ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

PAUL-JEAN CAHEN

Polynômes et dérivées à valeurs entières

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 54, série *Mathématiques*, nº 10 (1975), p. 25-43

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1975__54_10_25_0>

POLYNOMES ET DERIVEES A VALEURS ENTIERES

par Paul-Jean CAHEN
57, av. Bourguiba - CARTHAGE (Tunisie)

POLYNOMES ET DERIVEES A VALEURS ENTIERES

A est un anneau intègre de corps des fractions K. On dit qu'un polynôme f, à coefficients dans K, est à valeurs entières, si $f(a)$ est dans A pour tout élément a de A. Ces polynômes forment un anneau que J.L. Chabert (5) (6) et moi (3) avons étudié. Par ailleurs D. Brizolis (2) s'est intéressé aux polynômes dont les dérivées successives sont à valeurs entières. Nous voulons donner ici une exposition originale de ces résultats.

On montre d'abord que si A est Noethérien on peut faire une étude locale. Si A est intégralement clos on peut donc se limiter au cas d'un anneau de valuation discrète ; au § 2 on montre que les anneaux de polynômes, dont un nombre fini de dérivées sont à valeurs entières, sont denses dans l'anneau des fonctions continues sur la complétion de A. Ensuite on étudie le spectre de ces anneaux de polynôme et au § 4 on décrit les inclusions entre les divers idéaux premiers du spectre. Au § 5 on généralise cette étude aux fractions rationnelles à valeurs entières, et au § 6 on envisage le cas où toutes les dérivées successives doivent être à valeurs entières ; ensuite on généralise un résultat de Straus (8) pour déduire la structure de A-module de cet anneau de polynôme (§ 7), on en déduit qu'il n'est pas Noethérien (§ 8). Dans un dernier paragraphe on étudie les polynômes à plusieurs variables qui sont à valeurs entières.

§ 1. Définitions, localisation

Soit A un anneau intègre, K son corps des fractions. On note A_S l'anneau des polynômes à valeurs entières :

$$A_S = \left\{ f \in K[X] \mid f(A) \subseteq A \right\}$$

On a les inclusions :

$$A[X] \subseteq A_S \subset K[X]$$

Par ailleurs, si $f \in K[X]$ et f est de degré n, on définit les polynômes $f', f^{[2]}, \ldots, f^{[n]}$, par :

$$f(X+Y) = f(X) + Yf'(X) + Y^2 f^{[2]}(X) + \ldots + Y^n f^{[n]}(X).$$

Si K est de caractéristique 0, alors $f^{(n)} = n!\, f^{[n]}$ est la $n^{\text{ème}}$ itérée de la dérivée de f.

On peut toujours poser $f^{(n)} = n!f^{[n]}$, et donner comme définition :

Définition 1.1

$A_S(k)$ est l'anneau des polynômes à valeurs entières dont les k-premières dérivées sont à valeurs entières :

$$A_S(k) = \left\{ f \in K[X] \mid f(A),\ f'(A), \dots, f^{(k)}(A) \subseteq A \right\} .$$

C'est en effet un anneau car :

$$(f.g)^{(k)} = \sum_{i=o}^{k} \binom{i}{k} f^{(i)} g^{(k-i)} \qquad \text{où} \quad f = f^{(o)} \quad \text{et} \quad f' = f^{(1)}$$

Mais on trouvera avantageux de travailler aussi avec les «dérivées divisées» $f^{[k]}$.

Définition 1.2

$A_S[k]$ est l'anneau des polynômes :

$$A_S[k] = \left\{ f \in K[X] \mid f(A), f'(A), \dots, f^{[k]}(A) \subseteq A \right\}$$

C'est aussi un anneau car on établit sans peine les formules :

(1.a) $(f+g)^{[k]} = f^{[k]} + g^{[k]}$

(1.b) $(f.g)^{[k]} = \sum_{i=o}^{k} f^{[i]} g^{[k-i]}$

Où bien sûr, on fait $f^{[o]} = f$, $f^{[1]} = f'$.

La formule suivante pourra aussi nous être utile :

(1.c) $\left[(X-a)^n\right]^{[k]} = \binom{n}{k} (X-a)^{n-k}$

On a les inclusions :

$$\begin{array}{ccccccccc} A[X] & \subset & \dots\dots\dots & & A_S(k+1) & \subset & A_S(k) & \dots\dots & \subset A_S \\ & & & \ddots & \cup & & \cup & & \\ & & & & A_S[k+1] & \subset & A_S[k] & & \end{array}$$

Proposition 1.3

On a $A[X] = \bigcap_{k=o}^{\infty} A_S[k]$

Preuve : Si f est de degré n, alors

$$f(X) = \sum_{k=o}^{n} f^{[k]}(o) . \quad X^k$$

Mais on pose :

Définition 1.4

$$A_S{}^{\infty} = \bigcap_{k=o}^{\infty} \quad A_S(k)$$

$A_S{}^{\infty}$ est distinct de $A[X]$ en général :

Exemple 1.5 : Soit A un anneau de valuation discrète, on note $\mathfrak{m}$ son idéal maximal, t une uniformisante, v la valuation, et on suppose que $A/\mathfrak{m}$ est de caractéristique $p > 0$ (ainsi $v(p)>0$). On choisit des représentants $a_o, a_1, \dots, a_{N-1}$ de A modulo $\mathfrak{m}$. Alors

$$f = 1/t \ \Pi_{i=o}^{N-1} \ (X - a_i)^p$$

est dans $A_S{}^{\infty}$ (car dans A_S et $f' \in A[X]$) mais $f \notin A_S[p]$, donc a fortiori $f \notin A[X]$, car :

$$f^{[p]} = 1/t \quad \Pi_{i\neq o}^{N-1} \ (X - a_i)^p \quad + (X - a_o)/_t \, g \qquad \text{où} \quad g \in A[X] \quad \text{donc} \quad f^{[p]}(a_o) \notin A.$$

Ainsi l'inclusion $A_S[k] \subset A_S(k)$ est stricte en général, comme d'ailleurs l'inclusion $A_S[k+1] \subset A_S[k]$

Exemple 1.6 : Soit A un anneau de valuation discrète, avec les notations précédentes

$$f = 1/t \quad \Pi_{i=o}^{N-1} \ (X - a_i)^{k+1} \quad \text{est dans } A_S[k] \text{ mais n'est pas dans } A_S[k+1].$$

Après avoir introduit ces anneaux, on montre qu'on peut procéder à une étude locale. On utilise la notation $A_{S^\cdot}$ pour désigner l'un quelconque des anneaux $A_S(k)$, $A_S[k]$ et $A_S{}^{\infty}$

Théorème 1.7

Soit A un anneau intègre Noethérien et T une partie multiplicative de A, alors

$$(T^{-1}A)_{S^\cdot} = T^{-1}(A_{S^\cdot})$$

Preuve : Si $f \in (T^{-1}A)_{S^\cdot}$ alors f et ses dérivées (en nombre fini égal à son degré) sont à valeurs entières sur $T^{-1}A$, comme A est Noethérien, le A-module des valeurs prises, par f et ses «dérivées», est de type fini, il existe donc un dénominateur commun $t \in T$ à ces valeurs prises, d'où $tf \in A_S$. Réciproquement, si $f \in T^{-1}(A_{S^\cdot})$, alors $f(A) \subseteq A \subseteq T^{-1}A$ donc

$f(T^{-1}A) \subseteq T^{-1}A$ [cf. (4) proposition 4] et il en va de même des «dérivées» de f.

Si maintenant A est un anneau de Krull Noethérien on rappelle :

Proposition 1.8 : Si tout idéal premier de hauteur 1 de A a un corps résiduel infini alors $A_S = A[X]$.

[cf. (4)]. On a alors a fortiori $A[X] = A_S$. et pour faire une étude locale de A il suffit de considérer les idéaux premiers de hauteur 1 de corps résiduel fini.

§2. Théorèmes de densité

On suppose ici que A est un anneau de valuation discrète de corps résiduel fini. On note v la valuation, $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A, $\hat{A}$ la completion de A et $\hat{K}$, $\hat{\mathfrak{m}}$, $\hat{v}$ les completions correspondantes. Un polynôme à coefficients dans K (ou même dans $\hat{K}$) peut être considéré comme une fonction continue de $\hat{A}$ dans $\hat{K}$ et si $f \in A_S$ alors $f(\hat{A}) \subset \hat{A}$; on note $\mathcal{C}(\hat{A}, \hat{A})$ l'anneau des fonctions continues de $\hat{A}$ dans $\hat{A}$. On note t une uniformisante.

Proposition 2.1 : Pour la topologie de la convergence uniforme, A_S est dense dans $\mathcal{C}(\hat{A}, \hat{A})$.

Preuve : Comme $\hat{A}$ est complet et de corps résiduel fini, $\hat{A}$ est compact et par généralisation du théorème de Stone-Weierstrass [(1) V § 5. Exercices] $\hat{K}[X]$ est dense dans l'anneau des fonctions continues de $\hat{A}$ dans $\hat{K}$. $\mathcal{C}(\hat{A}, \hat{A})$ est un ouvert dans cet anneau et bien sûr $K[X]$ est dense dans $\hat{K}[X]$, donc

$$A_S = K[X] \cap \mathcal{C}(\hat{A}, \hat{A}) \text{ est dense dans } \mathcal{C}(\hat{A}, \hat{A}).$$

[cf. aussi (7)].

Théorème 2.2 : Pour tout k, $A_{S[k]}$ est dense dans $\mathcal{C}(\hat{A}, \hat{A})$.

Preuve : Il suffit de montrer que $A_{S[k]}$ est dense dans $A_{S[k-1]}$. Si $g \in A_{S[k-1]}$, on note $g^* = g^{[k]}$ et on approche g par $g_1 = g - h g^*$ où $h \in A_{S[k]}$.

On choisit h tel que $v[h^{[i]}(x)] \geqq n$, n élevé, $\forall x \in A$ et $\forall i < k$ ainsi

$$g_1^{[j]}(x) = g^{[j]}(x) - \sum_{i=0}^{j} h^{[i]}(x) g^{*[j-i]}(x) \in A, \ \forall j < k \quad \text{donc } g_1 \in A_{S[k-1]}, \text{ et}$$

$$g_1^{[k]}(x) = g^{[k]}(x) - h^{[k]}(x) g^{*[o]}(x) - \sum_{i=o}^{k-1} h^{[i]}(x) g^{*[k-i]}(x) \quad \text{où} \quad g^{*[o]} = g^{[k]} \quad \text{et}$$

$$\sum_{i=o}^{k-1} h^{[i]}(x) g^{*[k-i]}(x) = b_x \in A, \quad \forall x \in A$$

On choisit aussi h tel que $h^{[k]}(x) \equiv 1 \pmod{\mathfrak{m}}$, $\forall x \in A$ (et ceci grâce au lemme suivant), ainsi $h^{[k]}(x) = (1+t)a_x$ où $a_x \in A$ et $g_1^{[k]}(x) = t\, a_x g^{[k]}(x) + b_x$.

On itère le procédé, on fait $g_2 = g_1 - h\,g_1^*$ (une fonction h où n est suffisamment élevé) .... $g_m = g_{m-1} - h\,g_{m-1}^*$ on arrive à g_m tel que $g_m^{[k]}(x) = t^m c_x g^{[k]}(x) + d_x$ où $c_x, d_x \in A$, donc $g_m^{[k]}(x) \in A_{S[k]}$ pour m assez grand, et g_m est «proche de g» : $v[g_m(x) - g(x)] \geq n$, $\forall x \in A$.

Lemme 2.3 : Pour tout entier n et tout entier k on trouve h dans $A_{S[k]}$ tel que
$v[h^{[j]}(x)] \geq n, \ \forall x \in A$ et $\forall j < k$
mais $h^{[k]}(x) \equiv 1 \pmod{\mathfrak{m}}, \ \forall x \in A$.

Preuve : Soient $0 = a_0, a_1, \ldots\ldots, a_m$ un système de représentants de A modulo $\mathfrak{m}^n$, et soit
$f = \Pi_{i=o}^{m} (X - a_i)^k$

On a $f^{[k]} = \underset{j \neq i}{\Pi} (X - a_j)^k + \sum_\alpha g_\alpha$

où chaque g_α est de la forme :

$$g_\alpha = b_\alpha \Pi_{j=o}^{m} (X - a_j)^{k_{j,\alpha}} \qquad \begin{cases} b_\alpha \in A \\ \sum_j k_{j,\alpha} = mk \end{cases}$$

autrement dit, g_α s'obtient à partir de $\Pi_{j \neq i} (X - a_j)^k$ en remplaçant certains facteurs $(X - a_j)$ par $(X - a_i)$ et en le faisant précéder d'un coefficient b_α.
Si $x \equiv a_i$ modulo $\mathfrak{m}^n$, on a donc

$$v(g_\alpha(x)) > v\left[\Pi_{j \neq i} (x - a_j)^k\right]$$

De plus chaque terme $(x - a_j)$ est distinct modulo $\mathfrak{m}^n$ et différent de 0, pour tout $x \equiv a_i$, il y a une bijection σ_x des indices $0, 1, \ldots, \hat{\imath}, \ldots, m$ sur les indices $1, 2, \ldots, m$, telle que :

$$x - a_j = a_{\sigma_x(j)} + r_{x,j} \qquad \text{où} \quad v(r_{x,j}) \geq n$$

donc finalement :

$$f^{[k]}(x) = \Pi_{j \neq o}\, a_j^k + r_x + \sum_\alpha g_\alpha(x)$$

où $v(r_x)$ et $v(g_\alpha(x)) > v\left[\Pi_{j \neq o}\, a_j^k\right]$ et $v\left[\Pi_{j \neq o}\, a_j^k\right] = \beta$ ne dépend pas de x, autrement dit : $f^{[k]}(x) \Big/ \Pi_{j \neq o}\, a_j^k \equiv 1 \pmod{\mathfrak{m}}, \ \forall x$.

On fait $h = \Pi_{i=o}^{m} (X - a_i)^k \Big/ \Pi_{j \neq o}\, a_j^k$

h répond au lemme. Si en effet $j < k$, $h^{[j]}$ est une somme de produits $\Pi_{i=o}^{m} (X - a_j)^{k_j}$ qui se déduisent à partir de $\Pi_{j \neq i} (X - a_j)^k$ en multipliant d'abord par $(X - a_i)$, puis en substituant certains facteurs $(X - a_j)$ par $(X - a_i)$, ce faisant, la valuation du produit est supérieure à β d'au moins l'entier n.

Corollaire 2.4 : $A_{S(k)}$ est dense dans $\mathcal{C}(\hat{A}, \hat{A})$.

§3. Spectre premier

On veut déterminer le spectre de A_S. On traite le cas où A est un anneau de Krull Noethérien.

- Il y a d'abord les idéaux au-dessus de (0), on les retrouve dans $K \otimes_A A_S$. mais $A[X] \subseteq A_{S^\cdot} \subset K[X]$ donc $K \otimes_A A_{S^\cdot} = K[X]$; cette fibre est bien connue !

- Il y a ensuite les idéaux premiers au-dessus d'un idéal $\mathfrak{p}$ de corps résiduel infini ou de hauteur au moins 2. On les retrouve dans $A_{S^\cdot} \otimes A_{\mathfrak{p}}$, c'est-à-dire $(A_{\mathfrak{p}})_{S^\cdot}$ [théorème 1.7] . Mais $A_{\mathfrak{p}}$ est un anneau de Krull dont tous les idéaux premiers de hauteur 1 sont de corps résiduels infinis, donc $(A_{\mathfrak{p}})_{S^\cdot} = A_{\mathfrak{p}} [X]$ [proposition 1.8]. Cette fibre aussi est bien connue.

- Enfin il y a les idéaux premiers au-dessus d'un idéal $\mathfrak{p}$ de hauteur 1 et de corps résiduel fini. On les retrouve dans $(A_{\mathfrak{p}})_{S^\cdot}$. Dans ce cas $A_{\mathfrak{p}}$ est un anneau de valuation discréte de corps résiduel fini. On peut donc exploiter les résultats du paragraphe précédent.

On suppose donc A local, on reprend les notations du § 2. On écarte A_{S^∞} qui sera étudié au § 6. Alors $A_{S^\cdot}$ est dense dans $\mathcal{C}(\hat{A}, \hat{A})$, on s'intéresse donc aux idéaux premiers de $\mathcal{C}(\hat{A}, \hat{A})$ au-dessus de $\mathfrak{m}$. Ce sont les idéaux premiers de $\mathcal{C}(\hat{A}, \hat{A}) \otimes \hat{A}/_{\hat{\mathfrak{m}}}$ soit $\mathcal{C}(\hat{A}, A/_{\mathfrak{m}})$ c'est-à-dire l'anneau des fonctions localement constantes de $\hat{A}$ dans $A/_{\mathfrak{m}}$. Comme $\hat{A}$ est compact, les idéaux premiers de cet anneau correspondent biunivoquement aux points de $\hat{A}$: à tout $\alpha \in \hat{A}$, correspond l'idéal des fonctions nulles en α [(1) II § 4 Exercices] .

Ainsi :

Proposition 3.1 : Les idéaux de $\mathcal{C}(\hat{A}, \hat{A})$ au-dessus de l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, sont en bijection avec les points de $\hat{A}$; à $\alpha \in A$ correspond $\mathfrak{M}_\alpha$:

$$\mathfrak{M}_\alpha = \{ f \in \mathcal{C}(\hat{A}, \hat{A}) \mid f(\alpha) \in \hat{\mathfrak{m}} \}$$

Ces idéaux découpent dans $A_{S^\cdot}$ des idéaux premiers $\mathfrak{m}_\alpha$, comme $A_{S^\cdot}$ est dense dans $\mathcal{C}(\hat{A}, \hat{A})$, ces idéaux sont distincts :

Si $\alpha \neq \beta$, on trouve $f \in \mathcal{C}(\hat{A}, \hat{A})$ tel que $f(\alpha) \in \hat{\mathfrak{m}}$ mais $f(\beta) \notin \hat{\mathfrak{m}}$, donc $g \in A_{S^\cdot}$, «proche de f» et tel que $g(\alpha) \in \hat{\mathfrak{m}}$ mais $g(\beta) \notin \hat{\mathfrak{m}}$.

Réciproquement, tous les idéaux de $A_{S^\cdot}$, au-dessus de $\mathfrak{m}$, se relèvent dans $\mathcal{C}(\hat{A}, \hat{A})$.

Il suffit d'établir qu'ils sont tous maximaux, car alors les idéaux premiers $A_{S\cdot} \otimes A/_{\mathfrak{m}}$ sont tous maximaux et minimaux et se relèvent dans $\mathscr{C}(\hat{A}, \hat{A}) \otimes A/_{\mathfrak{m}}$ [cf. (1) II § 2. proposition 16]

Proposition 3.2 : Tous les idéaux premiers de $A_{S\cdot}$ au-dessus de $\mathfrak{m}$ sont maximaux et de corps résiduel $A/_{\mathfrak{m}}$.

Preuve : Si $f \in A_{S(k)}$ on fait $g = 1/t\ \Pi_{i=o}^{n} (f - a_i)^{k+1}$ où $a_o, a_1, ..., a_n$ est un système de représentants modulo $\mathfrak{m}$. On voit que $g \in A_{S(k)}$ [ou $g \in A_{\tilde{S}[k]}$ si $f \in A_{\tilde{S}[k]}$] . Si $\tilde{\mathfrak{M}}$ est un idéal premier de $A_{S\cdot}$ au-dessus de $\mathfrak{m}$, on a donc $t\,g \in \tilde{\mathfrak{M}}$ et $(f - a_i) \in \tilde{\mathfrak{M}}$ pour un indice i.

Théorème 3.3 : Les idéaux premiers de $A_{S(k)}$ et $A_{S[k]}$ sont en bijection avec les points de $\hat{A}$; à $\alpha \in \hat{A}$ correspond $\mathfrak{M}_\alpha = \left\{ f \in A_{S\cdot} \mid f(\alpha) \in \hat{\mathfrak{m}} \right\}$

Note : Ce résultat est dû aussi en partie à J.L. Chabert (5) et D. Brizolis (2).

§4. Inclusions

Si A est un anneau de Krull Noethérien, les seules inclusions qui ne se ramènent pas à des inclusions entre idéaux premiers d'un anneau $A_{\mathfrak{p}}[X]$ sont entre les idéaux premiers au-dessus de (0) et ceux au-dessus d'un idéal premier de hauteur 1 et de corps résiduel fini. On peut donc encore supposer A local, et on garde les notations précédentes. Mais avant d'étudier les inclusions il nous est utile de remarquer que $A_{S(k)}$ et $A_{S[k]}$ ne sont pas intégralement clos, à la différence de A_S dont tous les localisés sont des anneaux de valuation discrète de rang 1 ou 2 [cf. (3) (5) et (6)].

Lemme 4.1 : Si $f \in A_S$ et k est un entier $(0 < k < \infty)$, on trouve un entier n tel que $f^n \in A_{S[k]}$

Preuve : Pour calculer $(f^n)^{[j]}$ on regarde le terme en Y^j de $f^n(X + Y) = \left[f(X) + Yf'(X) + ... + Y^m f^{[m]}(X)\right]^n$ (où m est le degré de f) donc $(f^n)^{[j]}$ est une somme de termes de la forme $\binom{n}{h}\ \Pi_{i=o}^{j} (f^{[i]})^{n_i} f^{n-j}$ où $i \leq j$ et $\sum i\, n_i = j$. Les polynômes $(f^{[i]})^{n_i}$ sont en nombre fini $(i \leq k,\ n_i \leq k)$ on trouve un minimum aux valuations de leurs valeurs. Il suffit que la valuation de $\binom{n}{h}$ soit élevée pour que $(f^n)^{[j]}$ soit à valeurs entières, $\forall j \leq k$. Si p est la caractéristique de $A/_{\mathfrak{m}}$, $v(p) > 0$, il suffit de faire $n = p^s$ où s est suffisamment élevé, car $h \leq m$.

Proposition 4.2 : Pour tout α de A, les anneaux $(A_{S\cdot})_{\mathfrak{m}_\alpha}$ ne sont pas intégralement clos.

Preuve : Soit $a_0, a_1, ..., a_n$ un système de représentants de A modulo $\mathfrak{m}$ et
$f = 1/t\ \Pi_{i=0}^{n} (X - a_i)$.
On trouve n tel que $f^n \in A_{S[k]} \subseteq A_{S(k)}$ et a fortiori dans un localisé (car $f \in A_S$), par contre f n'est pas même dans $(A_{S(1)})_{\mathfrak{m}_\alpha}$. En effet $\underline{f(\alpha) \in A}$ et $\underline{f'(\alpha) \notin A}$. Si on avait $f \in (A_{S(1)})_{\mathfrak{m}_\alpha}$, on aurait $f = fg/g$ où $fg \in A_{S(1)}, g \in A_{S(1)}$ mais $\underline{g(\alpha) \notin \mathfrak{m}}$, on devrait avoir $(fg)'(\alpha) \in A$, mais $(fg)'(\alpha) = f(\alpha)g'(\alpha) + f'(\alpha)g(\alpha)$ or $\underline{g'(\alpha) \in A}$, c'est donc impossible.

Les idéaux au-dessus de (0) de $A_{S\cdot}$ sont ceux de $K[X]$, ils sont de la forme :

$$\tilde{f} = \{hf \in A_{S\cdot} \mid h \in K[X]\}$$

où f est un polynôme irréductible de $K[X]$ (défini à une constante multiplicative près).

Théorème 4.3 : Si $\alpha \in \hat{A}$, alors $\tilde{f} \subset \mathfrak{m}_\alpha$ si et seulement si $f(\alpha) = 0$.

Preuve : Si d'abord $f(\alpha) = 0$, alors pour tout h, $hf(\alpha) = 0$ donc $hf(\alpha) \in \hat{\mathfrak{m}}$ et $hf \in \mathfrak{m}_\alpha$. Ainsi $\tilde{f} \subset \mathfrak{m}_\alpha$.
Pour la réciproque, on considère d'abord le cas de A_S. Si $f(\alpha) \neq 0$, on peut supposer sans modifier $\tilde{f}$, mais en multipliant f par une constante, que $f(\alpha) \in A$, $f(\alpha) \notin \hat{\mathfrak{m}}$. Peut-être que f n'est pas dans A_S mais $t^d f \in A[X]$ pour d assez grand. Comme f est une fonction continue de $\hat{A}$ dans $\hat{K}$, $v[f(x)] = 0$, $\forall x \in \alpha + \hat{\mathfrak{m}}^r$ où $\alpha + \hat{\mathfrak{m}}^r$ est une boule de centre α, et où r est assez grand.
Soit g la fonction de $\mathscr{C}(A, A)$, définie par : $g(x) = 1$ si $x \in \alpha + \hat{\mathfrak{m}}^r$

$$g(x) = t^d \text{ si } x \notin \alpha + \hat{\mathfrak{m}}^r$$

Comme A_S est dense dans $\mathscr{C}(A, A)$, on trouve $h \in A_S$, tel que $v(h(x) - g(x)) > d$, $\forall x \in A$
ainsi : $v(h(x)) = 0 \quad \forall x \in \alpha + \hat{\mathfrak{m}}^r$
et $v(h(x)) = d \quad \forall x \notin \alpha + \hat{\mathfrak{m}}^r$
donc $hf \in A_S$ mais $h(\alpha)f(\alpha) \notin \hat{\mathfrak{m}}$. Ainsi $hf \in \tilde{f}$ mais $hf \notin \mathfrak{m}_\alpha$.
Pour traiter maintenant le cas de $A_{S\cdot}$, il suffit désormais de considérer $(hf)^n$ où n est suffisamment élevé de façon à ce que $(hf)^n \in A_{S\cdot}$ [lemme 1].

§5. Fractions rationnelles

On s'intéresse maintenant aux fractions rationnelles :

Définition 5.1

Soit A un anneau intègre de corps des fractions K, l'anneau A_R des fractions rationnelles à valeurs entières est l'anneau :

$$A_R = \{f \in K(X) \mid f(A) \subseteq A\}$$

Bien sûr $A_R \subset K(X)$ et $A_R \cap K[X] = A_S$. Si K est de caractéristique 0, et si f est un polynôme, $f^{(n)}$ est la $n^{\text{ère}}$ itérée de la dérivée. On peut alors définir la dérivée d'une fraction f/g par $f'g - fg'/g^2$ et les dérivées successives par itération.

Définition 5.2 :

L'anneau $A_{R(k)}$ est l'anneau des fractions rationnelles :

$$A_{R(k)} = \{f \in K(X) \mid f(A), f'(A), \ldots, f^{(k)}(A)\} \subseteq A$$

et $A_{R^\infty} = \bigcap_{k=0}^{\infty} A_{R(k)}$

On a bien sûr, $A_{S(k)} = A_{R(k)} \cap K[X]$, $A_{S^\infty} = A_{R^\infty} \cap K[X]$, et $A_{R(k+1)} \subset A_{R(k)}$

L'étude des fractions rationnelles se complique du fait qu'on ne peut plus localiser :

Exemple 5.3 : Toute fraction rationnelle à valeurs entières sur **Z** est en fait un polynôme : $\mathbf{Z}_R = \mathbf{Z}_S$, mais pour tout premier p, $\frac{1}{1+pX}$ est une fraction rationnelle à valeurs entières sur $\mathbf{Z}_p$, donc $\frac{1}{1+pX} \in (\mathbf{Z}_p)_R$ mais $\frac{1}{1+pX} \notin (\mathbf{Z}_R)_p$

On a $\mathbf{Z}_R = \mathbf{Z}_S$, car si $f/g \in \mathbf{Z}_R$ et que f/g est sous une forme irréductible, on sait que si g n'est pas une constante, g a une racine dans au moins une completion $\hat{\mathbf{Z}}_p$ (un premier p au moins est décomposé dans le corps de décomposition de g). Si α dans **Z** est très proche de cette racine, et si v_p dénote la valuation p-adique, alors $v_p(g(\alpha))$ devient très grand, mais comme f n'admet pas cette racine (car f/g est irréductible) $v_p(f(\alpha))$ reste borné ; ainsi on peut faire $v_p(g(\alpha)) > v_p(f(\alpha))$ pour $\alpha \in \mathbf{Z}$ donc $f/g\,(\alpha) \notin \mathbf{Z}_p$, a fortiori $f(\alpha)/g(\alpha) \notin \mathbf{Z}$.

Néanmoins, si on suppose que A est un anneau de valuation discrète de corps résiduel fini, on peut facilement déduire le spectre de $A_{R(k)}$ $(0 \leq k < \infty)$ des paragraphes précédents. En effet $A_{S(k)} \subset A_{R(k)} \subset \mathscr{C}(\hat{A}, \hat{A})$ donc $A_{R(k)}$ est dense dans $\mathscr{C}(\hat{A}, \hat{A})$ et les idéaux $\mathfrak{m}_\alpha$ de $\mathscr{C}(\hat{A}, \hat{A})$ découpent des idéaux distincts dans $A_{R(k)}$. Il est clair encore que si $f \in A_{R(k)}$ alors $1/t\ \Pi_{i=0}^{n} (f - a_i)^{k+1} \in A_{R(k)}$, donc que si $\tilde{\mathfrak{M}}$ est un idéal premier de $A_{R(k)}$ au-dessus de $\mathfrak{m}$, $\Pi(f - a_i)^{k+1} \in t\,A_{R(k)} \subset \tilde{\mathfrak{M}}$, ainsi l'un des $f - a_i$ est dans $\tilde{\mathfrak{M}}$ et $\tilde{\mathfrak{M}}$ est de corps résiduel fini isomorphe à $A/\mathfrak{m}$. Comme pour $A_{S(k)}$, tout idéal premier de $A_{R(k)}$ au-dessus de $\mathfrak{m}$ se relève dans $\mathscr{C}(\hat{A}, \hat{A})$. Avec les notations des paragraphes 3 et 4 :

Théorème 5.4 : Les idéaux premiers au-dessus de $\mathfrak{m}$ de $A_{R(k)}$ correspondent bijectivement aux point de $\hat{A}$, à $\alpha \in \hat{A}$ correspond $\mathfrak{M}_\alpha = \left\{ f \in A_{R(k)} \mid f(\alpha) \in \hat{\mathfrak{m}} \right\}$

Quant à la fibre au-dessus de (0), elle se déduit du lemme suivant :

Lemme 5.5 : On a $A_{R(k)} \otimes_A K = T^{-1} K[X]$ où T est la partie multiplicative de $K[X]$ formée des polynômes sans racine dans $\hat{A}$.

Preuve : Si $f/_g \in A_{R(k)}$ et que $f/_g$ est sous sa forme irréductible alors g n'a pas de racine dans $\hat{A}$. Sinon pour α proche de cette racine, $v(g(\alpha))$ devient grand tandis que $v(f(\alpha))$ reste borné (car f n'a pas la même racine) [cf. Exemple 5.3] , on aurait donc $f(\alpha)/_{g(\alpha)} \notin A$. Ainsi $f/_g \in T^{-1} K[X]$. Si réciproquement $f/_g \in T^{-1} K[X]$, donc g n'a pas de racine dans $\hat{A}$, alors $v(g(\alpha))$ reste borné quand α décrit $\hat{A}$ (donc a fortiori quand α décrit A), les dérivées successives $(f/_g)^{(j)}$ jusqu'à $(f/_g)^{(k)}$ peuvent toutes être mises sous la forme $h_j/_{g^k}$ où h_j est un polynôme, donc pour n assez grand, $t^n(f/_g) \in A_{R(k)}$.

On a donc encore :

Proposition 5.6 : Les idéaux premiers au-dessus de (0) de $A_{R(k)}$ sont en correspondance biunivoque avec les polynômes irréductibles de $K[X]$ ayant au moins une racine dans $\hat{A}$ (définis à une constante multiplicative près). Au polynôme f correspond l'idéal

$$\tilde{f} = \left\{ g \in A_{R(k)} \mid g = hf,\ h \in K(X) \right\}$$

et $\tilde{f} \subset \mathfrak{m}_\alpha$ si et seulement si $f(\alpha) = 0$.

De tout ce qui précède on peut déduire facilement :

Théorème 5.7 : Les anneaux $A_{S(k)}$, $A_{S[k]}$, $A_{R(k)}$ ne sont pas Noethériens.

Preuve : Tous ces anneaux ($k \geq 0$, $k < \infty$) ont une infinité d'idéaux du type $\mathfrak{m}_\alpha$. Aucun de ceux-ci n'est de type fini : Si $f_1, f_2 \dots. f_n$ engendraient $\mathfrak{m}_\alpha$ on aurait $f_1(\alpha), f_2(\alpha), \dots., f_n(\alpha) \in \hat{\mathfrak{m}}$, mais donc pour β proche de α , $f_1(\beta), \dots, f_n(\beta) \in \hat{\mathfrak{m}}$ donc $\mathfrak{m}_\alpha \subset \mathfrak{m}_\beta$. Or tous les idéaux $\mathfrak{m}_\alpha$ sont maximaux.

§6. Dérivées à l'infini

On s'intéresse maintenant à la fibre au-dessus de $\mathfrak{m}$ de A_{S^∞} et de A_{R^∞} . On suppose encore que A est de corps résiduel fini, p désigne la caractéristique de $A/_\mathfrak{m}$; si $f \in A_{S^\infty}$ (resp. A_{R^∞}) alors $1/_t \prod_{i=0}^{n} (f - a_i)^p \in A_{S^\infty}$ (resp. A_{R^∞}), donc, comme pour $A_{S(k)}$ [proposition 3.2], tous les idéaux de A_{S^∞} (resp. A_{R^∞}) au-dessus de $\mathfrak{m}$ sont maximaux, de corps résiduel $A/\mathfrak{m}$ et se relèvent dans $\mathcal{C}(\hat{A}, \hat{A})$. Ils sont donc encore de la forme $\mathfrak{m}_\alpha$, mais ne sont pas tous distincts.

Théorème 6.1 : Les idéaux de A_{S^∞} et de A_{R^∞} au-dessus de $\mathfrak{m}$ sont tous maximaux, de corps résiduel $A/\mathfrak{m}$, et ils sont en nombre fini.

Ce théorème est dû essentiellement à D. Brizolis (2).

Preuve : Si $\alpha, \beta \in \hat{A}$ et si $f \in A_{R^\infty}$, on a :

$$f(\beta) = f(\alpha) + (\beta - \alpha) f'(\alpha) + \ldots\ldots + (\beta - \alpha)^n/_{n!}\, f^{(n)}(\alpha) + \ldots$$

De plus, on établit par induction,

$$v(n!) = v(p) \cdot \sum_{\gamma=1}^{\infty} \left[n/_{p^\gamma} \right]$$

où $\left[n/_{p^\gamma} \right]$ désigne la partie entière de $n/_{p^\gamma}$, donc bien sûr, $v(n!) < n\, v(p)$.

Si $v(\beta - \alpha) \geq 2\, v(p)$ alors

$$v\left[(\beta - \alpha)^n/n! \; .f^{(n)}(\alpha) \right] > n\, v(p)$$

et la série $\sum_{n=1}^{\infty} (\beta - \alpha)^n/n! \; f^{(n)}(\alpha)$ est convergente dans $\hat{\mathfrak{m}}$ donc $f(\alpha) \in \hat{\mathfrak{m}}$ si et seulement si $f(\beta) \in \hat{\mathfrak{m}}$. Si donc $\mathfrak{m}_\alpha$ et $\mathfrak{m}_\beta$ sont les idéaux correspondants à α et β dans $\mathcal{C}(\hat{A}, \hat{A})$ alors $\mathfrak{m}_\alpha \cap A_{R^\infty}$ et $\mathfrak{m}_\beta \cap A_{R^\infty}$ sont confondus ; $\mathfrak{m}_\alpha \cap A_{S^\infty}$ et $\mathfrak{m}_\beta \cap A_{S^\infty}$ sont confondus a fortiori.

Une étude un peu plus fine établit :

$$v(n!) = v(p) \sum_{\gamma=1}^{\infty} \left[n/_{p^\gamma} \right] < v(p)\, n \sum_{\gamma=1}^{\infty} 1/_{p^\gamma} = n\, v(p)/_{p-1}$$

Si donc $v(p) \leq p-1$, et $v(\beta - \alpha) \geq 1$, on a $f(\beta) \in \hat{\mathfrak{m}}$ si et seulement si $f(\alpha) \in \hat{\mathfrak{m}}$, dans le cas où f est un polynôme (et que la série n'a qu'un nombre fini de termes non nuls.). On voit donc que si $v(p) \leq p - 1$, il y a au-dessus de $\mathfrak{m}$ exactement autant d'idéaux premiers dans A_{S^∞} que d'éléments dans $A/\mathfrak{m}$; autrement dit $\mathfrak{m}_\alpha = \mathfrak{m}_\beta$ si et seulement si $\beta \equiv \alpha \pmod{\mathfrak{m}}$. C'est le résultat qu'établit D. Brizolis (2) dans le cas de $\mathbf{Z}$, montrant qu'il y a dans $\mathbf{Z}_{S^\infty}$, exactement p idéaux au-dessus d'un premier p.

Si par contre $v(p) \geq p$, on peut avoir $\mathfrak{m}_\alpha \neq \mathfrak{m}_\beta$ même si $\alpha \equiv \beta \pmod{\mathfrak{m}}$. Soit en effet $\alpha, a_1, \ldots, a_n$ un système de représentants modulo $\mathfrak{m}$ contenant α, et f le polynôme

$f = {}^{1}/_{t^p}\,(X-\alpha)^p\,(X-a_1)^p \dots (X-a_n)^p$. Alors f est dans A_S et même dans A_{S^∞} car $v(p) \geqq p$ donc $f' \in A[X]$. De plus $f(\alpha) = 0 \in \hat{\mathfrak{m}}$ mais $f(\beta) \in \hat{\mathfrak{m}}$ si et seulement si (quand $\beta \equiv \alpha \pmod{\mathfrak{m}}$) on a $v(\beta - \alpha) \geqq 2$. On voit donc que, par exemple sur l'anneau des entiers de $Q(\sqrt[p]{p})$, il y a maintenant p^2 idéaux au-dessus de p.

§7. Une base de A_{S^∞}

On adapte ici un résultat de Strauss (8) au cas où A est un anneau de valuation discrète : On montre que A_{S^∞} est un A-module libre dont on construit une base (comme le fait Strauss pour Z). Ceci nous permettra de montrer que A_{S^∞} n'est pas Noethérien.

S'agissant de A_{S^∞} (dont la définition utilise les dérivées usuelles), A est de caractéristique 0, et si $f \in A_{S^\infty}$ est de degré n :

$$f = \lambda_0 + \lambda_1 X + \lambda_2 X(X-1) + \dots + \lambda_n X(X-1)\dots(X-n+1)$$

où $\lambda_0, \lambda_1, \dots \lambda_n \in K$ et comme en particulier $f \in A_S$, alors $f(0), f(1), \dots, f(n) \in A$ donc $v(\lambda_i) \geqq -v(n!)$ pour $i = 0, 1, \dots, n$, ainsi les valuations des coefficients des polynômes de degré n de A_{S^∞} sont minorées.

Lemme 7.1 : Soit $f_0, f_1, \dots, f_n, \dots$ une suite de polynômes de A_{S^∞}, où f_n est de degré n et tel que, parmi les polynômes de degré n de A_{S^∞}, son coefficient directeur a une valuation minimale. Alors cette suite forme une base du A-module A_{S^∞}.

Preuve : Bien sûr toute combinaison linéaire, à coefficients dans A, des polynômes f_i est dans A_{S^∞}. Si réciproquement $g \in A_S$ et que g est de degré n, on peut toujours écrire (de façon unique) :

$$g = k_0 f_0 + k_1 f_1 + \dots + k_n f_n \,, \text{ où } k_i \in K \,,\ i \in \{0, 1, \dots, n\}$$

d'après le caractère minimal de la valuation du coefficient directeur de f_n, on a $v(k_n) \geqq 0$, soit $k_n \in A$ et donc $g - k_n f_n \in A_{S^\infty}$. A son tour, $k_{n-1} \in A$ et ainsi de suite, $k_i \in A$, $\forall i \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Lemme 7.2 : Soit k un entier et n le degré d'un polynôme f de $A[X]$ vérifiant $f/_{t^k} \in A_{S^\infty}$. Alors $v([n/N]\,!) \geqq k$, où $[n/N]$ désigne la partie entière de n/N et N le cardinal de $A/\mathfrak{m}$.

Preuve : Soit $a_0, a_1, \dots, a_{N-1}$, un système de représentants modulo $\mathfrak{m}$ et f répondant aux conditions du lemme. Si $j \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ on note m_j la multiplicité de la racine a_j de f

modulo $\mathfrak{m}$, donc :

$f = (X - a_j)^{m_j} g_j + th_j$ où $g_j, h_j \in A[X]$ et $g_j(a_j) \not\equiv 0$ (mod $\mathfrak{m}$)

Dérivant m_j fois, on a

$f^{(m_j)} = (m_j)!\, g_j + (X - a_j)\, k_j + t\, m_j!\, l_j$ où $k_j \in A[X]$, $l_j \in A[X]$ $(l_j = h_j^{(m_j)}/m_j!)$

et donc : $f^{(m_j)}(a_j) = (m_j)!\, g_j(a_j) + t(m_j)!\, l_j(a_j)$.

Si donc $v(m_j!) = r_j$, alors $v\left[f^{(m_j)}(a_j)\right] = r_j$, et comme $f^{(m_j)}(a_j)/t^k \in A$, on a $r_j \geq k$.

Ainsi $m_j \geq m$ où m est le plus petit entier tel que $v(m!) = k$. Comme ceci est vrai pour tout j on a :

$$f = \Pi_{j=0}^{N-1} (X - a_j)^m g + th \quad \text{où } g, h \in A[X].$$

donc $n = deg(f) \geq m\,N$ et $v\left(\left[n/N\right]!\right) \geq k$.

Théorème 7.3 : Si A est tel que $v(p) \leq p-1$ (où p désigne la caractéristique de $A/_{\mathfrak{m}}$) alors une base du A-module A_{S^∞} est donnée par les polynômes $f_o = 1, f_1 = (X - a_o)$ .....

$f_N = (X - a_o)(X - a_1) \dots (X - a_{N-1}),\ f_{N+1} = (X - a_o)^2 (X - a_1) \dots (X - a_{N-1}), \dots,$

$f_{2N} = (X - a_o)^2 (X - a_1)^2 \dots\dots (X - a_{N-1})^2 / t^{\,v(2!)}, \dots$

$f_{mN} = (X - a_o)^m (X - a_1)^m \dots (X - a_{N-1})^m / t^{\,v(m!)}$

$f_{mN+1} = (X - a_o)^{m+1} (X - a_1)^m \dots (X - a_{N-1})^m / t^{\,v(m!)}, \dots$

Preuve : Soit g un polynôme de degré n dans A_{S^∞}, $g = a_n X^n + \dots + a_o$, on a un entier k tel que $t^k g \in A[X]$, bien sûr $k \geq -v(a_n)$ et par ailleurs $k \leq v([n/N]!)$. Soit $m = [n/N]$, le coefficient directeur de f_n a pour valuation $-v(m!)$ et donc $-v(m!) \leq v(a_n)$. Ainsi la suite $f_o, f_1, \dots, f_n$ répond aux conditions du lemme 1 si f_n est dans A_{S^∞}. Bien sûr il suffit d'établir que $f_{mN} \in A_{S^\infty}$ $\left(\text{car si } k < N, \text{ alors } f_{mN+k} = \Pi_{j=0}^{k-1} (X - a_j)\, f_{mN}\right)$. Comme $v(p) \leq (p-1)$ et $v(m!) < m\, v(p)/_{p-1}$ alors $v(m!) < m$ et $f_{mN} \in A_S$. Ensuite

$$f'_{mN} = \sum_{i=o}^{N-1} m/t^{\,v(m!)} (X - a_i)^{m-1}\, \Pi_{j \neq i} (X - a_j)^m \quad \text{donc}$$

$$f'_{mN} = f_{(m-1)N} \sum_{i=o}^{N-1} \left(m/t^{\,v(m)}\right) \Pi_{j \neq i} (X - a_j)$$

et comme $m/_t v(m) \in A$ alors $m/_t v(m) \sum_{i=o}^{N-1} (\Pi_{j\neq i} (X - a_j)) \in A[X]$ et donc

$f'_{mN} \in A_{S^\infty}$, si, par induction, on suppose que $f_{(m-1)N} \in A_{S^\infty}$. On vérifie que f_o, f_N sont bien sûrs dans A_{S^∞} (pour $m = o, m = 1$).

Remarque : En général A_{S^∞}, et les A-modules $A_{S(k)}$ ou $A_{S[k]}$ sont des A-modules libres sur A quand A est un anneau de valuation discrète, avec des bases de polynômes de degré croissant (cf. lemme 1). Si A est un anneau de Krull Noethérien, on peut, grâce au théorème d'approximation, construire une suite de polynômes $f_o, f_1, ..., f_n, ...$ de $K[X]$ telle que $f_o, f_1, ..., f_n, .. \in A_{S^.}$ et que la valuation du coefficient directeur de f_n soit minimale (parmi les polynômes de degré n), pour toute valuation essentielle de A dont le corps résiduel a un cardinal plus petit que n (en effet ces valuations sont en nombre fini). Si une valuation essentielle a un corps résiduel comportant plus de n éléments, et si g est dans A_S (a fortiori dans tout anneau $A_{S^.}$) et de degré inférieur ou égal à n, alors, pour cette valuation, $v(g) \geqq 0$. Sinon on peut construire immédiatement à partir de g, un polynôme à coefficients dans le corps résiduel de cette valuation, de degré inférieur à n, mais partout nul, c'est-à-dire avec plus de n racines ! Tout polynôme de $A_{S^.}$ peut donc s'écrire

$g = \sum_{i=o}^{n} \alpha_i f_i$ (où n est le degré de g) et où $v(\alpha_i) \geqq 0$, si v est une valuation de corps résiduel ayant moins de i éléments, et $v(\alpha_i) \geqq -v(f_i)$, si v est une valuation de corps résiduel ayant plus de i éléments.

Ainsi on peut toujours décomposer $A_{S^.}$ en tant que A-module, en somme d'idéaux fractionnaires de A. Si A est factoriel, comme cette décomposition est de la forme

$A_{S^.} = \oplus_{n\geqq o} I_n f_n$ où les idéaux I_n sont définis par des conditions :

$\alpha \in I_n$ si et seulement si $v(\alpha) \geqq -v(f_n)$

ne mettant donc en jeu qu'un nombre fini de valuations essentielles de A, on voit qu'alors $A_{S^.}$ est libre avec une base de polynômes de degré croissant.

Proposition 7.4 : Si A est un anneau factoriel, les A-modules $A_{S^.}$ sont tous libres avec une base de polynômes de degré croissant.

Ce résultat généralise un peu celui de J.L. Chabert [(6) IV proposition 4.2].

§ 8. A_{S^∞} n'est pas Noethérien

Il résulte du fait qu'il y a une infinité d'idéaux premiers de $A_{S(k)}$ au-dessus de $\mathfrak{m}$ que $A_{S(k)}$ n'est pas Noethérien [Théorème 5.7]. Mais pour A_{S^∞} il faut changer d'argument ! On se sert de la base facilement établie dans le cas où $v(p) \leq p - 1$. On voit donc qu'en tout cas si A est l'anneau des entiers d'un corps de nombre, alors A_{S^∞} n'est pas Noethérien car une infinité de premiers p ne sont pas ramifiés dans A.

Proposition 8.1. : Soit A un anneau de valuation discrète tel que $v(p) \leq p - 1$, alors A_{S^∞} n'est pas Noethérien.

Preuve : On considère la base $f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots$ du théorème 7.3. Soit m un entier, on note $-k = v(f_m)$, on a alors $v(f_s) \geq -k$, si $s \leq m$. Soit n l'entier $n = p^{k+1} N$, on a alors $v(f_i) \geq v(f_n) + k + 1$, si $i < n$. On montre que f_n n'est pas dans l'idéal de A_{S^∞} engendré par $f_1, f_2, \ldots, f_m$. On aurait sinon :

$$f_n = \sum_{s=1}^{m} g_s f_s \quad \text{où} \quad g_s \in A_{S^\infty}$$

$$\text{et} \quad g_s = \sum_i \lambda_{i,s} f_i \quad \text{où} \quad \lambda_{i,s} \in A.$$

Comme f_i est divisé par f_n dans $K[X]$, si $i \geq n$, on a

$$g_s = \sum_{i<n} \lambda_{i,s} f_i + f_n h_s \quad \text{où} \quad h_s \in K[X].$$

Et
$$f_n \left(1 - \sum_{s=1}^{m} h_s f_s\right) = \sum_{s=1}^{m} \sum_{i<n} \lambda_{i,s} f_i f_s$$

X divise f_s dans $K[X]$, on a donc finalement :

$$f_n(1 - Xh) = \sum_{s,i} \lambda_{i,s} f_i f_s \quad \text{où} \quad h \in K[X],\ 1 \leq s \leq m \ \text{ et } i < n.$$

Mais alors on a, d'une part $v(1 - Xh) \leq 0$ (le terme constant est 1), donc $v\left[f_n(1 - Xh)\right] \leq v(f_n)$; d'autre part $v(f_i f_s) \geq v(f_n) + k + 1 - k$, donc

$v\left[\sum \lambda_{i,s} f_i f_s\right] > v(f_n)$. Une contradiction !

Remarque : On conjecture que A_{S^α} n'est jamais Noethérien dans le cas où A est un anneau de valuation discrète de corps résiduel fini. (si le corps résiduel est infini, $A_{S^\alpha} = A[X]$).

§ 9. Plusieurs variables

Très brièvement on veut maintenant indiquer que notre technique de détermination du spectre se généralise à plusieurs variables. On note A^m_S le sous-anneau de $K[X_1, ..., X_m]$ formé des polynômes f tels que $f(A^m) \subset A$. Si A est un anneau de valuation discrète de corps résiduel fini, l'ensemble produit $\hat{A}^m$ est encore compact et A^m_S est dense dans l'anneau des fonctions continues $\mathcal{C}(\hat{A}^m, \hat{A})$. On en tire :

Théorème 9.1 : La fibre au-dessus de $\mathfrak{m}$ de A^m_S est en bijection avec les points de A^m. A un point $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)$ de $\hat{A}^m$ correspond l'idéal $\mathfrak{m}_{\underline{\alpha}} = \{f \in A^m_S \mid f(\underline{\alpha}) \in \hat{\mathfrak{m}}\}$.
L'idéal $\mathfrak{m}_{\underline{\alpha}}$ est maximal et $A^m_S/\mathfrak{m}_{\underline{\alpha}} \equiv A/\mathfrak{m}$.

Bien sûr la fibre au-dessus de (0) de A^m_S est celle de $K[X_1, ..., X_m]$.
Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de $K[X_1, ..., X_m]$, on établit d'après le théorème 4.3 :

Proposition 9.2 : L' idéal $\mathfrak{p} \cap A^m_S$ de A^m_S est inclus dans $\mathfrak{m}_{\underline{\alpha}}$ si et seulement si $f(\underline{\alpha}) = 0$ pour tout $f \in \mathfrak{p}$.

Si $\underline{\alpha} \in \hat{A}^m$ on note $\mathfrak{p}_{\underline{\alpha}}$ l'idéal (premier) de $K[X_1, ..., X_m]$ formé des polynômes nuls en $\underline{\alpha}$. Bien sûr $K[X_1, ..., X_m]/\mathfrak{p}_{\underline{\alpha}} \simeq K(\alpha_1, ..., \alpha_m)$ donc si $(\alpha_1, ..., \alpha_m)$ est de degré de transcendance d sur K, $\mathfrak{p}_{\underline{\alpha}}$ est de hauteur $m - d$ et $\mathfrak{m}_{\underline{\alpha}}$ de hauteur $m - d + 1$ dans A^m_S (On note que dans $\mathfrak{m}_{\underline{\alpha}}$ est contenu un seul idéal de hauteur immédiatement inférieure. Le spectre de A^m_S est bien loin de celui d'un anneau Noethérien !).
On peut aussi introduire l'anneau A^m_R des fractions rationnelles à valeurs entières dans $K(X_1, ..., X_m)$. Bien sûr A^m_R est encore dense dans $\mathcal{C}(\hat{A}^m, \hat{A})$ et cet anneau a la même fibre au-dessus de $\mathfrak{m}$ que A^m_S .

The University of British Columbia
VANCOUVER 8 (Canada), Dec. 17, 1973.

BIBLIOGRAPHIE

(1) BOURBAKI, N. Algèbre commutative, Paris Hermann.

(2) BRIZOLIS, D. Ideals of Rings of Integer valued Polynomials
Thèse, University of California, Los Angeles, 1973.

(3) CAHEN, P.J. Polynômes à valeurs entières.
Thèse, Université de Paris XI, Orsay, 1973.

(4) CAHEN, P.J. et CHABERT, J.L. Coéfficients et valeurs d'un polynôme.
Bull. Sci. Math. 95 (1971) pp. 295-304.

(5) CHABERT, J.L. Anneaux de polynômes à valeurs entières et anneaux de Fatou.
Bull. Soc. Math. France 99 (1971) pp. 273-283.

(6) CHABERT, J.L. Anneaux de polynômes à valeurs entières et extensions de Fatou.
Thèse, Université de Paris XI, Orsay, 1973.

(7) MAHLER, K. An interpolation series for continuous functions of a p-adic variable.
J. für Reine and Angew. math. 199 (1958) pp. 23-34.

(8) STRAUS, E.G. On the Polynomials whose Derivatives have Integral Values
at the Integers.
Proc. A.M.S., 2 (1951) pp. 24-27.

(Manuscrit reçu en août 1974)