

ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

R. T. SMYTHE

**Convergence de sommes de variables aléatoires indicées par
des ensembles partiellement ordonnés**

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 51, série *Mathématiques*, n° 9 (1974), p. 43-46

http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1974__51_9_43_0

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CONVERGENCE DE SOMMES DE VARIABLES ALEATOIRES INDICEES PAR
DES ENSEMBLES PARTIELLEMENT ORDONNES

R. T. SMYTHE

0. INTRODUCTION

Les ensembles partiellement ordonnés (\mathcal{A}, \leq) dont il s'agit ici satisfont toujours aux hypothèses suivantes :

- (a) \mathcal{A} est dénombrable
- (b) $\forall \alpha \in \mathcal{A}, \text{card} \{ \beta \in \mathcal{A} \mid \beta \leq \alpha \} \equiv |\alpha| < \infty$
- (c) $\forall j \in \mathbb{N}, \text{card} \{ \alpha \in \mathcal{A} \mid |\alpha| = j \} \equiv d(j) < \infty$

L'exemple le plus connu est N^r , r un entier ≥ 1 , ou $\underline{x} \equiv (x_1, x_2, \dots, x_r)$
 $\leq \underline{y} \equiv (y_1, y_2, \dots, y_r)$ si et seulement si $x_i \leq y_i, i = 1, 2, \dots, r$.

Soit $\{X_\alpha, \alpha \in \mathcal{A}\}$ un ensemble de variables aléatoires, indépendantes, avec $E(X_\alpha) = 0$. On définit, $\forall \alpha \in \mathcal{A}, E_\alpha = \{ \beta \in \mathcal{A} \mid \beta \leq \alpha \}, S_\alpha = \sum_{\beta \in E_\alpha} X_\beta$.

1. INEGALITE DE HAJEK-RENYI

Soit $\mathcal{A} = N^r$, soit $E(X_{\underline{j}}^2) \equiv \sigma_{\underline{j}}^2 < \infty, \forall \underline{j} \in N^r$. Soit $\{b_{\underline{j}}\}_{\underline{j} \in N^r}$

un ensemble de constantes positives telles que $b_{\underline{j}}$ définit une fonction de répartition (non-normalisée) sur N^r . Alors on a le théorème suivant, analogue à celui de Hajek et Renyi pour $r = 1$: (1)

Théorème 1. Soit $c > 0$. Alors

$$P \left\{ \sup_{\substack{k \leq n \\ \underline{k} \sim \underline{n}}} \left| \frac{S_{\underline{k}}}{b_{\underline{k}}} \right| \geq c \right\} \leq \frac{4^{2r-1}}{c^2} \sum_{\substack{\underline{j} \leq \underline{n} \\ \underline{j} \sim \underline{n}}} \frac{\sigma_{\underline{j}}^2}{b_{\underline{j}}^2}$$

2. UNE LOI DE GRANDS NOMBRES

L'objet d'intérêt ici est la classe d'ensembles partiellement ordonnés qui satisfont à (a), (b), (c), ainsi que

(d) \mathcal{G} est filtrant à droite

(e) $\exists r \in \mathbb{N}$ avec la propriété suivante : $\forall \beta \in \mathcal{G}$, il existe une application $\varphi_\beta : E_\beta \rightarrow \mathbb{N}^r$ qui est univoque et qui conserve l'ordonnement.

Ces ensembles seront appelés des lattices locales. On définit, pour $x > 0$,

$$M(x) = \begin{cases} 1 & x < 1 \\ \sum_{j \leq x} d(j) & x > 1 \end{cases}$$

à l'aide du théorème 1, on démontre

Théorème 2. Soit \mathcal{G} une lattice locale, $\{X_\alpha\}$ de même loi. On suppose de plus que

(i) M varie régulièrement à ∞ avec un exposant < 2

(ii) $E(M(|X|)) < \infty$

Alors étant donné $\varepsilon > 0$,

$$P \{ |S_\alpha| / |\alpha| > \varepsilon \text{ finiment souvent} \} = 1.$$

Dans beaucoup de cas d'intérêt on a une réciproque de ce théorème. On dira qu'un ensemble \mathcal{G} satisfaisant à (a), (b), et (c) est n-dérivable si :

Etant donné $\alpha_1 \in \mathcal{G}$, $\exists \alpha_2, \dots, \alpha_j$ avec $j \leq n$, $\alpha_i \leq \alpha_1$ tels que :

- (i) $|\alpha_i| \geq K(\alpha_1)$, ou $K(\alpha) \uparrow \infty$ lorsque $|\alpha| \uparrow \infty$;
- (ii) $\left[\left[(E_{\alpha_1} \cap E_{\alpha_2}^c) \cap E_{\alpha_3} \right] \cap E_{\alpha_4}^c \right] \dots \cap E_{\alpha_j}^c = \{\alpha_1\}$

(Par exemple, \mathbb{N}^r est 2^r -dérivable pour tout $r \in \mathbb{N}$.) Alors le lemme de Borel-Cantelli donne

Théorème 3. On suppose que $\{X_\alpha\}$ sont de même loi, \mathcal{A} est n-dérivable pour quelque n, alors :

$$E (M (|X|)) = \infty \text{ implique } P \{ |S_\alpha / |\alpha|| \geq 1/n \text{ infiniment souvent} \} = 1$$

3. UN THEOREME DU TYPE HSU-ROBBINS

Le théorème suivant généralise celui de Hsu et Robbins (voir (2)) :

Théorème 4. Soit \mathcal{A} un ensemble partiellement ordonné qui satisfait à (a), (b), et (c). Si $M(x)$ varie régulièrement à ∞ , alors

$$E (|X| M (|X|)) < \infty \text{ implique } \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} P \{ |S_\alpha| > |\alpha| \} < \infty$$

4. LA LOI DU LOGARITHME ITERE

Wichura (3) a démontré le théorème suivant, analogue à la loi du logarithme itéré classique :

Théorème 5. Soit $\mathcal{A} = N^r$, $r > 1$. Alors si $\{X_\alpha\}$ sont de même loi, avec $E ((X^2 \text{Log}^{r-1} |X|) / \text{LogLog} |X|) < \infty$, on a

$$P \left\{ \lim_{\min j_1 \rightarrow \infty} \sup_{j_1} |S_{j_1}| / (\text{var}(X) |j_1| \text{Log Log } |j_1|)^{1/2} = (2r)^{1/2} \right\} = 1$$

Il démontre de plus que la condition $E ((X^2 \text{Log}^{r-1} |X|) / \text{LogLog} |X|) < \infty$ est nécessaire pour avoir une loi du logarithme itéré.

BIBLIOGRAPHIE

- (1) HAJEK, J., et RENYI, A., Generalization of an inequality of Kolmogorov, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 6, 281-283, 1955.
- (2) ERDOS, P., On a theorem of Hsu and Robbins, Annals of Math. Stat. 20, 286-291, 1949.
- (3) WICHURA, M., Some Strassen-type Laws of the Iterated Logarithm for Multiparameter Stochastic Processes with Independent Increments, Annals of Probability 1, 1973.