ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

P. BOULICAUT

Modules de continuité des trajectoires de processus gaussiens

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 51, série *Mathématiques*, n° 9 (1974), p. 5-10

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1974__51_9_5_0>

MODULES DE CONTINUITE DES TRAJECTOIRES DE PROCESSUS GAUSSIENS

P. BOULICAUT

Université de Clermont-Ferrand

Cet exposé est consacré à l'étude de l'existence d'une version à trajectoires continues d'une fonction aléatoire réelle $\tilde{X}$ sur un espace métrique compact T et à la détermination d'un module de continuité uniforme pour les trajectoires d'une telle version. La méthode utilisée fait appel à la notion d'entropie métrique de T et à la notion de fonction de Young.

Cette étude a fait l'objet de nombreux travaux dans le cas d'une fonction aléatoire réelle gaussienne centrée. Lorsque T = $[0, 1]$, citons le résultat énoncé par FERNIQUE [3] pour une fonction aléatoire réelle gaussienne centrée $\tilde{X}$:

Si φ est une fonction croissante définie sur $[0, a]$ $(a > 0)$ telle que pour $0 \leq s \leq t \leq a$, $E(\tilde{X}(s) - \tilde{X}(t))^2 \leq \varphi(t-s)^2$

$$\int_0^a \frac{\varphi(u)}{u\sqrt{\operatorname{Log} 1/u}}\, du < +\infty$$

alors $\tilde{X}$ admet une version à trajectoires continues,

et parmi toutes les démonstrations qui en ont été données, mentionnons celle dûe à A.M. GARSIA, E.R. RODEMICH et H. RUMSEY Jr [4].

L'étude du cas général a été faite par R. DUDLEY et S. CHEVET en utilisant l'entropie métrique de T : (cf. [1], [2]).

Soient (T, d) un espace métrique compact et Φ une fonction de $]0, \alpha]$ dans $\mathbb{R}^+$, croissante et telle que $\Phi(h) \longrightarrow 0$ quand $h \longrightarrow 0$. Posons pour tout $\varepsilon > 0$, $\psi(\varepsilon) = \sup \{t \,;\, \Phi(t) < \varepsilon\}$. Si $\tilde{X} : T \longmapsto \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est une fonction aléatoire réelle gaussienne centrée vérifiant

$E(\tilde{X}(s) - \tilde{X}(t)^2 \leq \Phi^2(d/s, t))$ pour $s, t \in T$, $d(s, t) \leq \alpha$,

alors $\tilde{X}$ admet une version à trajectoires continues lorsque

$$\sum_n \frac{1}{2^n} \sqrt{H_T \quad \psi(2^{-n}))} < +\infty \quad *$$

Citons aussi le résultat de C. PRESTON [5] :

(*) pour $\tau > 0$, $N_T(\ )$ désigne le nombre minimum de boules ouvertes de rayon τ nécessaires pour récouvrir T, et $H_T(\tau) = \operatorname{Log} N_T(\tau)$.

Soit $\rho : [0, \alpha] \longrightarrow \mathbb{R}_+$, continue , croissante, telle que $\rho(0) = 0$ et pour tout $(s, t) \subset T$, $E(\tilde{X}(s) - \tilde{X}(t))^2 \leq \rho^2(d(s, t))$.

Soit ψ une fonction de Young telle que, si ξ est une v.a.r. normale réduite, $E\ \psi(\xi)\ \mathrm{Log}^+\ \psi(\xi) < +\infty$

Soit μ une mesure sur telle que supp $(\mu) = T$ et

$$\int_0^1 \psi^{-1} \left[\frac{1}{m\left(\frac{u}{2}\right)^2}\right] d\bar{\rho}\ (u) < +\infty$$

où $m(u) = \inf \{\mu(B_u(X)\ ;\ X \in T\}$ et $\bar{\rho}(u) = \rho(2u)$

Alors $\tilde{X}$ admet une version X à trajectoires continues et il existe une v.a.r. B P-presque finie telle que

$$|X(s, \omega) - (t\ ;\ \omega)| \leq 10 \int_{[0,d(s,\ t)]} \psi^{-1} \left[\frac{B(\omega)}{m(u/2)^2}\right] d\bar{\rho}\ (u)$$

Nous pouvons choisir μ telle que

$$m(u) \geq \left[\prod_{\nu=1}^{\gamma(u)+2} N_T\left(\frac{\delta}{2^k}\right)\right]^{-1}$$

où δ est le diamètre de T et $\gamma(u)$ est la partie entière de $\mathrm{Log}\ \frac{\delta}{u}$ / Log 2.

Dans notre exposé, nous n'utilisons pas explicitement le caractère gaussien de la fonction aléatoire et nous remplaçons cette hypothèse par l'hypothèse que le sous-ensemble $\{\tilde{X}(s)\ ;\ s \in T\}$ de $\mathbb{L}^\circ(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est contenu dans un certain espace d'Orlicz $\mathbb{L}^\Phi(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

n° 1 - <u>EXISTENCE DE VERSIONS A TRAJECTOIRES CONTINUES</u>.

Soit $\tilde{X} : T \longrightarrow \mathbb{L}^\circ(\Omega, \mathcal{F}, P)$ une fonction aléatoire réelle sur un espace métrique compact (T, d). Nous supposons qu'il existe une fonction de Young Φ telle que :

(i) pour tout $t \in T$, $\tilde{X}(t) \in \mathbb{L}^\Phi(\Omega, \mathcal{F}, P)$

(ii) l'application $t \leadsto \tilde{X}(t)$ de T dans $\mathbb{L}^\Phi(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est continue.

Désignons par ρ un module de continuité de cette application, c'est-à-dire une fonction définie sur un intervalle $[0,\alpha]$, croissante, continue à droite en tout point de $[0,\alpha[$ telle que $\rho(0) = 0$ et, pour tout $(s, t) \in T \times T$ vérifiant $d(s, t) \leq \alpha$, $\|\tilde{X}(s) - \tilde{X}(t)\|_\Phi \leq \rho[d(s, t)]$; soit σ définie sur $[0,\alpha]$ par :

$\sigma(0) = 0$, $\sigma(\tau) = \rho(\tau - 0)$ (σ est la régularisée à gauche de ρ) et posons $g(\tau) = N_T(\tau)^2$, et dans le cas où T est une partie convexe compacte d'une espace vectoriel normé de dimension finie k, $g(\tau) = (\frac{1}{\tau})^k$.

Théorème 1 : S'il existe une suite décroissante $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels > 0, convergeant vers 0, et une constante $C \in]0, +\infty[$ telle que la série $\sum_n \sigma(\alpha_n)\, \Phi^{-1}[C g(\alpha_{n+1})]$ soit convergente, alors $\tilde{X}$ admet une version à trajectoires continues.

Démonstration : A la suite $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, nous associons :

un α_n-réseau minimal A_n pour T

$B_n = \{(s, t) \in A_n \times A_{n+1}$; $\exists (s',t') \in T\times T$; $d(s,s')<\alpha_n$, $d(t,t')<\alpha_n$, $d(s',t')<\alpha_n\}$

$C_n = \{(\tilde{X}(s), \tilde{X}(t))$; $(s, t) \in B_n\}$.

Pour chaque $\tilde{\xi} \in \tilde{X}(T)$, choisissons $L\tilde{\xi} \in \tilde{\xi}$ et posons :

$N_n = \text{card } B_n$, $d_n = \sup \{||\tilde{\xi} - \tilde{\eta}||_\Phi$; $(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \in C_n\}$

$$\Delta(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}; \omega) = \begin{cases} \dfrac{|L\tilde{\xi}(\omega) - L\tilde{\eta}(\omega)|}{||\tilde{\xi}-\tilde{\eta}||_\Phi} & \text{si } \tilde{\xi} \neq \tilde{\eta} \\ 0 \text{ si } \tilde{\xi} = \tilde{\eta} \end{cases}$$

$$\xi_n(\omega) = \sup \{\Delta(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}\,;\, \omega)\ ;\ (\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \in C_n\}$$

La démonstration du théorème 1 se déduit des deux lemmes suivants :

Lemme 1 : Si la série $\sum_n d_n \xi_n$ converge P-presque sûrement, alors $\tilde{X}$ admet une version à trajectoires continues.

Lemme 2 : S'il existe $C \in]0, +\infty[$ tel que la série $\sum_n d_n\, \Phi^{-1}(C N_n)$ converge, alors la série $\sum_n d_n \xi_n$ converge P-presque sûrement. Pour terminer la démonstration du théorème 1, il suffit de remarquer que $d_n \leq 3\sigma(\alpha_n)$ et que $N_n \leq N_T(\alpha_{n+1})^2$; dans le cas où T est une partie convexe compacte d'un espace vectoriel normé de dimension finie k, il faut utiliser le fait que $N_n = O((\frac{1}{\alpha_{n+1}})^k)$. (cf : [1])

Théorème 2 : S'il existe une constante $C \in]0, +\infty[$ telle que l'intégrale $\int_{[0,\alpha]} \Phi^{-1}[C\, g(\tau)]\, d\sigma(\tau)$ est finie, alors X admet une version à trajectoires continues.

Remarque : Les hypothèses que nous avons faites sont semblables à celles utilisées par PRESTON. Indiquons brièvement en quoi nos démonstrations diffèrent de celles données par PRESTON et nous permettent de ne plus nous limiter au cas de fonctions aléatoires gaussiennes. Preston considère une probabilité μ sur T dont le support est T et définit $m = \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ par $m(u) = \inf \{\mu[B_u(t)] \cdot t \in T\}$; pour toute version mesurable X d'une fonction aléatoire vérifiant les hypothèses i) et ii) du paragraphe 1

$$\Omega_0 = \{\omega ; \int_{T\times T} \Phi\left(\frac{|X(s\ ;\omega) - X(t,\omega)|}{\rho[d(s,\ t)]}\right) d\mu \otimes \mu(s,\ t) < +\infty\}$$

a pour probabilité 1 et si $\int_0^1 \Phi^{-1}\left[\frac{1}{m\ (u/2)^2}\right] d\bar{\rho}(u) < +\infty$, alors,

pour $a \in \Omega_0$,

$$X'(s,\ \omega) = \lim_{r \downarrow 0} \mu[B_r(s)]^{-1} \int_{B_r(s)} X(t,\ \omega)\ d\mu(t)$$

définit une fonction continue $s \rightsquigarrow X'(s\ ;\ \omega)$ sur T telle que

$$\mu\{s\ ;\ X'(s\ ;\ \omega) \neq X(s ;\ \omega)\} = 0$$

Il s'agit alors de prouver que X' est une version de $\tilde{X}$, ce qui, dans le cas d'une fonction aléatoire gaussienne, est prouvé par l'utilisation du développement de Karhunen-Loève de $\tilde{X}$. Au lieu de la mesure $\mu \otimes \mu$ sur T x T nous avons introduit une mesure discrète de la forme

$\sum_0^\infty \lambda_n \sum_{(s,t)\in B_n} \delta_{(s,t)}$ et, nous avons prouvé, sous une hypothèse analogue à celle de Preston, que, pour $\omega \in \Omega_0$,

$$X'(s,\ \omega) = \lim_{n\to\infty} X(s_n,\ \omega)$$

définit une fonction continue $s \rightsquigarrow X'(s,\ \omega)$ sur T. Le fait que X' soit une version de $\tilde{X}$ résulte alors seulement de la continuité de $\tilde{X}$ et la restriction aux fonctions aléatoires gaussiennes, dûe à l'existence du développement de Karhunen-Loève, n'est plus nécessaire.

Mentionnons aussi que la démonstration du théorème 1 est semblable à divers détails techniques près, à celles des théorèmes correspondants de CHEVET et de DUDLEY.

BIBLIOGRAPHIE

Pour une bibliographie exhaustive sur les fonctions aléatoires réelles gaussiennes, voir

NEVEU J. Processus aléatoires gaussiens - Les Presses de l'Université de Montréal (1968).

1 - CHEVET S. Conditions suffisantes d'existence de versions à trajectoires uniformément continues et applications aux fonctions aléatoires gaussiennes - in Seminaire Schwartz - Ecole Polytechnique de Paris (1970).

2 - DUDLEY R. Sample functions of the Gaussian Process The Annals of Probability - vol. 1 - n° 1, 66 - 103 (1973).

3 - FERNIQUE X. Continuité des processus gaussiens C.R. Acad. Sci. Paris 258, 6058 - 6060 (1964).

4 - GARSIA A, RODEMICH E, RUMSEY H. Jr. A real variable lemma and the continuity of paths of some Gaussian Processes - Indiana University Math. J 20, 565-578 (1970).

5 - PRESTON C. Continuity proporties of some Gaussian processes Ann. Math. Statist. 43, 285 - 292 (1972).