Omega \times T$ définie par $(\omega,t) \in\,]u,v] \iff u(\omega) < t \leq v(\omega)$; nous effectuons ainsi un abus de notation mais celui-ci ne semble pas présenter d'inconvénients pour le lecteur averti ; il faut donc noter que, si u et v sont des temps d'arrêt constants, soit u = s et v = t, alors $]u,v]$ désigne une partie de $\Omega\times T$, alors que $]s,t]$ désigne une partie de T.

A-2 : Le problème de l'intégrale stochastique :

Etant donnés un processus Y réel (en général prévisible) et un processus réel X défini à une modification près, le problème est :

1°) de définir, pour tout élément t de T, la variable aléatoire $Z_t = \int_0^t Y_s . dX_s$

2°) d'étudier le processus $(Z_t)_{t\in T}$ *ainsi défini à une modification près.*

Pratiquement, on ne considère que des processus X qui admettent une modification cadlag (définie à l'indistinguabilité près) que l'on va encore noter X. Une idée naturelle est, alors, de définir l'intégrale stochastique "par trajectoires", c'est-à-dire de poser, pour tout élément ω de Ω, $Z_t(\omega) = \int_0^t Y_t(\omega) .\ dX_t(\omega)$. Malheureusement, pour une classe indispensable de processus dont le mouvement brownien, $dX_t(\omega)$ ne définit pas une mesure (la fonction $t \rightarrow X_t(\omega)$ n'est pas à variation bornée). On est donc obligé de définir l'intégrale stochastique d'une façon plus globale.

A-3 : Cas des processus $\mathcal{A}$-étagés :

On notera $\mathcal{E}$ *l'ensemble des processus réels* $\mathcal{A}$*-étagés, c'est-à-dire l'ensemble des processus réels* Y *tels que* $Y = \sum_{i \in I} a_i \cdot 1_{A(i)}$, *où* $(a_i)_{i \in I}$ *est une famille finie de réels et où* $(A(i))_{i \in I}$ *est une famille finie associée d'éléments de* $\mathcal{A}$ *;*

on vérifie facilement que, dans cette écriture, on peut supposer que les ensembles $A(i)$ sont deux à deux disjoints et appartiennent à $\mathcal{R}$.

Dans ce cas, l'intégrale stochastique $\int Y\,dX$ peut être définie "par trajectoires", le processus $(Z_t)_{t \in T}$ défini par $Z_t = \int_0^t Y\,dX$ étant défini à une modification près s'il en est de même de X. L'intégrale stochastique $\int_0^1 Y\,dX$ est alors une application linéaire définie sur $\mathcal{E}$, à valeurs dans $L_0(\Omega, \mathcal{F}, P)$, caractérisée par le fait que, si $A = H \times]s,t]$ appartient à $\mathcal{R}$ et si $Y = 1_A$, $\int_0^1 Y\,dX = \int_{]0,1]} Y\,dX = 1_H.(X_t - X_s)$.

Le problème est d'étendre cette intégrale à une classe plus vaste que la classe des processus $\mathcal{A}$-étagés.

Pour alléger les notations, on posera $\int Y\,dX = \int_{]0,1]} Y\,dX$. De même, si Y est un processus prévisible et si a est une mesure définie sur la tribu des prévisibles, on notera $\int Y.da$ au lieu de $\int_{\Omega'} Y.da$.

A-4 : Une première extension :

Considérons un processus réel X défini à une modification près satisfaisant à la condition suivante :
(i) il existe une mesure positive a telle que, pour tout processus Y réel $\mathcal{A}$*-étagé, on ait* $E[(\int Y.dX)^2] \leq \int Y^2.da$

Dans ce cas, l'application $Y \rightsquigarrow \int Y\,dX$ définie sur $\mathcal{E}$ et à valeurs dans $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est continue si on considère $\mathcal{E}$ comme un sous-espace de $L_2(\Omega', \mathcal{P}, a)$; cette application se prolonge donc, de façon unique, en une application linéaire continue définie sur $L_2(\Omega', \mathcal{P}, a)$ et à valeurs dans $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. L'image, par cette application, de Y sera notée $\int Y\,dX$ et sera appelée l'intégrale stochastique de Y par rapport à X.

A-5 : Processus régional :

On dira qu'un processus réel X défini à une modification près est un processus régional si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un élément F de $\mathcal{F}$ tel que $P(F) \geq 1-\varepsilon$ et il existe une mesure positive a définie et finie sur la tribu des prévisibles tels que, pour tout processus Y réel $\mathcal{A}$-étagé, on ait :

$$E[1_F . (\int Y.dX)^2] = (||1_F . \int Y.dX||_{L^2(\Omega,\mathcal{F}, P)})^2 \leq \int_{\Omega'} Y^2.da$$

Notons que, pour la construction de l'intégrale stochastique donnée ci-après, il suffit de supposer que les mesures positives a sont σ-finies.

A-6 : Proposition :

Un processus X défini à une modification près est un processus régional si et seulement si il existe une mesure positive a, une suite croissante de constantes $(K_n)_{n>o}$ et une suite croissante $(F(n))_{n>o}$ d'éléments de $\mathcal{F}$ tels que :

(i) pour tout n, $P\,[F(n)] \geq 1 - 2^{-n}$

(ii) pour tout n et pour tout processus Y réel $\mathcal{A}$-étagé,

$$E\,[1_{F(n)} . (\int Y\,dX)^2] \leq K_n . \int_{\Omega'} Y^2 . da$$

Preuve : Les conditions ci-dessus impliquent évidemment les conditions données en A-5. Réciproquement, soit X un processus régional au sens indiqué en A-5. Pour tout n, soient a_n une mesure positive et G(n) un élément de $\mathcal{F}$ tels que $P\,[G(n)] \geq 1 - 2^{-(n+1)}$ et, pour tout processus Y réel $\mathcal{A}$-étagé, on ait $E\,[1_{G(n)} . (\int Y\,dX)^2] \leq \int Y^2 . da_n$.

Soient $F(n) = \bigcap_{k\geq n} G(k)$, $K_n = 2^n . a_n(\Omega')$ et a la mesure positive définie par $a(.) = \sum_{n>o} 2^{-n} \cdot \frac{1}{a_n(\Omega')} \cdot a_n(.)$. On vérifie immédiatement que a, $(F(n))_{n>o}$ et $(K_n)_{n>o}$ satisfont aux conditions A-6 - (i) et (ii).

<u>A-7 : Remarque (régionalisation)</u> :

La proposition A-6 revient à dire que le processus X est régional si, pour tout n, le processus X "arrêté" à la variable aléatoire $u(n) = 1_{F(n)}$ (qui n'est pas en général un temps d'arrêt) satisfait à la condition A-4 (i) (pour la mesure $K_n.a(.)$).

On introduit ainsi une technique consistant à "arrêter" par une variable aléatoire 1_F (avec P(F) aussi voisin de 1 que l'on veut) que l'on appellera "régionalisation" ; cette technique est évidemment plus générale que celle, classique, de localisation.

<u>A-8 : Construction de la variable aléatoire $\int Y.dX$</u> :

Soit X un processus satisfaisant aux conditions A-6 (i) et (ii) (c'est à dire un processus régional). Soit Y un processus qui appartient à $L^2(\Omega', \mathcal{P}, a)$. Pour tout n, on définit la variable aléatoire $Z_n = 1_{F(n)} \cdot \int Y.dX$ comme au paragraphe A-4 ; pour $m \geq n$, on a $1_{F(n)} \cdot Z_m \underset{P\text{-p.s.}}{=} 1_{F(n)}.Z_n \underset{P\text{-p.s.}}{=} Z_n$ (ceci est vrai pour $Y = 1_A$ avec $A \in \mathcal{R}$, donc ceci est vrai pour tout élément Y de $L^2(\Omega', \mathcal{P}, a)$ par linéarité et densité). La variable aléatoire $Z = \int Y.dX$ est alors définie comme la variable aléatoire, unique P-p.s., telle que, pour tout n, $Z_n \underset{P\text{-p.s.}}{=} Z.1_{F(n)}$. Cette variable aléatoire Z ne dépend pas du triplet $(a,(F(n))_{n>o},(K_n)_{n>o})$ (ceci est vrai pour $Y = 1_A$ avec $A \in \mathcal{A}$ et donc dans le cas général par linéarité et densité). Cette variable aléatoire, qui ne dépend donc que de X et de Y est appelée l'intégrale stochastique de Y par rapport à X et sera notée $\int Y.dX$.

A-9 : Processus intégrale stochastique :

Soit X un processus qui satisfait aux conditions A-6 (i) et (ii). Soit Y un processus qui appartient à $L^2(\Omega', \mathcal{P}, a)$. Pour tout élément t de T, on peut poser $Z_t = \int Y.1_{(\Omega\times]o,t])} \cdot dX$

Le processus $Z = (Z_t)_{t\in T}$ est un processus défini à une modification près qui est le processus intégrale stochastique de Y par rapport à X.

A-10 : Théorème de convergence dominée :

Plaçons-nous dans le cadre des hypothèses et des notations indiquées en A-9 ci-dessus. Supposons, de plus, que X possède une modification cadlag adaptée que l'on notera encore X ; soit $(Y_n)_{n>o}$ une suite de processus $\mathcal{A}$-étagés telle que, pour tout n, $\int (Y-Y_n)^2.da \leqslant \frac{1}{2}\, 8^{-n}.(K_n)^{-1}$. Pour tout n, soit Z^n le processus cadlag défini par $Z^n(t) = \int Y_n.1_{(\Omega\times]o,t])}.dX$ (Z^n peut être choisi cadlag puisque Y_n est $\mathcal{A}$-étagé). Pour tout couple (m,n) d'entiers avec n < m, soit u(n,m) le temps d'arrêt défini par :

$$u(m,n) = \inf . \{t : |Z^n(t) - Z^m(t)| \geqslant 2^{-n}\}$$

(avec la convention, $[u(m,n)](\omega) = 1$ si l'ensemble ci-dessus est vide).

Soit $G(m,n) = \{\omega : [u(m,n)]\ (\omega) < 1\}$

Pour tout temps d'arrêt étage v, on a :

$$E\ [1_{F(n)}.(Z^n_v - Z^m_v)^2] = E\ [1_{F(n)}.(\int 1_{]o,v]}.(Y^n - Y^m).dX)^2]$$

$$\leqslant K_n \cdot \int 1_{]o,v]}.(Y^n - Y^m)^2\ .da$$

$$\leqslant 4^{-n} . K_n$$

On vérifie que la même propriété subsiste si v est un temps d'arrêt quelconque (puisqu'un tel temps d'arrêt est limite d'une suite décroissante de temps d'arrêt étagés) et donc, notamment, si $v = u(m,n)$; dans ce cas on a :

$$P\left[G(m,n)\right] \leq P\left[\Omega \setminus F(n)\right] + P\left[F(n) \cap G(m,n)\right]$$

$$\leq 2^{-n} + P\left(\left[\,|Z_v^n - Z_v^m| > 2^{-n}\right] \cap F(n)\right)$$

$$\leq 2^{-n} + 4^n \, . \, E\left[(Z_v^n - Z_v^m)^2 \, . \, 1_{F(n)}\right]$$

$$\leq 2 \, . \, 2^{-n}$$

Si on pose $G = \bigcap_{n>0} \{ \bigcup_{j\geq n} G(j,j+1)\}$, on a donc $P(G) = 0$ et, si $\omega \notin G$, la suite de fonctions réelles $t \rightsquigarrow Z_t^n(\omega)$ est uniformément de Cauchy, donc elle converge vers une fonction $\hat{Z}_t(\omega)$.

Le processus $\hat{Z}$ ainsi défini à l'indistinguabilité près est une modification cadlag du processus Z. On a donc montré que :
Si X possède une modification cadlag, il en est de même de Z.

En fait, on a beaucoup plus que cela ; soit X un processus cadlag qui satisfait aux conditions A-6 (i) et (ii) ; soit $(Y_n)_{n>0}$ est une suite de processus prévisibles réels qui converge vers Y au sens de la convergence dominée ; quitte à considérer une sous-suite on peut supposer que l'on a, pour tout n, $\int (Y-Y_n)^2 \, . \, da \leq \frac{1}{2} \, 8^{-n} . (K_n)^{-1}$.

Pour tout n, soit Z_n une modification cadlag du processus intégrale stochastique $\int Y_n \, . \, dX$; le même raisonnement que ci-dessus montre que : *la suite de processus $(Z_n)_{n>0}$ converge P-p.s. uniformément par trajectoires vers une modification cadlag du processus $Z = \int Y.dX$.*

On voit donc que l'intégrale stochastique $Y \rightsquigarrow \int Y.dX$ satisfait à "un théorème de convergence dominée" et que, quitte à considérer une sous-suite, on a alors une convergence uniforme par trajectoires P-p.s.

Ceci montre, par exemple, que si X admet une modification continue (resp. prévisible), il en est de même de Z. De même, si u est un temps d'arrêt, ceci montre que le processus intégrale stochastique de Y par rapport au processus X arrêté à u est le processus Z arrêté à u où Z est le processus intégrale stochastique de Y par rapport à X. Toutes ces propriétés sont évidentes si Y est $\mathcal{A}$-étagé ; elles sont encore vraies dans le cas général compte tenu du théorème de convergence dominée indiqué précédemment.

A-11: Proposition : (changement de probabilité)

On considère la base de processus $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t\in T})$ *dans laquelle on ne suppose pas* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *complet. Soit Q une autre probabilité définie sur* $(\Omega, \mathcal{F})$. *Soit X un processus défini sur* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in T})$, *(X est donc une fonction réelle définie sur* $\Omega \times T$), *qui est régional à la fois pour la probabilité P et pour la probabilité Q . Soit Y un processus prévisible qui est stochastiquement intégrable par rapport à X à la fois pour P et pour Q . Alors, il existe une variable aléatoire Z qui appartient à* $L_0(\Omega, \mathcal{F}, P+Q)$ *et qui est P.p.s. égale à* $\int Y\, dX$ *pour P et Q.p.s. égale à* $\int Y\, dX$ *pour Q.*

Preuve : Soient a une mesure positive finie sur $\mathcal{P}$, $(F(n))_{n>0}$ une suite croissante d'éléments de $\mathcal{F}$ et $(H_n)_{n>0}$ une suite croissante de constantes positives telles que, pour tout processus Y $\mathcal{A}$-étagé,

$E[1_{F(n)} \cdot (\int Y\, dX)^2] \leq H_n \int Y^2\, da$ et $P[F(n)] \geq 1 - 2^{-n}$.

Soient, de même, b, $(G(n))_{n>0}$ et $(K_n)_{n>0}$ associées à X pour la probabilité Q.

Considérons d'abord le cas où Y est uniformément borné par la constante h. Soit $(Y_n)_{n>0}$ une suite de processus $\mathcal{A}$-étagés uniformément bornés par h, suite qui converge (a + b) - p.s. vers Y. Soit Z_n la variable aléatoire définie par $Z_n = \int Y_n\, dX$. La suite $(Z_n)_{n>0}$ est de Cauchy dans $L_0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et dans $L_0(\Omega, \mathcal{F}, Q)$; elle est donc de Cauchy dans $L_0(\Omega, \mathcal{F}, P + Q)$ d'où le résultat.

Si Y n'est pas uniformément borné, on pose $Y_n = (Y^+ \wedge n) - (Y^- \wedge n)$ et on reprend le raisonnement qui précède avec la suite (Y_n).

A-12: Formule de Ito :

Soit X un processus réel cadlag régional ; on peut alors prouver la formule de Ito pour X comme indiqué en [5] (sans utiliser d'autres résultats).

A-13: Cas où Y n'est pas prévisible :

Dans divers cas, notamment le cas où X est à trajectoires continues, l'intégrale stochastique $\int Y\, dX$ admet un prolongement canonique à certains processus optionnels Y (cf., par exemple, [6]).

B - EXEMPLES DE PROCESSUS REGIONAUX :

B-1 : Mesure de Doléans et martingale de carré intégrable :

Le problème est maintenant de vérifier que la classe des processus régionaux contient les processus étudiés usuellement. Pour cela, la notion de mesure de Doléans est fondamentale.

Nous ne reproduirons pas ici l'étude, désormais classique, de cette notion, notamment l'existence d'une mesure de Doléans d'un processus croissant intégrable, l'existence d'une mesure de Doléans quadratique pour une martingale M de carré intégrable, les propriétés d'isométrie de l'intégrale stochastique associée $\int Y\, dM$, etc ... (pour une étude directe de ces propriétés, cf [4]).

Nous nous proposons seulement de prouver le théorème B-5 ci-après.

B-2 : Lemme :

Soit $(a_i, b_i)_{i \in I}$ une famille finie de couples de réels positifs ; on a :

$$\left(\sum_{i\in I} a_i\, b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i\in I} a_i^2\, b_i\right)\left(\sum_{i\in I} b_i\right)$$

Ce lemme est un cas particulier de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

B-3 : Proposition :

Soit X un processus réel cadlag à variation bornée ; X est alors un processus régional.

Preuve :

Il suffit de considérer le cas où X est un processus croissant tel que $X_o = 0$. Dans ce cas, soit x_n la mesure de Doléans du processus $X \wedge n$. Pour chaque entier n, on pose $F(n) = \{\omega : X_1(\omega) \leq n\}$. Soit Y un processus réel $\mathcal{A}$-étagé; si ω appartient à $F(n)$, le lemme B-2 ci-dessus implique :

$$|(\int Y.dX)(\omega)|^2 \leq (\int Y^2.dX)(\omega).X_1(\omega) \leq n.(\int Y^2.dX)(\omega)$$

ce qui implique :

$$E[1_{F(n)}.(\int Y.dX)^2] \leq n . E[\int Y^2.d(X \wedge n)]$$

le processus Y étant prévisible, cette quantité est plus petite que $n. \int Y^2.dx_n$

B-4 : Lemme :

Soit Z une surmartingale cadlag qui admet a comme mesure de Doléans. Soit A le processus "prévisible" associé à a. Soit u un temps d'arrêt prévisible. On suppose que, pour tout élément (ω,t) de $(\Omega\times t)$, $Z_t(\omega) \leq d$ (où d est une constante). On a alors

$$E\,(A_u - A_{u-})^2 \leq 2\,d\,E\,(A_u - A_{u-})$$

Preuve :

$$E\{(A_u - A_{u-})^2\} = E\{\int 1_{[u]}.(A_u - A_{u-}).dA_u\}$$

Puisque $1_{[u]}$ (considérée comme fonction réelle définie sur $\Omega\times T$), A_u et A_{u-} sont prévisibles et puisque A et X ont mêmes mesures de Doléans, on a aussi :

$$E\{(A_u - A_{u-})^2\} = E\{\int 1_{[u]}.(A_u - A_{u-}).dZ\}$$

$$\leq 2d\, E(|A_u - A_{u-}|)$$

$$\leq 2d\, E(A_u - A_{u-})$$

puisque A est croissant.

B-5 : Théorème :

Soit X un processus qui est la somme d'un processus cadlag à variation bornée (par trajectoires) et d'une martingale locale (cadlag). Alors X est un processus régional.

Preuve : La preuve qui suit est une modification de la preuve donnée par Meyer dans [2].

L'espace des processus régionaux étant un espace vectoriel, il suffit de montrer qu'une martingale locale est un processus régional compte-tenu de la proposition B-3. Il suffit donc de montrer qu'une martingale M (uniformément intégrable) est un processus régional (la technique de "régionalisation" étant plus générale que celle de "localisation"). On peut supposer que cette martingale M est telle que $M_o = 0$ et que $M_1 \geq 0$.

Par localisation, on peut se ramener au cas où il existe un temps d'arrêt et une constante d, tels que $M_t(\omega) \leq d$ pour $t < u(\omega)$ et $M_t(\omega) = M_u(\omega)$ pour $t \geq u(\omega)$. (on considère les temps d'arrêt u(n) définis par $u(n) = \inf.\{t : |M_t| \geq n\}$ et on utilise le fait que $\lim_{n\to\infty} P[u(n) < 1] = 0$).

Dans ce cas, soit $Z = X_t \cdot 1_{]o,u]}$ et $B_t = X_t \cdot 1_{[u,1]}$.

Soit a la mesure de Doléans de B (et donc de la sous-martingale - Z) et soit A le processus "naturel" prévisible associé à a. Pour tout n, on pose

$u'(n) = \inf. \{t : A_t \geq n\}$. Puisque $0 = \lim\limits_{n\to\infty} P\,[u'(n) < 1]$ il suffit de montrer que M arrêtée à $u'(n) = u'(n) \wedge u$ est un processus régional. Puisque le processus naturel de B arrêtée à u'(n) est le processus naturel, arrêté à u'(n), de B, on peut, pour alléger les notations, supposer que u'(n) = u ce qu'on fera désormais. On a alors :

$$E\,(A^2_{u-}) \leq n^2 \qquad \text{(par construction de } u'(n))$$

$$E\,[(A_u - A_{u-})^2] \leq d \,.\, E\,(A_u - A_{u-})$$

(compte-tenu du lemme B-4), de ce que $|Z_t(\omega)| \leq d$ quels que soient t et ω et de ce que u'(n) est un temps d'arrêt prévisible).

donc $\quad E\,(A^2_1) = E\,(A^2_u) < +\infty$

On a donc $\qquad M = (Z + A) + B - A$

où B - A est un processus à variation bornée et Z + A est une martingale de carré intégrable (puisque $E(Z^2_1) \leq d^2$ et $E\,(A^2_1) < +\infty$). Le processus M est donc un processus régional.

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. DELLACHERIE, *Capacités et processus stochastiques,* Springer Verlag (1972)

[2] P.A. MEYER, *Séminaire de Probabilités X,* Lecture Notes N° 511. Springer Verlag (1976)

[3] M. METIVIER, *Stochastic Integrals and Vector valued measures.* In *Vector and Operator valued measures and applications,* Academic Press (1973)

[4] J. PELLAUMAIL, *Sur l'intégrale stochastique et la décomposition de Doob-Meyer,* Astérisque N° 9, Société Mathématique de France (1973)

[5] J. PELLAUMAIL, *Formule de Ito dans le cas non continu,* Séminaire de Probabilités de Rennes (1973)

[6] J. PELLAUMAIL, *Un lemme élémentaire de théorie de la mesure,* Séminaire de Probabilités de Rennes (1973)

[7] J. PELLAUMAIL, *On the use of group-valued measures in stochastic processes.* Misure su gruppi e su spazi vettoriali. Roma. Giugnio (1975).

[8] M. METIVIER et J. PELLAUMAIL *Mesures stochastiques à valeurs dans des espaces* L_0 Séminaire de Rennes (1975) proposé pour publication.

- : -