Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2
Série Mathématiques

MARC KRASNER

Polythéorie de Galois abstraite dans le cas infini général

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 60, série *Mathématiques*, n° 13 (1976), p. 87-91

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1976__60_13_87_0>

Ann. Sci. Univ. Clermont, Sér. Math., fasc. 13, 1976, pp. 87-91

POLYTHEORIE DE GALOIS ABSTRAITE DANS LE CAS INFINI GENERAL

Marc KRASNER

Université de PARIS VI, PARIS, France

Soit E un ensemble (qu'on dira *support*) et soit X un ensemble auxiliaire (qu'on dira *ensemble des arguments*). Toute application $P : X \to E$ de X dans E sera dite un X-*point de* E, et tout ensemble $r \subseteq E^X$ de tels points sera dit une X-*relation de* E. Le cardinal card X de X est dit l'*arité* de r, et le cardinal de r est dit sa X-*largeur*. Si Y est disjoint avec X, on identifiera la X-relation r avec la $(X \cup Y)$-relation $r \times E^Y$, et on prolongera cette identification par symétrie et transitivité. L'équivalence ainsi obtenue sera dite la *première identification canonique*.

Si $f : E \to E$ est une autoapplication de E, $f \circ P$ sera dit le *transformé* de $P : X \to E$ par f, et $f.r = \{f \circ P \,;\, P \in r\}$ en sera dit un de r. On dira que r est *stable* par f si $f.r \subseteq r$. En particulier, si $s : E \to E$ est une permutation(1) de E, on dira que s *préserve* r si $s.r = r$. La stabilité et la préservation commutent avec l'identification canonique. Déjà en 1936(2), j'ai introduit une théorie, appelée plus tard *théorie de Galois abstraite*, qui, à l'image de la théorie de Galois ordinaire, est une théorie de dualité entre les groupes de permutations et leurs invariants, qui sont ici des relations arbitraires (et, en particulier, d'arité quelconque) du support permuté, qui sont préservés par les élements du groupe considéré. On peut considérer, également, cette théorie comme un analogue, pour les structures quelconques de premier ordre, du «programme d'Erlangen» de F. Klein. Soit R un ensemble de X-relations de E. Les permutations s de E, préservant tout $r \in R$, forment un groupe $G_{E/R}$, dit *groupe de Galois* de E/R. Deux problèmes se posent :

1) Comment caractériser, à partir de $R \neq \emptyset$, l'ensemble $\overline{R}$ de toutes les X-relations préservées par tous $s \in G_{E/R}$?

2) Quels groupes de g de permutations de E sont de la forme $G_{E/R}$?

---

(1) c'est-à-dire une bijection de E (certains auteurs emploient le terme «permutation» avec un sens plus restrictif).

(2) Voir M. Krasner, [1].

Sous l'hypothèse card X $\geqq$ card E, la réponse à ces questions est la suivante :

1) $\overline{R}$ est la fermeture de R par rapport aux opérations ensemblistes suivantes sur les X-relations, dites *opérations fondamentales :*

a) opérations booléennes infinitaires, autrement dit :

a α) intersection infinitaire $T \longrightarrow \cap T$;

a β) réunion infinitaire $T \longrightarrow \cup T$ (T désigne ici un ensemble arbitraire de X-relations) ;

a γ) la négation $r \longrightarrow \neg r = E^X . . r$ (où A. .B désigne le complément de B dans A) ;

b) les cylindrifications $r \longrightarrow r_X = (r \mid \overline{X}) \times E^{X . . \overline{X}}$, où $\overline{X}$ est un sous-ensemble arbitrairement fixé de X et $(... \mid \overline{X})$ désigne la restriction à $\overline{X}$;

c) les mutations ou changements généralisés de noms d'arguments qu'il serait trop long de décrire ici, et dont la description est donnée, par exemple, dans [2] et [4] ;

2) Tout groupe g de permutations de E est de la forme $G_{E/R}$ pour un R convenable.

En 1964(3), j'ai trouvé une généralisation de cette théorie que j'avais appelé *endothéorie de Galois abstraite.* On remplace, dans cette théorie, les permutations de E par ses autoapplications et la préservation des relations par leur stabilité. Si R est un ensemble de X-relations de E, on considère le demi-groupe $D_{E/R}$ (dit *demi-groupe de stabilité* de E/R) des autoapplications $f : E \longrightarrow E$ de E, qui laissent stable toute $r \in R$. On se pose les questions analogues aux précédentes :

1) Comment caractériser, à partir de $R \supset \{\emptyset, I = E^X\}$ l'ensemble $\overline{\overline{R}}$ des X-relations de E que tout $f \in D_{E/R}$ laisse stables ?

2) Quels demi-groupes D d'autoapplications de E sont de la forme $D_{E/R}$?

Les réponses, sous la même hypothèse card X $\geqq$ card E, sont :

1) $\overline{\overline{R}}$ est la fermeture de R par rapport aux opérations (dites *opérations fondamentales directes*) a α), a β), b) et c) ;

2) D est, pour un R convenable, de la forme $D_{E/R}$, si et seulement si l'identité 1_E de E est $\in$ D.

A. Malcev(4) a envisagé des transformations plus générales de relations d'arité finie. La condition de finitude ne jouant, en fait, aucun rôle, je vais en donner la définition générale : on appelera *polyapplication* de E toute application $f : E^Y \longrightarrow E$ d'une puissance cartésienne E^Y de Y (où Y n'est pas supposé fini) dans E. Le cardinal card Y de Y sera dit la *topicité* de cette polyapplication f. Comme pour les relations on ne considerera souvent les polyapplications qu'à l'*identification canonique* près, en identifiant $f : E^Y \longrightarrow E$ avec $\hat{f} : E^{Y \cup Z} \longrightarrow E$ (où $Y \cap Z = \emptyset$) telle que, pour tout $a \in E^{Y \cup Z}$, $\hat{f}(a) = f((a \mid Y))$, et en étendant cette

---

(3) voir [3] et [4].

(4) voir [7].

identification par symétrie et transitivité (cette identification ne préserve pas la topicité).
Soit $f : E^Y \longrightarrow E$, et faisons correspondre à chaque $y \in Y$ une autoapplication $g_y : E^{Z_y} \longrightarrow E$. Soient g le vecteur $(g_y \,;\, y \in Y)$ et $Z = \bigcup_{y \in Y} Z_y$. Alors, tout g_y s'identifie avec un $\hat{g}_y : E^Z \longrightarrow E$ convenable. On appelle la *superposée* $g \circ f$ des $g = (g_y)$ et de f la polyapplication $E^Z \longrightarrow E$ telle que, pour tout $a = (a_z \,;\, z \in Z)$, on ait $(g \circ f)(a) = f(g.a)$, où $g.a = (y \rightarrow \hat{g}_y(z) \,;\, y \in Y)$. Si $y_0 \in Y$ et si $a = (a_y : y \in Y)$, on appelle y_0-*selecteur* la polyapplication $S_{y_0} : E^Y \rightarrow E$ telle que $S_{y_0}(a) = a_{y_0}$. Un ensemble de polyapplications de topicité $< \mu$ (où μ est un cardinal) est dit un μ *-polygroupe* s'il contient les selecteurs, est fermé par rapport à la superposition (ce qui exige la régularité de μ) et l'est par rapport aux identifications canoniques des polyapplications de topicité $< \mu$.
2-polygroupe n'est autre chose qu'un demi-groupe d'autoapplications, et les $\aleph_0$-polygroupes sont équivalentes, si E est fini, aux algèbres de Post, et ont été ainsi appelés par Kaloujnine et ses élèves(5).

Soient r une X-relation de E et $f : E^Y \longrightarrow E$ une polyapplication de E. Si $t : y \longrightarrow P_y$ est une application de Y dans r (une telle application sera dite un Y-*polypoint* de r) et si $P_y = (x \rightarrow P_y.x \,;\, x \in X)$, on posera $f.t = (x \rightarrow f((P_y.x \,;\, y \in Y))$. On dira que f laisse r *stable* (ou que r *est stable* par f) si, pour tout Y-polypoint t de r, on a $f.t \in r$(6). Cette stabilité commute encore avec l'identification canonique.

L. Kaloujnine avec ses élèves (V. Bondartchouk, V. Kotov, B. Romov) ont posé(5), pour les ensembles R de relation d'arité finie sur un support E fini et pour les polyapplications de E de topicité finie, les problèmes 1) et 2) analogues à ceux de l'endothéorie de Galois abstraite.
Soit $\mathrm{Pol}^{(\aleph_0)}_{E/R}$ l'ensemble des polyapplications $f : E^Y \longrightarrow E$, où Y est un sous-ensemble fini arbitraire d'un ensemble dénombrable fixé Y^0 qui laissent stable toute $r \in R$ (De telles f sont dites des *polymorphismes* de E/R). C'est une algèbre de Post, autrement dit, un $\aleph_0$-polygroupe.
Supposant $R \supseteq \{ \emptyset , I = E^X \}$, on se demande :

1) Comment obtenir, à partir de R, l'ensemble $\bar{\bar{R}}$ des relations d'arité finie (considérées à noms d'arguments près) laissées stables par tout $f \in \mathrm{Pol}^{(\aleph_0)}_{E/R}$?

----

(5) voir [5] et [6].

(6) Dans le cas où r, X et Y sont finis, A. Malcev et L. Kaloujnine avec ses élèves disent, dans ces conditions, que f *préserve* r, mais cette terminologie me semble inadéquate.

2) Quels $\aleph_0$-polygroupes sont de la forme $\mathrm{Pol}_{E/R}^{(\aleph_0)}$ pour un ensemble convenable R de relations d'arité finie dans E ?

Les réponses ont été :

1) $\overline{\overline{R}}$ est la fermeture de R par rapport aux opérations d'intersection (qu'il suffit de prendre ici finie à cause de toutes les finitudes supposées), des cylindrifications et des mutations, la réunion n'intervenant pas ;

2) Toute $\aleph_0$-polygroupe est de la forme indiquée.

Récemment, I. Rosenberg(7) a répondu à la question 1) en supposant E infini, mais les arités des relations et les topicités des polyapplications finies.

Moi-même et M. Bruno Poizat, en partie indépendamment, avons considéré la polythéorie de Galois abstraite sans aucune condition de finitude. Voici les résultats auxquels nous sommes arrivés :

THEOREME I. *Soient* E *un ensemble,* ε *son cardinal,* μ *un cardinal régulier,* $\xi(\varepsilon,\mu)$ *le plus petit cardinal supérieur à tous les* ε^{ν}, *où* $\nu<\mu$, X *un ensemble* d'arguments tel que card $X \geqq \xi(\varepsilon,\mu)$. Si $\overline{X} \subseteq X$, une famille filtrante T de $\overline{X}$-relations dans E sera dite $(\overline{X},\mu)$*-filtrante* si, pour tout sous-ensemble de la réunion de T, dont la cardinalité est $<\mu$, il existe un $r\in T$, qui le contient. *Soient alors* R *un ensemble de* X*-relations,* $\mathrm{Pol}_{E/R}^{(\mu)}$ *l'ensemble* (qui est un μ-polygroupe) *des* μ*-polyapplications de* E, *qui laissent stable tout* $r\in R$ et $\overline{\overline{R}}_{\mu}$ *l'ensemble des* X*-relations stables par tout* $f\in \mathrm{Pol}_{E/R}^{(\mu)}$: *Alors,* $\overline{\overline{R}}_{\mu}$ *est la fermeture de* R *par rapport aux opérations suivantes sur les* X*-relations : intersection (infinitaire), cylindrifications, mutations et la réunion de familles de relations, qui sont, pour quelque* $\overline{X}\subseteq X$, $(\overline{X},\mu)$*-filtrantes.*

THEOREME II. *Tout* μ*-polygroupe de polyapplications de* E *est de la forme* $\mathrm{Pol}_{E/R}^{(\mu)}$, *où* R *est un ensemble de relations* r, *dont chacune est d'une arité* $a(r)<\xi(\varepsilon,\mu)$.

THEOREME III. *Soient* R *un ensemble de* X_0*-relations dans* E, $\varepsilon=$ card E, $\xi_0=$ card X_0. *Alors si* $\mu>2^{\varepsilon^{\xi_0}}$ *et si* $X\supseteq X_0$ *est tel que* card $X\geqq\xi(\varepsilon,\mu)$, *toute* X_0*-relation* r *(considérée comme une* X*-relation en vertu de l'identification canonique), stable par tout* $f\in\mathrm{Pol}_{E/R}^{(\mu)}$, *appartient à la fermeture de* R *par rapport aux seules intersections (infinitaires), cylindrification et mutations, sans intervention de la réunion, ces opérations étant considérées pour les* X*-relations dans* E. *Quel que soit* $\mu'>\mu$ *régulier, la relation précédente* r *est aussi stable par tout* μ'*-polymorphisme de* E/R, *donc* $\mathrm{Pol}_{E/R}^{(\mu')}$ *est un* μ'*-polygroupe engendré par sa partie* $\mathrm{Pol}_{E/R}^{(\mu)}$.

----

(7) voir [8].

BIBLIOGRAPHIE

M. KRASNER [1] Une généralisation de la notion de corps, Journ. d. math., p. et appl., vol. 9 (1938), p. 367-385.

[2] Généralisation abstraite de la théorie de Galois. Colloque Int. du CNRS n° 24 (Algèbre et théorie des nombres, Paris 1949), p. 163-168, Editions du CNRS, Paris 1950.

[3] Endothéorie de Galois abstraite, Congrès Int. des Mathématiciens (Moscou 1966), Résumés 2 : Algèbre, p. 61.

[4] Endothéorie de Galois abstraite, Séminaire Dubreil-Pisot (algèbre et théorie des nombres), 1968-1969, n° 6 (6 et 13 janvier 1969) p. 1-19.

V. BONDARTCHOUK, L. KALOUJNINE,
V. KOTOV, B. ROMOV

[5] Théorie de Galois pour les algèbres de Post, I, Kibernetika (Kiev), 1969, n° 3, p. 1-10.

[6] Théorie de Galois pour les algèbres de Post, II, Kibernetika (Kiev), 1969, n° 5, p. 1-10.

A. MALCEV [7] Algèbres itératives et variétés de Post, Algèbre et logique (en russe), t. 5, p. 5-24, Novosibirsk, 1966.

I. ROSENBERG [8] Une correspondance de Galois entre les algèbres universelles et les relations dans le même univers. Centre de Recherches Univ. de Montréal, mars 1974.