Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2
Série Mathématiques

Labib Haddad

Sur trois questions de Grimeisen en topologie générale

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 57, série *Mathématiques*, n° 11 (1975), p. 1-15

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1975__57_11_1_0>

SUR TROIS QUESTIONS DE GRIMEISEN EN TOPOLOGIE GENERALE

par Labib HADDAD

Dans son étude de l'itération du passage à la limite, Grimeisen [5] pose trois questions. Elles sont relatives à des propriétés topologiques portant sur des produits ordinaux de filtres et des filtres diagonaux. Appelons ces propriétés P_1 , P_2 et P_3. Dans la première question, on demande si la propriété P_1 caractérise les topologies parmi les prétopologies. Dans la deuxième (resp. troisième) question, on demande si la propriété P_2 (resp. P_3) caractérise les topologies quasi régulières (autrement dit, «régulières mais non nécessairement séparées») parmi toutes les topologies.

On va montrer que la réponse aux deux premières questions est affirmative, tandis que la réponse à la troisième est négative. On est amené ainsi à étudier la classe des espaces topologiques caractérisés par la propriété P_3. On les a appelés *espaces de Grimeisen*.

On terminera par quelques remarques sur la relation entre sommes filtrées et topologie dans l'ensemble des filtres, puis par la caractérisation des espaces de Grimeisen à l'aide des nasses [6] .

0 . Préliminaires

Etant donnés un filtre $\mathfrak{a}$ sur un ensemble I et un filtre $\mathfrak{b}$ sur un ensemble K, on désignera par $\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b}$ l'ensemble de toutes les parties A du produit $I \times K$ qui satisfont à la condition suivante

$$\{i \mid A(i) \in \mathfrak{b}\} \in \mathfrak{a} \quad \text{où} \quad A(i) = \{k \mid (i, k) \in A\}.$$

L'ensemble $\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b}$ est un filtre sur $I \times K$ que l'on appelle le *produit ordinal* de $\mathfrak{a}$ et de $\mathfrak{b}$. On trouve cette notion et la notation correspondante dans Grimeisen [4].

Etant donné un ensemble E, on appelle *prétopologie* sur E la structure définie par la donnée, pour tout $x \in E$, d'un filtre $\mathfrak{V}(x)$ sur E tel que $x \in V$, pour tout $V \in \mathfrak{V}(x)$. Etant donné un filtre $\mathfrak{a}$ sur E, on dit alors que $\mathfrak{a}$ converge vers x lorsque $\mathfrak{V}(x) \subset \mathfrak{a}$. Ces notions se trouvent dans Choquet [3]. Elles généralisent la notion de topologie et la notion de convergence dans un espace topologique.

Soit E un ensemble muni d'une prétopologie (*un espace prétopologique*). Pour tout filtre $\mathfrak{a}$ sur E, on désignera par $\operatorname{Lim} \mathfrak{a}$ l'ensemble des points de E vers lesquels $\mathfrak{a}$ converge. Plus généralement, étant donnés un filtre $\mathfrak{a}$ sur un ensemble I et une application $f : I \to E$, on désignera par $\operatorname{Lim}(f, \mathfrak{a})$ l'ensemble des points de E vers lesquels converge le filtre engendré par $f(\mathfrak{a})$. Ces notations sont celles de Grimeisen [5].

On appelle *grille* sur un ensemble E tout ensemble non vide $\mathfrak{g}$ de parties non vides de E qui satisfait à la condition suivante

$$Y \cup Z \in \mathfrak{g} \quad \text{si et seulement si} \quad Y \in \mathfrak{g} \quad \text{ou} \quad Z \in \mathfrak{g}.$$

Cette notion est due à Choquet.

1 . Une caractérisation des topologies

Soit E un espace *prétopologique.* On considère la propriété suivante :

P_1 - *Pour tous ensembles I et K, pour tous filtres $\mathfrak{a}$ sur I et $\mathfrak{b}$ sur K, pour toutes applications $f : I \to E$ et $g : I \times K \to E$, si l'on a*

$$f(i) \in \mathrm{Lim}(g(i,.), \mathfrak{b}), \text{ pour tout } i \in I$$

alors on a

$$\mathrm{Lim}(f, \mathfrak{a}) \subset \mathrm{Lim}(g, \mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b}).$$

Grimeisen [5] établit (corollaire 6 du théorème 19, p. 404) que tout espace *topologique E* satisfait à la propriété P_1 et il pose la question : *est-ce que, réciproquement, tout espace prétopologique E qui satisfait à la propriété P_1 est un espace topologique ?* La réponse est *oui,* comme le montrera la proposition 1. Mais plus généralement, si l'on désigne par UP_1 la propriété obtenue en remplaçant dans P_1 le mot «filtres» par le mot «ultrafiltres», on a le résultat suivant :

Proposition *1. - Tout espace prétopologique E qui satisfait à la propriété UP_1 est un espace topologique.*

En effet : Soit M une partie de E. Il suffira de montrer que $\bar{\bar{M}} \subset \bar{M}$. Pour cela, on pose $I = \bar{M}$ et $K = M^{\bar{M}}$. On prend pour application $f : I \to E$ l'injection canonique de $\bar{M}$ dans E et pour application $g : I \times K \to E$ «l'évaluation» $g(i,k) = k(i)$. Soit $\mathfrak{a}$ un ultrafiltre quelconque sur I, il suffira de montrer que $\mathrm{Lim}\, \mathfrak{a} \subset \bar{M}$. Or, pour tout $i \in I$, il existe un ultrafiltre $\mathfrak{a}_i$ sur M qui converge vers i (soit $i \in \mathrm{Lim}\, \mathfrak{a}_i$). Alors le produit $\prod_{i \in I} \mathfrak{a}_i$ est un filtre sur K ; on considère un ultrafiltre $\mathfrak{b}$ sur K plus fin que ce filtre-là. On vérifie alors que, pour tout $i \in I$, on a $f(i) \in \mathrm{Lim}(g(i,.),\mathfrak{b})$: l'ultrafiltre image de $\mathfrak{b}$ par l'application $g(i,.) : K \to E$ est l'ultrafiltre engendré par $\mathfrak{b}(i) = \{B(i) \mid B \in \mathfrak{b}\}$ qui est égal à $\mathfrak{a}_i$, de sorte que $f(i) = i \in \mathrm{Lim}\, \mathfrak{a}_i = \mathrm{Lim}(g(i,.),\mathfrak{b})$. Ainsi on a $\mathrm{Lim}\, \mathfrak{a} = \mathrm{Lim}(f, \mathfrak{a}) \subset \mathrm{Lim}(g, \mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b})$. Or $\bar{M} \times M^{\bar{M}} = I \times K \in \mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b}$, donc M appartient à l'image par g de $\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b}$, donc $\mathrm{Lim}(g, \mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b}) \subset \bar{M}$ donc $\mathrm{Lim}\, \mathfrak{a} \subset \bar{M}$. *c. q. f. d.*

2 . Une caractérisation des topologies quasi régulières

Rappelons qu'une topologie *quasi régulière* est une topologie qui satisfait à l'axiome de régularité sans être nécessairement séparée, autrement dit, c'est une topologie dans laquelle, pour tout fermé F et tout point $x \notin F$, il existe des ouverts *disjoints* U et V tels que $x \in U$ et $F \subset V$.

Soit E un espace topologique. On considère la propriété suivante :

P_2 - *Pour tous ensembles I et K, pour tous filtres $\mathfrak{a}$ sur I et $\mathfrak{b}$ sur K, pour toutes applications $f : I \to E$ et $g : I \times K \to E$, si l'on a*

$$f(i) \in \mathrm{Lim}(g(i,.), \mathfrak{b}), \text{ pour tout } i \in I,$$

alors on a

$$\mathrm{Lim}(g, \mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b}) \subset \mathrm{Lim}(f, \mathfrak{a}).$$

Grimeisen [5] établit (corollaire 5 du théorème 23, p. 408) que tout espace quasi régulier E satisfait à la propriété P_2 et il pose la question : *est-ce que, réciproquement, tout espace topologique E qui satisfait à la propriété P_2 est quasi régulier ?* La réponse est *oui,* comme le montrera la proposition 2.

Si l'on désigne par UP_2 la propriété obtenue en remplaçant dans P_2 le mot «filtres» par le mot «ultrafiltres» et si l'on désigne par UP'_2 la propriété obtenue en remplaçant dans UP_2 le produit ordinal $\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b}$ par le produit «cartésien» $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$, alors, puisque $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} \subset \mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b}$, on a

$$P_2 \Rightarrow UP_2 \Rightarrow UP'_2 .$$

Le résultat suivant permet de voir qu'on a en fait

$$P_2 \Leftrightarrow UP_2 \Leftrightarrow UP'_2 .$$

Proposition 2. - *Tout espace topologique E qui satisfait à la propriété UP'_2 est quasi régulier.*

En effet : On raisonne par l'absurde. On suppose que l'espace E n'est pas quasi régulier. Il existe alors dans E un fermé F et un point $u \notin F$ tels que, pour tout voisinage U de u, on ait $\bar{U} \cap F \neq \emptyset$. On désigne par I l'ensemble des voisinages de u dans E et l'on choisit une application $f : I \to E$ qui à tout voisinage U de u fait correspondre un point appartenant à $\bar{U} \cap F$. Ainsi on a $f(I) \subset F$. On pose $K = E^I$ et on prend pour application $g : I \times K \to E$ l'évaluation $g(i,k) = k(i)$.

Pour tout $i \in I$, il existe un ultrafiltre $\mathfrak{a}_i$ sur E tel que $i \in \mathfrak{a}_i$ et $f(i) \in \mathrm{Lim}\ \mathfrak{a}_i$. On considère sur K un ultrafiltre $\mathfrak{b}$ plus fin que le filtre engendré par tous les produits $\prod_{i \in I} A_i$, où $A_i \in \mathfrak{a}_i$, pour tout $i \in I$. On a bien $f(i) \in \mathrm{Lim}(g(i,.), \mathfrak{b})$ puisque l'image de $\mathfrak{b}$ par l'application $g(i,.) : K \to E$

n'est autre que $\mathfrak{a}_i$. On considère ensuite sur I le filtre des sections, c'est-à-dire le filtre engendré par les $S_U = \{V \mid V \in I \text{ et } V \subset U\}$, où U parcourt I, et on prend un ultrafiltre $\mathfrak{a}$ plus fin.

On vérifie alors que $u \in \operatorname{Lim}(g, \mathfrak{a} \times \mathfrak{b})$: pour cela, on considère $W = \prod_{U \in I} U$; pour tout voisinage V de u, on a $S_V \times W \in \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ et $g(S_V \times W) \subset V$.

Comme $f(I) \subset F$, on a $\operatorname{Lim}(f, \mathfrak{a}) \subset F$ donc
$\operatorname{Lim}(g, \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \not\subset \operatorname{Lim}(f, \mathfrak{a})$.

c. q. f. d.

On rapprochera cette démonstration de celle de Bourbaki et Dieudonné [2] dans un cas très semblable, pour des espaces séparés.

3 . Les espaces de Grimeisen

Pour tout ensemble E, on désigne par $\Phi(E)$ l'ensemble des filtres sur E et par $\gamma(E)$ l'ensemble des ultrafiltres sur E. Soit E un espace topologique. On dira qu'une application $\varphi : E \to \Phi(E)$ est *admissible* lorsque, pour tout $x \in E$, le filtre $\varphi(x)$ converge vers x, autrement dit, lorsque $x \in \operatorname{Lim} \varphi(x)$. On considère alors la propriété suivante :

P_3 - *Pour tout* $\mathfrak{a} \in \Phi(E)$ *et pour toute application admissible* $\varphi : E \to \Phi(E)$, *on a*

$$\operatorname{Lim} \bigcup_{A \in \mathfrak{a}} \bigcap_{x \in A} \varphi(x) \subset \operatorname{Lim} \mathfrak{a} \quad .$$

Cette propriété est vérifiée par les espaces quasi réguliers, comme le remarque Grimeisen [5] qui pose la question (p. 412) : *est-ce que, réciproquement, tout espace E qui satisfait à la propriété P_3 est quasi-régulier ?* La réponse est *non*, comme le montrera la proposition 4. On est amené ainsi à poser la définition suivante :

Définition - On dira qu'un espace topologique E est un *espace de Grimeisen* lorsqu'il satisfait à la propriété P_3.

Il est alors clair que tout espace de Grimeisen E satisfait à la propriété UP_3 obtenue en remplaçant dans P_3, chaque fois, $\Phi(E)$ par $\gamma(E)$. Or la réciproque est également vraie.

Proposition 3 . - *Tout espace topologique E qui satisfait à la propriété UP_3 est un espace de Grimeisen.*

En effet : Soit $\mathfrak{a} \in \Phi(E)$ et soit $\varphi : E \to \Phi(E)$ une application admissible. On pose $\mathfrak{b} = \bigcup_{A \in \mathfrak{a}} \bigcap_{x \in A} \varphi(x)$. On considère une application $\psi : E \to \gamma(E)$ telle que

$$\varphi(x) \subset \psi(x), \text{ pour tout } x \in E.$$

Pour tout ultrafiltre $\mathfrak{c}$ plus fin que $\mathfrak{a}$, on pose

$$\hat{\psi}(\mathfrak{c}) = \bigcup_{A \in \mathfrak{c}} \bigcap_{x \in A} \psi(x).$$

Alors on a $\mathfrak{b} \subset \hat{\psi}(\mathfrak{c})$ et, d'après UP_3, $\operatorname{Lim} \hat{\psi}(\mathfrak{c}) \subset \operatorname{Lim} \mathfrak{c}$ donc $\operatorname{Lim} \mathfrak{b} \subset \operatorname{Lim} \mathfrak{c}$. Or $\operatorname{Lim} \mathfrak{a} = \bigcap_{\mathfrak{a} \subset \mathfrak{c} \in \gamma(E)} \operatorname{Lim} \mathfrak{c}$, donc

$$\operatorname{Lim} \mathfrak{b} \subset \operatorname{Lim} \mathfrak{a} \, .$$

c. q. f. d.

4 . Un contre-exemple

On va construire un exemple d'espace de Grimeisen *séparé* et qui n'est cependant pas régulier.

Comme d'habitude, on désigne par N l'ensemble des entiers. On pose $F = N \times N$ et on considère les parties suivantes de F :

$$N_n = \{n\} \times N, \quad H = N \times \{0\} \quad , \quad M = \{(m,n) \mid m \geq n > 0\} \; .$$

On prend un élément $u \notin F$ et on pose $G = F \cup \{u\}$.

Pour tout $n \in N$, on considère n ultrafiltres *distincts et non principaux*, $\mathfrak{a}_{n,1}, \mathfrak{a}_{n,2}, \ldots, \mathfrak{a}_{n,n}$, sur G, tels que N_n appartienne à chacun d'entre eux ; on désigne par $\mathfrak{a}_{n,0}$ l'ultrafiltre principal engendré par $\{(n,0)\}$ dans G, et on pose

$$\mathfrak{a}_n = \bigcap_{0 \leq i \leq n} \mathfrak{a}_{n,i} \quad .$$

On dira qu'une partie A de M est *fine* lorsque, pour tout $n \in N$, l'ensemble $A \cap N_n$ contient un point au plus. Alors les complémentaires des parties fines dans M engendrent un filtre ; soit $\mathfrak{b}$ un ultrafiltre plus fin que ce filtre-là. On considère l'ultrafiltre

$$\mathfrak{u} = \bigcup_{A \in \mathfrak{b}} \; \bigcap_{(m,n) \in A} \mathfrak{a}_{m,n} \, .$$

On définit alors une topologie sur l'ensemble G de la manière suivante : une partie U de G sera ouverte si et seulement si les deux conditions suivantes sont remplies :

$$(n,0) \in U \Rightarrow U \in \mathfrak{a}_n$$

et

$$u \in U \Rightarrow U \in \mathfrak{u}$$

On désignera l'espace topologique ainsi obtenu par G.

Proposition *4. - L'espace* G *est un espace de Grimeisen séparé mais non régulier.*

En effet : Pour tout point x de G, on désignera par $\mathcal{V}(x)$ le filtre de ses voisinages et par $\tilde{x}$ l'ultrafiltre principal engendré par $\{x\}$ dans G. On commence par vérifier que

$$\mathcal{V}(x) = \begin{cases} \tilde{x} & \text{si } x \notin H \cup \{u\}; \\ \mathfrak{a}_n & \text{si } x = (n,0)\,; \\ \tilde{u} \cap \mathfrak{u} & \text{si } x = u \,. \end{cases}$$

On vérifie alors que l'espace G est séparé. D'autre part, la partie H de G est fermée ; soit $\mathcal{V}(H)$ le filtre de ses voisinages. On a

$$\mathcal{V}(H) = \bigcap_{n \in N} \mathfrak{a}_n = \bigcup_{m \geq n} \mathfrak{a}_{m,n} \subset \bigcap_{(m,n) \in M} \mathfrak{a}_{m,n} \subset \mathfrak{u} .$$

Donc tout élément de $\mathcal{V}(u)$ rencontre tout élément de $\mathcal{V}(H)$ et par conséquent G n'est pas régulier.

Reste à montrer que G est un espace de Grimeisen. D'après la proposition 3, il suffit de montrer qu'il satisfait à la propriété UP_3. Pour cela, on considère une application admissible $\varphi : G \to \gamma(G)$ et un ultrafiltre $\mathfrak{a}$ sur G. On pose

$$\mathfrak{c} = \bigcup_{A \in \mathfrak{a}} \bigcap_{x \in A} \varphi(x).$$

On va montrer que Lim $\mathfrak{c} \subset$ Lim $\mathfrak{a}$. On remarque d'abord que, lorsque $x \notin H \cup \{u\}$, on a nécessairement $\varphi(x) = \tilde{x}$ et, lorsque $x = (n,0) \in H$, on a $\varphi(x) = \mathfrak{a}_{n,f(n)}$, où $0 \leq f(n) \leq n$. Si l'ultrafiltre $\mathfrak{a}$ est principal, soit $\mathfrak{a} = \tilde{x}$, alors $\mathfrak{c} = \varphi(x)$ et l'on a bien Lim $\mathfrak{c} \subset$ Lim $\mathfrak{a}$. Supposons donc que l'ultrafiltre $\mathfrak{a}$ n'est pas principal. Deux cas seulement peuvent alors se présenter :

1) $H \cup \{u\} \notin \mathfrak{a}$ et alors $\mathfrak{c} = \mathfrak{a}$, donc on a bien Lim $\mathfrak{c} \subset$ Lim $\mathfrak{a}$.

2) $H \in \mathfrak{a}$ et alors on va montrer que Lim $\mathfrak{c} = \emptyset$. Pour tout $n \in N$, il existe une partition $\{A_{n,0}, A_{n,1}, \dots, A_{n,n}\}$ de N_n telle que $A_{n,i} \in \mathfrak{a}_{n,i}$, pour $0 \leq i \leq n$. L'ensemble des points de M qui sont de la forme $(n,f(n))$ est, bien entendu, une partie fine de M, donc son complémentaire B appartient à l'ultrafiltre $\mathfrak{b}$. De sorte que, si l'on pose

$$C = \bigcup_{n \in N} A_{n,f(n)} \text{ et } V = \bigcup_{(m,n) \in B} A_{m,n} ,$$

on a

$$C \in \mathfrak{c} , \quad V \in \mathfrak{u} \text{ et } C \cap V = \emptyset.$$

Ainsi $\mathfrak{c} \neq \mathfrak{u}$. De plus, pour tout $n \in N$, comme $\mathfrak{a}$ n'est pas principal, on a $\bigcup_{m \neq n} N_m \in \mathfrak{c}$ donc $\mathfrak{c} \neq \mathfrak{a}_{n,i}$, pour $0 \leq i \leq n$. Enfin, on voit facilement que $\mathfrak{c}$ n'est pas principal. Donc $\mathfrak{c}$ ne converge pas. *c. q. f. d.*

5 . La prétopologie de Grimeisen associée à une topologie

Soit E un espace topologique. Pour toute partie X de E, on désigne par $\overline{X}$ l'adhérence de X dans E et par $\widetilde{X}$ l'ensemble des points x de E pour lesquels il existe une application admissible $\varphi : E \to \gamma(E)$ telle que x adhère au filtre $\bigcap_{y \in X} \varphi(y)$. On vérifie alors qu'on a les propriétés suivantes

(1) $\widetilde{\emptyset} = \emptyset$

(2) $X \subset \overline{X} \subset \widetilde{X}$

(3) $\widetilde{X \cup Y} = \widetilde{X} \cup \widetilde{Y}$.

Ainsi l'application qui à X fait correspondre $\widetilde{X}$ définit une prétopologie sur E qu'on appellera la *prétopologie de Grimeisen* associée à l'espace topologique E. D'après la propriété (2), cette prétopologie est moins fine que la topologie de E.

Proposition 5. - *Pour qu'un espace topologique soit un espace de Grimeisen, il faut et il suffit que sa prétopologie de Grimeisen soit identique à sa topologie.*

En effet : Soit $x \in \widetilde{X}$. Il existe une application admissible $\varphi : E \to \gamma(E)$ telle que x adhère au filtre $\bigcap_{y \in X} \varphi(y)$. On considère l'ensemble $\mathfrak{g}$ des parties Y de E telles que x adhère au filtre $\bigcap_{y \in Y} \varphi(y)$. Comme pour la propriété (3), on voit que l'on a

$$Y \cup Z \in \mathfrak{g} \Leftrightarrow Y \in \mathfrak{g} \text{ ou } Z \in \mathfrak{g}.$$

Ainsi $\mathfrak{g}$ est une *grille* à laquelle X appartient. Donc il existe un ultrafiltre $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ tel que $X \in \mathfrak{a}$. Si E est un espace de Grimeisen, alors on a

$$x \in \operatorname{Lim} \bigcup_{A \in \mathfrak{a}} \bigcap_{y \in A} \varphi(y) \subset \operatorname{Lim} \mathfrak{a},$$

de sorte que $x \in \overline{X}$. Donc $\widetilde{X} \subset \overline{X}$ et la prétopologie de Grimeisen est identique à la topologie de E.

Réciproquement, soit $\varphi : E \to \gamma(E)$ une application admissible et soit $\mathfrak{a}$ un ultrafiltre sur E. Si $\widetilde{X} = \overline{X}$, pour toute partie X de E, alors on a

$$x \in \operatorname{Lim} \bigcup_{A \in \mathfrak{a}} \bigcap_{y \in A} \varphi(y) \Rightarrow x \in \widetilde{A}, \text{ pour tout } A \in \mathfrak{a} \Rightarrow x \in \overline{A},$$

pour tout $A \in \mathfrak{a} \Rightarrow x \in \operatorname{Lim} \mathfrak{a}$.

Donc E est un espace de Grimeisen.

c. q. f. d.

6 . Quelques autres propriétés des espaces de Grimeisen

On dit qu'un espace topologique E est *faiblement séparé* lorsque, pour tout couple de points x et y, si tout voisinage de x rencontre tout voisinage de y , alors $\{x\}$ et $\{y\}$ ont même adhérence (voir, par exemple, [6]).

Proposition *6. - Tout espace de Grimeisen est faiblement séparé.*

En effet : Soient x, y des points d'un espace de Grimeisen E tels que tout voisinage de x rencontre tout voisinage de y. Alors il existe un ultrafiltre sur E qui converge à la fois vers x et vers y, donc $x \in \widetilde{\{y\}} = \overline{\{y\}}$ et $y \in \widetilde{\{x\}} = \overline{\{x\}}$. Ainsi $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$ et E est faiblement séparé.

c. q. f. d.

Proposition *7. - Soit E un espace topologique* quasi compact.
Alors les énoncés suivants sont équivalents :

a) *L'espace E est quasi régulier.*

b) *L'espace E est un espace de Grimeisen.*

c) *L'espace E est faiblement séparé.*

En effet : On sait déjà que a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c). Il suffit donc de montrer que c) $\Rightarrow$ a). On suppose donc que E est faiblement séparé et on considère un fermé F et un point $x \notin F$. Ainsi, pour tout $y \in F$, on a $\overline{\{y\}} \neq \overline{\{x\}}$ donc il existe des ouverts disjoints U_y et V_y tels que $x \in U_y$ et $y \in V_y$. L'ensemble $\left\{V_y \mid y \in F\right\}$ est un recouvrement ouvert de F qui est quasi compact, donc il contient un sous-recouvrement fini $\left\{V_{y_1}, \dots, V_{y_n}\right\}$. On pose $U = \bigcap_{1 \leq i \leq n} U_{y_i}$ et $V = \bigcup_{1 \leq i \leq n} V_{y_i}$. Alors U et V sont des ouverts disjoints, $x \in U$ et $F \subset V$, donc E est quasi régulier.

c. q. f. d.

Remarque. Plus généralement, on peut montrer qu'un espace faiblement séparé est quasi régulier si et seulement s'il est faiblement régulier (voir [6]).

Dans la démonstration du résultat qui suit, on se servira de propriétés des applications propres établies dans Bourbaki [1] , I, 10, 2,théorème 1, p. 117-118.

Proposition *8. - L'image d'un espace de Grimeisen par une application propre est un espace de Grimeisen.*

En effet : Soient E un espace de Grimeisen, F un espace topologique et $f : E \to F$ une application propre surjective. On va montrer que F est un espace de Grimeisen en montrant que sa prétopologie de Grimeisen est identique à sa topologie (proposition 5). Soit Y une partie de F et soit $y \in \widetilde{Y}$. Il existe une application admissible $\psi : F \to \gamma(F)$ telle que y adhère au filtre $\mathfrak{b} = \bigcap_{t \in Y} \psi(t)$. Comme f est surjective, pour tout $t \in F$, il existe un ultrafiltre $\mathfrak{a}_t$ sur E tel que $f(\mathfrak{a}_t) = \psi(t)$. Comme f est propre, pour tout $t \in F$, il existe un point $g(t) \in E$ tel que $\mathfrak{a}_t$ converge vers $g(t)$ et que $f(g(t)) = t$. On pose $X = g(Y)$. On définit une application admissible $\varphi : E \to \gamma(E)$ par

$$\varphi(s) = \begin{cases} \mathfrak{a}_t & \text{si } s = g(t) \in X \ ; \\ \tilde{s} & \text{si } s \notin X, \end{cases}$$

où $\tilde{s}$ est l'ultrafiltre principal engendré par $\{s\}$ dans E. On considère alors le filtre $\mathfrak{a} = \bigcap_{s \in X} \varphi(s)$.

On a $f(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{b}$. Donc y adhère à $f(\mathfrak{a})$, donc il existe x adhérent à $\mathfrak{a}$ tel que $f(x) = y$. Ainsi $x \in \overline{\overline{X}} = \overline{X}$, donc $y = f(x) \in f(\overline{X}) \subset \overline{f(X)} = \overline{Y}$. Ainsi $\overline{\overline{Y}} \subset \overline{Y}$ et F est bien un espace de Grimeisen. *c. q. f. d.*

Remarque. On peut démontrer également que l'image d'un espace faiblement séparé par une application propre est un espace faiblement séparé.

7 . Rappels

On rappelle dans ce paragraphe quelques résultats dont on se servira dans la suite.

Soient E un espace topologique, $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E et a un filtre sur I. Choquet [3] introduit les notions de *limites inférieure et supérieure* de la famille $(A_i)_{i \in I}$ suivant le filtre $\mathfrak{a}$ en posant

$$\inf(A_i)_{\mathfrak{a}} = \bigcap_{J \in \mathfrak{g}} \overline{\bigcup_{i \in J} A_i} \quad \text{et} \quad \sup(A_i)_{\mathfrak{a}} = \bigcap_{J \in \mathfrak{a}} \overline{\bigcup_{i \in J} A_i}$$

où $\mathfrak{g}$ est la grille associée au filtre $\mathfrak{a}$ (c'est-à-dire l'ensemble des parties de I qui rencontrent tous les éléments de $\mathfrak{a}$).

Soit $\mathcal{K}(E)$ l'ensemble des parties compactes non vides de E. Lorsque E lui-même est compact, Choquet [3] munit l'ensemble $\mathcal{K}(E)$ canoniquement d'une *topologie*. Pour qu'une famille $(A_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\mathcal{K}(E)$ converge vers l'élément A suivant le filtre $\mathfrak{a}$ sur I, il faut et il suffit que l'on ait

$$A = \inf(A_i)_{\mathfrak{a}} = \sup(A_i)_{\mathfrak{a}} \quad .$$

L'espace $\mathcal{K}(E)$ ainsi obtenu est aussi compact.

Soit E un ensemble. Pour tout ensemble $\mathfrak{a}$ de parties de E, on désignera par $\gamma\langle\mathfrak{a}\rangle$ l'ensemble des ultrafiltres sur E qui contienne $\mathfrak{a}$. Pour toute partie X de E, au lieu de $\gamma\langle\{X\}\rangle$, on écrira $\gamma(X)$. Ainsi $\gamma(X)$ désigne l'ensemble des ultrafiltres sur E auxquels X appartient. En particulier, $\gamma(E)$ désigne bien l'ensemble de tous les ultrafiltres sur E.

On sait que l'ensemble des $\gamma(X)$, où X parcourt $\mathcal{P}(X)$, est une base d'ouverts pour une topologie canonique compacte sur $\gamma(E)$ (voir, par exemple, Bourbaki [1] , I, 9, exercice 27, p. 170). Pour tout filtre $\mathfrak{a}$ sur E, l'ensemble $\gamma\langle\mathfrak{a}\rangle$ est un fermé non vide de $\gamma(E)$. Réciproquement, pour tout fermé non vide $\mathfrak{A}$ de $\gamma(E)$, l'ensemble $\theta(\mathfrak{A}) = \bigcap_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}} \mathfrak{a}$ est un filtre sur E et l'on a

$$\gamma\langle\theta(\mathfrak{A})\rangle = \mathfrak{A} \text{ et } \theta(\gamma\langle\mathfrak{a}\rangle) = \mathfrak{a} \ .$$

Cela établit une bijection canonique entre l'ensemble $\Phi(E)$ des filtres sur E et l'ensemble $\mathcal{K}(\gamma(E))$ des compacts non vides de $\gamma(E)$. Comme l'ensemble $\mathcal{K}(\gamma(E))$ est canoniquement muni d'une topologie compacte, on peut transporter cette topologie à $\Phi(E)$. On obtient ainsi *l'espace des filtres* sur E qui est un espace compact et dans lequel l'espace $\gamma(E)$ est canoniquement plongé.

8 . Remarques sur les sommes filtrées de filtres

Soit $\varphi : I \to \Phi(E)$ une famille de filtres sur l'ensemble E.
Pour tout filtre $\mathfrak{a}$ sur I, on pose

$$\hat{\varphi}(\mathfrak{a}) = \bigcup_{A \in \mathfrak{a}} \bigcap_{i \in A} \varphi(i).$$

On vérifie alors que $\hat{\varphi}(\mathfrak{a})$ est un filtre sur E. La notion de somme filtrée d'une famille de filtres introduite par Grimeisen [4] est un cas particulier de la notion précédente, comme le montre son théorème 15.

1) *On voudrait mettre en évidence le fait suivant. On a*

$$\gamma \langle \hat{\varphi}(\mathfrak{a}) \rangle = \sup(\gamma \langle \varphi(i) \rangle)_{\mathfrak{a}}$$

ce qui permet de ramener la notion de somme filtrée à celle de limite supérieure. En particulier, lorsque $\mathfrak{a}$ *est un ultrafiltre, le filtre* $\hat{\varphi}(\mathfrak{a})$ *n'est autre que la limite de l'application* φ *suivant l'ultrafiltre* $\mathfrak{a}$, *dans l'espace des filtres* $\Phi(E)$.

La notion de produit ordinal de deux filtres est elle-même un cas particulier de celle de somme filtrée [4] . Soient E, F des ensembles. On considère les applications $p : \gamma(E \times F) \to \gamma(E)$ et $q : \gamma(E \times F) \to \gamma(F)$ qui à tout ultrafiltre sur $E \times F$ font correspondre ses projections sur E et F respectivement. Ces applications sont continues lorsqu'on munit les ensembles $\gamma(E \times F)$, $\gamma(E)$ et $\gamma(F)$ de leurs topologies canoniques. On considère l'application $r : \gamma(E) \times \gamma(F) \to \gamma(E \times F)$ définie par $r(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b}$. Cette application est une *section* de l'application (p,q), autrement dit

$$p(\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b}) = \mathfrak{a} \quad \text{et} \quad q(\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b}) = \mathfrak{b}.$$

2) *Mais, lorsque E et F sont infinis, on peut voir que r n'est pas continue. Cependant, pour tout ultrafiltre* $\mathfrak{b}$ *fixé quelconque, l'application* $r(.,\mathfrak{b}) : \gamma(E) \to \gamma(E \times F)$ *est toujours une section continue de l'application p.*

Voilà les deux remarques qu'on voulait faire.

9 . Les espaces de Grimeisen et les nasses

Etant donné un espace topologique E, on considère l'ensemble T des couples $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ d'ultrafiltres sur E tels que tout ouvert appartenant à $\mathfrak{a}$ appartienne également à $\mathfrak{b}$. L'ensemble T est un graphe sur $\gamma(E)$; il a été introduit dans [6] sous le nom de *nasse* de l'espace topologique E. Ce graphe est réflexif ($\Delta \subset T$) et idempotent ($\overset{2}{T} = T$), il est fermé et *mi-ouvert* dans l'espace produit $\gamma(E) \times \gamma(E)$. Si, pour tout $x \in E$, on désigne par $\tilde{x}$ l'ultrafiltre principal engendré par $\{x\}$ dans E, alors $T(\tilde{x})$ n'est autre que l'ensemble des ultrafiltres qui convergent vers x.

Considérons à présent l'ensemble V de tous les couples $(\mathfrak{a}, \hat{\varphi}(\mathfrak{a}))$, où $\mathfrak{a}$ est un ultrafiltre sur E et $\varphi : E \to \gamma(E)$ une application admissible. Alors, en utilisant la proposition 3, on établit le résultat suivant.

Proposition 9. - *Pour que E soit un espace de Grimeisen, il faut et il suffit que l'on ait*

$$\overset{-1}{V}T(\tilde{x}) = T(\tilde{x}), \text{ pour tout } x \in E.$$

Si l'on se rappelle que les espaces quasi réguliers sont caractérisés par la condition suivante ([6] théorème 1) :

$$\overset{-1}{T}T(\tilde{x}) = T(\tilde{x}), \text{ pour tout } x \in E,$$

on voit que la différence entre T et V mesure l'*écart* qui sépare les espaces de Grimeisen des espaces quasi réguliers.

Voici quelques propriétés du graphe V associé à l'espace E.

1) $\Delta \subset V \subset T$ (où Δ est la diagonale de $\gamma(E) \times \gamma(E)$).

2) $V(\tilde{x}) = T(\tilde{x})$, pour tout $x \in E$.

3) $\overline{V(\mathfrak{a})} = T(\mathfrak{a})$, pour tout $\mathfrak{a} \in \gamma(E)$.

4) $\overset{2}{V} = V$ (autrement dit V est idempotent).

5) V est mi-ouvert.

6) Pour que V soit fermé dans $\gamma(E) \times \gamma(E)$ il faut et il suffit que $V = T$.

Comme il existe des espaces de Grimeisen qui ne sont pas quasi réguliers (proposition 4), il en résulte que V n'est pas nécessairement fermé.

Pour finir, signalons que ce sont ces considérations qui nous ont amené à découvrir les propriétés et le contre-exemple relatifs aux espaces de Grimeisen.

BIBLIOGRAPHIE

1. BOURBAKI N., Eléments de mathématiques, *Act. Sci. Ind.* n° 1142, Hermann, Paris, Livre III, *Topologie générale,* Chap. I, II, 3e éd., 1961.

2. BOURBAKI N. et DIEUDONNE J., Notes de Tératopologie (II), *Revue Scientifique* (Revue rose), 1939, p. 180-181.

3. CHOQUET G., Convergences, *Ann. Univ. Grenoble,* 23 (1947 et 1948) 57-112.

4. GRIMEISEN G., Gefilterte Summation von Filtern und iterierte Grenzprozesse. I, *Math. Ann.,* 141 (1960) 318-342.

5. GRIMEISEN G., Gefilterte Summation von filtern und iterierte Grenzprozesse. II, *Math. Ann.,* 144 (1961) 386-417.

6. HADDAD L., Sur quelques points de topologie générale, *Ann. Fac. Sci. Univ. Clermont,* n° 44 (1970) fasc. 7, p. 3-80.

127, Av. Philippe-Auguste
75 - Paris 11e (France)

(Manuscrit reçu en mars 1971)