Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2
Série Mathématiques

P. Crepel

Marches aléatoires sur les groupes non abéliens

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 58, série *Mathématiques*, n° 12 (1976), p. 3-7
<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1976__58_12_3_0>

MARCHES ALEATOIRES SUR LES GROUPES NON ABELIENS

P. CREPEL , Université de Rennes

L'exposé qui suit a pour but de situer certains résultats récents relatifs aux marches aléatoires sur les groupes (non abéliens). Nous donnerons surtout des références, qui ne prétendent pas être complètes.

Notations et Définitions

- G est un groupe localement compact à base dénombrable
- μ est une probabilité apériodique sur G (c'est-à-dire telle que le sous-groupe fermé engendré par le support de μ soit G tout entier)
- On dit qu'une probabilité apériodique μ sur G est récurrente (resp. transitoire) ssi son potentiel $U = \sum_{n \geq 0} \mu^{n*}$ est infini sur tout ouvert (sinon)
- On appelle fonction μ-harmonique toute fonction f telle que $\mu * f$ existe et $\mu * f = f$

Dans ce qui suit, on s'intéresse aux problèmes de récurrence, de renouvellement, aux fonctions harmoniques, selon les définitions suivantes :

Récurrence : G est dit récurrent s'il porte une probabilité apériodique récurrente

Fonctions harmoniques : G vérifie la propriété de Choquet-Deny si pour toute probabilité apériodique μ , les fonctions μ-harmoniques bornées sont constantes (Haar p.s.)

Renouvellement : (comportement à l'infini du potentiel dans le cas transitoire) On dira que G est de type I , si pour toute μ transitoire, la mesure 0 est le seul point limite de la suite de mesures de Radon $\varepsilon_g * U$ quand $g \longrightarrow \Delta$ (point à l'infini du compactifié d'Alexandrov)

On dira que G est de type II, si

1) pour toute probabilité apériodique transitoire,

$\varepsilon_g * U$ a au plus deux points limites dont l'un est 0 et l'autre est une mesure de Haar

2) il existe une probabilité apériodique telle que $\varepsilon_g * U$ ait effectivement deux points limites distincts.

Rappels

Rappelons les résultats classiques suivants : [22]

Récurrence : $\mathbb{R}^d$ est récurrent ssi $d \leqslant 2$

Fonctions harmoniques : $\mathbb{R}^d$ vérifie la propriété de Choquet-Deny, pour tout d

Renouvellement : $\mathbb{R}^d$ $(d \geqslant 2)$ est de type I , $\mathbb{R}$ est de type II.

En fait ces types de résultats sont étendus aux groupes abéliens.

Problème

On se propose d'examiner comment ces résultats s'étendent au cas des groupes non abéliens.

Pour cela, il est nécessaire d'introduire la notion de croissance d'un groupe : G est à croissance polynômiale de degré [inférieur ou égal à] d si pour un voisinage V de l'élément neutre, la suite numérique $m(V^n)$ croît [au plus] comme n^d . On dira que G est à croissance polynômiale s'il existe un d tel que G soit à croissance polynômiale de degré $\leqslant d$. (m désigne une mesure Haar sur G).

On démontre que cette notion est indépendante du voisinage choisi et de la mesure de Haar (à gauche ou à droite) [16]

Tous les résultats connus confirment les conjectures suivantes :

Récurrence : G est récurrent ssi il est à croissance polynômiale de degré $\leqslant 2$

Fonctions harmoniques : G vérifie la propriété de Choquet-Deny ssi il est à croissance polynômiale

Renouvellement : G étant quelconque et μ transitoire, $\varepsilon_g * U$ (quand $g \to \Delta$) ne peut avoir que 1, 2 ou une infinité de points limites. Si G est à croissance polynômiale, il est de type I ou II (de type II si c'est une extension d'un groupe compact par $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$).

<u>Référence des principaux résultats</u> (liés aux conjectures précédentes)

<u>Récurrence</u> : Nous renvoyons à [9] et [17] où le point est fait avec bibliographies (incomplètes)

<u>Fonctions harmoniques</u> : (1) Les principaux travaux récents sont dus à H. Fürstenberg, R. Azencott [3] Y. Guivarc'h [16] où se trouvent des bibliographies ne tenant pas compte de quelques travaux plus récents : [4] [5] , [2]

<u>Renouvellement</u> : Il semble que sur ce sujet les travaux soient moins avancés. Des résultats sont néanmoins connus sur différents groupes (non moyennables [11] , groupe affine de $\mathbb{R}$ [13] , groupes nilpotents [18] et [24] , déplacements de $\mathbb{R}^d (d \geq 3)$ [23] , groupes unimodulaires vérifiant la propriété de Choquet-Deny [6])

Signalons enfin quelques autres références sur des problèmes voisins pour des groupes abéliens ou non :

- fonctions harmoniques positives (non bornées) [10] , [12] , [20] , [8] [21] , [15]
- potentiel récurrent [7]
- théorèmes quotients [19] , [1]
- théorèmes limites (théorèmes centraux limites, lois des grands nombres...) On trouvera des références par exemple dans [25] , [26] , [9] , [15]

(1) La plupart des résultats utilisent une hypothèse d'étalement sur μ :

. Il existe n tel que μ^{*n} soit non singulier par rapport à une mesure de Haar sur G .

B I B L I O G R A P H I E

1. A. Avez. Limites de quotients pour des marches aléatoires sur des groupes. CRAS t. 276. (22/01/73). 317-320.

2. ______. Théorème de Choquet-Deny pour les groupes à croissance non exponentielle. CRAS t. 279. (1/07/74). 25-28.

3. R. Azencott. Espaces de Poisson des groupes localement compacts. Lecture Notes n° 148. (1970).

4. L. Birgé et A. Raugi. Fonctions harmoniques sur les groupes moyennables CRAS t. 278. (13 mai 1974) série A. 1287.

5. I. Brown et Y. Guivarc'h. Espaces de Poisson des groupes de Lie (à paraître).

6. A. Brunel et D. Revuz. Sur la théorie du renouvellement pour les groupes non abéliens. (à paraître).

7. ____________________. Marches aléatoires sur les groupes localement compacts. (à paraître aux Annales de l'ENS).

8. JP. Conze et Y. Guivarc'h. Fonctions harmoniques et propriété de droite fixe. (à paraître).

9. P. Crépel. Récurrence des marches aléatoires sur les groupes de Lie. Journées de théorie ergodique. Rennes (1974). (à paraître aux Lecture Notes.

10. J. Deny. Sur l'équation de convolution $\mu=\mu*\sigma$. Séminaire de théorie du potentiel, 4ème année. 1959-1960. n° 5.

11. Y. Derriennic et Y. Guivarc'h. Théorème de renouvellement sur les groupes non moyennables. CRAS t. 277. (1/10/73) série A. 613-615.

12. Y. Derriennic. Marches aléatoires sur le groupe libre et frontière de Martin. (à paraître au Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie).

13. L. Elie et A. Raugi. Fonctions harmoniques sur les groupes moyennables (à paraître aux CRAS) - et autres articles à paraître

14. H. Fürstenberg. Non commuting random products. Trans. American Math. Soc. 108. (1963). 377-428.

15. _____________. Translation invariant cones of functions on semi-simple Lie groups. Bull. Amer. Math. Soc. 71. (1965). 271-326.

16. Y. Guivarc'h. Croissance polynômiale et fonctions harmoniques. Bull. Soc. Math. France. 101 (1973). 333-379 (thèse).

17. ____________. Transience et structure des groupes de Lie. Journées de Théorie Ergodique. Rennes (1974).

18. Y. Guivarc'h et M. Keane. Un théorème de renouvellement sur les groupes nilpotents. Astérisque n° 4 (1973). 37-40.

19. E. Le Page. Théorèmes quotients pour certaines marches aléatoires. CRAS t. 279. (8/07/74) série A. 69-72.

20. G.A. Margulis. Positive harmonic functions on nilpotent groups. Doklady 166, n° 5 (1966).

21. P. Ney and F. Spitzer. The Martin boundary for random walks. Trans. Amer. Math. Soc. 121. (1966). 116-132.

22. D. Revuz. Markov chains. (livre à paraître).

23. B. Roynette. Marches aléatoires sur le groupe des déplacements de R^d . Journées de théorie ergodique. Rennes (1974).

24. B. Roynette et M. Sueur. Marches aléatoires sur les groupes nilpotents. (à paraître).

25. V.V. Sazonov and V.N. Tutubalin. Probability distributions on topological groups. Theory of probability 11 n° 1, (1966). 1-65.

26. A.D. Virčer. Limit theorems for compositions of distributions on some nilpotent Lie groups. Theory of probability (en russe) 19 n° 1 (1974). 84-103.

27. B. Roynette. Récurrence et transience des groupes de Lie connexes résolubles (à paraître, ainsi que d'autres articles)