ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

GUY FOURT

Ensemble de première visite d'une promenade aléatoire à un convexe

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 49, série *Mathématiques*, nº 8 (1972), exp. nº 5, p. 1-29

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1972__49_8_A5_0>

ENSEMBLE DE PREMIERE VISITE D'UNE PROMENADE ALEATOIRE A UN CONVEXE

Guy FOURT

Introduction

Nous étudions dans cet article la conjecture suivante : soit X_n une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans un espace vectoriel réel localement convexe E, de même loi, de support A et la promenade aléatoire $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Cette promenade sera supposée apériodique, c'est-à-dire que E est le groupe fermé engendré par A. Soit alors C un convexe fermé d'intérieur non vide. L'ensemble de première visite de la promenade S_n au convexe C est-il la "couronne", fermeture de l'ensemble des points M de C tels qu'il existe un point N extérieur à C tel que $\overrightarrow{NM}$ soit élément de l'enveloppe convexe de A ? Nous verrons que cette couronne est l'ensemble de première visite lorsque le semi groupe fermé engendré par A est E. Sinon, et dans le cas où E est de dimension finie, cette couronne pourra être considérée comme "limite" de l'ensemble de première visite, limite en un sens que nous préciserons.

La première partie de cet article sera consacrée à quelques propriétés des semi groupes d'un EVT, propriétés qui possèdent un intérêt intrinsèque.

Nous donnerons une condition suffisante simple sur A (un critère dans le cas d'un espace de dimension finie) pour que le semi groupe fermé engendré par A soit l'espace E.

Posons d'abord une définition.

Définition 1

Un sous-ensemble A de R^m (resp. d'un EVT) sera dit séparable s'il existe une forme linéaire f (resp. une forme linéaire continue f) non nulle telle que f (A) $\leqslant$ 0.

Théorème 1

Soit S un semi groupe fermé apériodique de R^m ; alors :

ou $S = R^m$

ou S est séparable

Corollaire 1

Le semi groupe fermé apériodique engendré par un ensemble A de R^m est l'espace R^m si et seulement si pour toute forme linéaire f non nulle, il existe deux points a et b de A tels que

$f(a)\, f(b) < 0.$

Théorème 2

Soit E un espace vectoriel topologique réel et S un semi groupe fermé apériodique de E d'intérieur non vide, alors :

ou S = E

ou S est séparable

Corollaire 2

Le semi groupe fermé engendré par un ensemble A d'intérieur non vide d'un espace vectoriel topologique réel E est E si et seulement si pour toute forme linéaire continue f il existe deux points a et b de A tels que $f(a)\, f(b) < 0$.

Nous établissons d'abord les lemmes suivants.

Lemme 1

Soit S un semi groupe fermé de R^m contenant un groupe G. Si dim (G) = m, alors S est un groupe.

Démonstration

Soit $\mathcal{G} = \{\Gamma \mid \Gamma$ groupe fermé, $\Gamma \subset S\}$. $\mathcal{G} \neq \emptyset$ car $\overline{G}$ est un groupe fermé contenu dans S. Nous ordonnons $\mathcal{G}$ par inclusion. Pour tout sous-ensemble $\mathcal{G}'$ non vide totalement ordonné de $\mathcal{G}$, posons $G_o = \bigcup_{\Gamma \in \mathcal{G}'} \Gamma$. G_o est un groupe ; en effet :

$\mathcal{G}'$ non vide possède un élément Γ et 0 est un point de Γ donc de G_o , donc G_o est non vide.

Si x et y sont éléments de G_o, il existe Γ_1 et Γ_2 tels que x soit élément de Γ_1 et y élément de Γ_2. On a alors $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$ ou $\Gamma_2 \subset \Gamma_1$ et x-y est élément de Γ_2 dans le premier cas, de Γ_1 dans le deuxième. Donc G_o est un groupe contenu dans S et $\overline{G_o}$ est un élément de $\mathcal{G}$ contenant tous les éléments de $\mathcal{G}'$. La famille $\mathcal{G}'$ admet donc un majorant. Par application du théorème de Zorn, il existe un élément maximal G_1 contenant $\overline{G}$. Comme dim $G_1 \geqslant$ dim G = m, il existe une base $x_1 \ldots x_m$ de R^m telle que :

$$G_1 = \left\{ \sum_{i=1}^{k} R\, x_i + \sum_{i=k+1}^{m} Z\, x_i \right\}$$

Soit $y = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i$ un élément quelconque de S.

Sans perte de généralité, nous pouvons convenir que pour $k < i \leqslant \ell$, λ_i soit irrationnel et que pour $\ell < i \leqslant m$, λ_i soit rationnel. Pour $i > \ell$, nous posons $\lambda_i = \frac{a_i}{b_i}$, a_i, b_i étant deux entiers premiers entre eux, b_i strictement positif.

S étant un semi groupe contenant G_1 et l'élément y contient l'ensemble des combinaisons

$$\sum_{i=1}^{k} R\, x_i + \sum_{i=k+1}^{\ell} (q_i + \lambda_i\, p)\, x_i + \sum_{i=\ell+1}^{m} (q_i + \lambda_i\, p)\, x_i$$

où les nombres q_i parcourent Z et p parcourt N.

L'ensemble des nombres $q_i + \lambda_i\, p$, pour $k < i \leqslant \ell$ est dense dans R car λ_i est irrationnel. S étant fermé contient donc les combinaisons

$$\sum_{i=1}^{\ell} R\, x_i + \sum_{i=\ell+1}^{m} \frac{q_i\, b_i + a_i\, p}{b_i}\, x_i$$

où les q_i parcourent Z et p parcourt N.

En utilisant l'identité de Bezout, il existe des entiers relatifs u et v tels que

$$u\, b_i + v\, a_i = 1 \tag{1}$$

On en déduit

$$(b_i\, u - u - 1)\, b_i + v\, (b_i - 1)\, a_i = -1 \tag{2}$$

Si $v > 0$, comme $b_i > 0$, tout entier positif par (1) ou négatif par (2) peut s'écrire

$q_i\, b_i + p\, a_i$ et q_i est entier relatif, p entier positif.

Si $v \leqslant 0$, tout entier négatif par (1) ou positif par (2) peut s'écrire $q_i\, b_i + p\, a_i$ où p est un entier positif.

Donc S contient les combinaisons

$$\sum_{i=1}^{\ell} R\, x_i + \sum_{i=\ell+1}^{m} Z\, \frac{x_i}{b_i}$$

L'ensemble de ces combinaisons forme un groupe fermé G_2 contenant G_1.
G_1 étant maximal $G_1 = G_2$; donc $\ell = k$ et $b_i = 1$ pour $i > k$. Par consé-

quent y est élément de G_1 et $S = G_1$. Donc S est un groupe.

Le lemme 1 a pour corollaire le lemme 2 suivant :

Lemme 2

Soit (x_i) $i = 1, 2, \dots, m$ une base de R^m formée d'éléments d'un semi groupe S fermé ; s'il existe un élément y de S dont toutes les composantes dans la base (x_i) soient strictement négatives, S est un groupe.

Preuve : S contient les combinaisons de la forme

$$\sum_{i=1}^{m} (p_i + \lambda_i\, p)\, x_i \quad \text{où } p_i, p \text{ sont entiers positifs.}$$

Soit I l'ensemble des indices i tel que λ_i soit rationnel.

S étant fermé contient donc les combinaisons

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \notin I}}^{m} R\, x_i + \sum_{\substack{i=1 \\ i \in I}}^{m} Z\, x_i$$

et l'ensemble de ces combinaisons est un groupe de dimension m.

Lemme 3

Si S est un semi groupe fermé apériodique d'un E.V.T. E, l'enveloppe convexe C de S est un semi groupe apériodique. De plus

$C = E$ si et seulement si $S = E$.

Démonstration

1°) C est un semi groupe car si x (respectivement y) est élément de C, alors x (respectivement y) s'écrit comme combinaison convexe $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i\, x_i$ (respectivement $\sum_{i=1}^{q} \mu_i\, y_i$) d'éléments de S. Alors

$$x + y = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i + \sum_{i=1}^{q} \mu_i y_i = \sum_{i=1}^{p} \frac{\lambda_i}{2} \; 2 x_i + \sum_{i=1}^{q} \frac{\mu_i}{2} \; 2 y_i$$

comme : $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \frac{\lambda_i}{2} + \sum_{i=1}^{q} \frac{\mu_i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

$x + y$ est élément de C

2°) C contient S qui est apériodique : C est donc apériodique.

3°) Si $S = E$,C est trivialement égal à E. Réciproquement si $C = E$, pour tout x_o élément de S , $- x_o$ est élément de E donc de C et est une combinaison convexe à coefficients strictement positifs d'éléments de S

$$x_o + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i = 0$$

D'où $\displaystyle\frac{1}{2} x_o + \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{2} x_i = 0$

0 est donc combinaison convexe des $k + 1$ éléments x_o, x_1, ..., x_k de S.

Soit m la dimension de l'espace vectoriel E_m engendré par $x_o, x_1 \,..\, x_k$ Parmi les $k+1$ éléments x_o, x_1, ... x_k de S il en existe $m + 1$ affinement indépendants, que nous noterons y_o, y_1, ... y_m tel que 0 soit combinaison convexe de y_o, ..., y_m

$$0 = \sum_{i=0}^{m} \mu_i y_i$$

$y_1 \ldots y_m$ forme une base de E_m . Soit (y_i^*) sa base duale

$$0 = \mu_o < y_i^* , y_o > + \mu_i$$

d'où $$< y_i^* , y_o > \; < \; 0$$

Le lemme 2 montre alors que $S \cap E_m$ est un groupe, et donc $- x_o$ est élément de $S \cap E_m$, donc de S : S est donc un groupe et comme S est apériodique, S est l'espace E.

<u>Nous pouvons maintenant démontrer les théorèmes 1 et 2.</u>
Si O est intérieur à l'enveloppe convexe C de S, C est un voisinage de O et comme $C \supset n\,C$ pour tout n (C est un semi groupe) $C = R^m$ et le lemme 3 montre que $S = R^m$.

Sinon il existe une forme linéaire f telle que $f\,(C) \leqslant 0$ donc, puisque S est inclus dans C , que $f\,(S) \leqslant 0$ sous les hypothèses du théorème 1 ; il existe une forme linéaire continue f par le théorème de Hahn-Banach telle que $f\,(C) \leqslant 0$ et donc, $f\,(S) \leqslant 0$, sous les hypothèses du théorème 2.

Le contre-exemple suivant montre l'importance de la condition imposée à S si E n'est pas de dimension finie.

Soit $E = \ell^2$ et le semi groupe S des suites ayant un nombre fini de termes non nuls, et de dernier terme non nul supérieur ou égal à 1. Soit a_k un élément de ℓ^2 limite d'une suite b_k^n d'éléments de S. La suite a_k tend vers O car la série $\sum a_k^2$ converge. Il existe donc un rang K tel que $k > K$ implique que $|a_k| < \frac{1}{2}$.

Soit alors un rang N tel que $n \geqslant N$ implique

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - b_k^n)^2 < 1/4$$

donc $|a_k - b_k^n| < 1/2$ pour tout $k \geqslant K$.

Le dernier terme non nul de la suite b_k^n est donc de rang inférieur à K pour $n \geqslant N$ et $a_k = 0$ pour $k \geqslant K$: S est fermé. Si u était intérieur à S, il existerait une boule de centre u contenue dans S, donc une suite infinie v telle que u + v soit dans S. u étant une suite finie, u + v serait infinie ce qui est contraire à la définition de S : l'intérieur de S est vide.

Soit f une forme linéaire continue sur ℓ^2 définie par la suite α_n et n_o un rang tel que $\alpha_{n_o} \neq 0$. Pour tout réel x, nous définissons l'élément de S

$$0, \dots 0, a_{n_o} = x, 1, 0 \dots 0 \dots$$

$$f(x) = \alpha_{n_o} x + \alpha_{n_o+1}$$

Il ne peut exister de forme f telle que $f(S) \leqslant 0$.

Le contre-exemple précédent nous amène à rappeler que dans un espace vectoriel localement convexe E de dimension infinie, il y a équivalence entre la condition "S n'est pas séparable" et la condition "E est adhérence de l'enveloppe convexe de S" (cf [1]) p. 129 mais non avec la condition "E est l'enveloppe convexe de S".

Nous complèterons l'étude des semi groupes de R^m en démontrant le résultat suivant (théorème 3). Ce théorème généralise une propriété des semi-groupes de R exposée dans le livre de W. FELLER ([2], p. 144) en vue de ses applications aux promenades aléatoires sur la droite réelle.

<u>Théorème 3</u>

Soit S un semi-groupe fermé apériodique de R^m et C le plus petit cone fermé contenant S. Pour tout voisinage V de 0 et tout cone Γ à semelle compacte K contenue dans l'intérieur de C , il existe un compact K' tel que si x est élément de $\Gamma \setminus K'$, $(x + V) \cap S$ soit non vide.

Auparavant, établissons quatre lemmes.

Lemme 4

Si (u_i) $i = 1, 2, \ldots m$ est une base de R^m formée d'éléments d'un semi groupe S fermé apériodique, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe des nombres M_i tels que pour tout x vérifiant les inégalités :

$$< u_i^* , x > > M_i \qquad (i = 1, 2, \ldots m)$$

il existe un y , élément du semi-groupe vérifiant les inégalités :

$$|< u_i^* , x-y >| < \varepsilon \qquad (i = 1, 2 \ldots m)$$

(les (u_i^*) sont la base duale de (u_i).)

Démonstration

Appelons G_o le groupe $\sum_{i=1}^{m} \mathbb{Z} u_i$ et π la projection de R^m sur R^m/G_o. π (S) est un semi groupe apériodique de R^m/G_o qui est un groupe compact : L'adhérence de π (S) est donc R^m/G_o

Notons maintenant que R^m/G_o est isomorphe à $[0, 1[^m$. Soit k un entier tel que $\frac{1}{k} < \varepsilon$ et découpons cet ensemble en pavés.

$$[0, 1[^m = \bigcup_{0 \leqslant j_\alpha < k} \prod_{\alpha=1}^{m} \left[\frac{j_\alpha}{k} , \frac{j_\alpha + 1}{k} \right[$$

Pour tout m-uple (j_α) $(\alpha = 1, 2, \ldots m)$, il existe un élément $x_{j_1 j_2 \cdot\cdot j_m}$ de S dont la projection soit dans le pavé $\prod_{\alpha=1}^{m} \left[\frac{j_\alpha}{k} , \frac{j_\alpha + 1}{k} \right[$

Posons alors

$M_i = \max < u_i^* , x_{j_1 \ldots j_m} >$, le maximum étant étendu aux k^m éléments $x_{j_1 j_2 \ldots j_m}$.

Pour tout x vérifiant les inégalités

$$< u_i^*, x > \; \geqslant \; M_i \qquad\qquad (i = 1, 2, \dots m)$$

il existe un m-uple $j'_1, j'_2 \dots j'_m$ tel que x se projette dans le pavé
$$\prod_{\alpha=1}^{m} \left[\frac{j'_\alpha}{k}, \frac{j'_\alpha+1}{k}\right[$$

Nous pouvons alors écrire

$$< u_i^* , x - x_{j'_1 j'_2 \dots j'_m} > = P_i + \varepsilon_i$$

où P_i est un entier relatif et $|\varepsilon_i| < \frac{1}{k}$.

Alors :

$$< u_i^* , x > \; \geqslant M_i \geqslant \; < u_i^* , x_{j'_1 \dots j'_m} >$$

et par conséquent $P_i + \varepsilon_i \geqslant 0$ et comme $|\varepsilon_i| < \frac{1}{k}$ $P_i \geqslant 0$

Le point $y = x_{j'_1 j'_2 \dots j'_m} + \sum_{i=1}^{m} P_i u_i$ est donc un élément du semi groupe S vérifiant les inégalités :

$$|< u_i^* , x-y >| \; = \varepsilon_i \leqslant \frac{1}{k} < \varepsilon \qquad\qquad i = 1, 2, \dots, m$$

<u>Lemme 5</u>

Soient u_i $(i = 1, 2, \dots, m)$ une base de R^m formée d'éléments du semi-groupe S fermé apériodique et u_o un élément de S. On définit :

$$I = \{i : < u_i^* , u_o > \; < 0\}$$

Alors la conclusion du théorème 3 est vérifiée par tout cône Γ à semelle compacte K contenue dans l'intersection des demi espaces

$$\left[\bigcap_{i \in I} (u_i^* \geqslant 0)\right] \cap \left[\bigcap_{i \notin I} (u_i^* > 0)\right]$$

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$ tel que $]-\varepsilon, \varepsilon[^m$ soit contenu dans V et les nombres M_i définis par le lemme 4. Nous posons

$$\Gamma' = \bigcap_{i=1}^{m} (u_i^* > M_i)$$

Pour tout x_o dans Γ' il existe, par le lemme 4, un y_o dans S tel que pour tout i :

$$|< u_i^* , x_o - y_o >| < \varepsilon.$$

Alors pour tout $x = x_o + n\, u_o$, n entier positif, il existe un élément $y = y_o + n\, u_o$ de S tel que pour tout i

$$|< u_i^* , x-y >| < \varepsilon$$

et donc y est élément de $x + V$ et $(x + V) \cap S$ est non vide.

Définissons alors

$$\alpha_i = \min_{y \in K} \frac{< u_i^* , y >}{\sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} < u_j^*, y >}$$

$$= \min_{\substack{x \in \Gamma \\ x \neq 0}} \frac{< u_i^* , x >}{\sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} < u_j^* , x >}$$

On a $\alpha_i \geqslant 0$ et $\alpha_i > 0$ pour tout $i \notin I$ puisque K ne rencontre pas le plan $u_i^* = 0$.

Nous posons alors

$$K' = \Gamma \cap \left[\bigcap_{n \in N} \bigcup_{i=1}^{m} (u_i^* \leqslant M_i + n < u_i^* , u_o >) \right]$$

tout élément x de K' vérifie donc les inégalités :

$$\begin{cases} \langle u_i^*, x \rangle \geqslant 0 \quad \text{pour tout } i \leqslant m & (1) \\ \langle u_i^*, x \rangle \geqslant \alpha_i \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} \langle u_j^*, x \rangle & (2) \\ \text{Pour tout entier } n, \text{ il existe un indice } i\,(n) \text{ tel que} & \\ \langle u_{i(n)}^*, x \rangle \leqslant M_{i(n)} + n \langle u_{i(n)}^*, u_o \rangle & (3) \end{cases}$$

Or si pour tout n, i (n) appartenait à l'ensemble d'indices I, il existerait un élément i_o de I, valeur d'adhérence de la suite i (n). L'inégalité déduite de (3) :

$$\langle u_{i_o}^*, x \rangle \leqslant M_{i_o} + n \langle u_{i_o}^*, u_o \rangle$$

serait vérifiée pour un ensemble infini d'entiers n, ce qui est impossible puisque $\langle u_{i_o}^*, u_o \rangle < 0$. Il existe donc pour tout x de K' un entier n_o vérifiant l'inégalité (3) et tel que $i\,(n_o)$ ne soit pas élément de I , et donc un plus petit entier n_1 vérifiant l'inégalité (3), tel que $i\,(n_1)$ ne soit pas élément de I. Alors :

$$\sum_{j=1}^{m} |\langle u_j^*, x \rangle| = \sum_{j=1}^{m} \langle u_j^*, x \rangle$$

$$\leqslant \langle u_{i(n_1)}^*, x \rangle \left(1 + \frac{1}{\alpha_{i(n_1)}}\right)$$

$$\leqslant \left(M_{i(n_1)} + n_1 \langle u_{i(n_1)}^*, u_o \rangle\right) \left(1 + \frac{1}{\alpha_{i(n_1)}}\right)$$

L'application $x \to n_1\,(x)$ est bornée sur K' car si

$n > \max\limits_{i \in I} \left\{ - \dfrac{M_i}{\langle u_i^+, u_o \rangle} \right\}$ pour tout indice i de I, on a l'inégalité :

$$M_i + n \langle u_i^*, u_o \rangle < 0 \leqslant \langle u_i^*, x \rangle$$

et donc $n_1\,(x) \leqslant n$

Donc $\sum_{j=1}^{m} |< u_j^* , x >| \leqslant \text{Max } (M_j + n < u_j^* , u_o >) (1 + \frac{1}{\alpha_j})$

où le maximum est pris sur l'ensemble d'indices $\complement I$ et l'ensemble des entiers n inférieurs à $\max_{i \in I} \frac{- M_i}{< u_i^* , u_o >}$

K' est un fermé borné de R^m donc un compact. Si x est élément de $\Gamma \setminus K'$, il existe un entier n tel que pour tout $i \leqslant m$

$$< u_i^* , x > \; > M_i + n < u_i^* , u_o >$$

D'où $x - n\, u_o$ est élément de Γ' et $(x + V) \cap S$ est non vide.

Lemme 6

Soit S un semi groupe, f une forme linéaire non nulle et

$$\sum = (\bigcup_{x \in S} R^+ x) \cap (f = 1)$$

l'adhérence $\overline{\sum}$ de $\sum$ est convexe et le cône de semelle $\overline{\sum}$ est le cône convexe fermé engendré par S.

Démonstration

1°) Si u, v sont éléments de $\sum$, le segment $[u, v]$ est contenu dans $\overline{\sum}$.

En effet, il existe x et y dans S tel que :

$$u = \frac{x}{f(x)} \qquad v = \frac{y}{f(y)}$$

Pour tous entiers k et n , kx + ny est élément de S et donc

$\frac{kx + ny}{k\, f(x) + n\, f(y)}$ est élément de $\sum$.

soit : $\frac{k\, f(x)\, u + n\, f(y)\, v}{k\, f(x) + n\, f(y)}$ est dans $\sum$.

L'ensemble des nombres $\dfrac{k\ f(x)}{k\ f(x) + n\ f(y)}$ est dense dans $[0, 1]$ et donc l'intervalle $[u, v]$ est contenu dans $\overline{\Sigma}$.

2°) Si u et v sont dans $\overline{\Sigma}$, pour tout voisinage V de O convexe, il existe deux points u' et v' dans $\Sigma \cap (u + V)$ et $\Sigma \cap (v + V)$. Pour tout λ $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$, le voisinage $\lambda\ u + (1 - \lambda)\ v + V$ contient le point $\lambda\ u' + (1 - \lambda)\ v'$ qui est dans $\overline{\Sigma}$ par 1°). Le point $\lambda\ u + (1 - \lambda)\ v$ est donc élément de $\overline{\overline{\Sigma}} = \overline{\Sigma}$, et $\overline{\Sigma}$ est convexe.

3°) Puisque le cône C engendré par S contient $\overline{\Sigma}$, son adhérence contient Σ, donc le cône de semelle $\overline{\Sigma}$. Par ailleurs le cône engendré par $\overline{\Sigma}$ est convexe et contient le cône engendré par Σ (donc par S). Comme il est fermé il contient donc le cône convexe fermé engendré par S. Puisque le cône fermé engendré par S est inclus dans le cône convexe fermé engendré par S, ces deux cônes sont donc égaux entre eux et égaux au cône de semelle $\overline{\Sigma}$.

Nous aurons également besoin de décomposer un polytope en une famille de simplexes (non nécessairement disjoints). Un polytope P est un compact convexe ayant un nombre fini de points extrêmaux et nous appelons face de P l'intersection de P avec un hyperplan support. Nous énonçons alors le lemme 7 :

Lemme 7

Soient P un polytope de dimension d et Y l'ensemble de ses sommets. Si a est un point de l'intérieur relatif de P et $\mathcal{Y}$ la famille des ensembles de d sommets d'une même face de P, alors

$$P = \bigcup_{Y' \in \mathcal{Y}} \operatorname{conv}(Y', \{a\})$$

Démonstration

On a trivialement

$$P \supset \bigcup_{Y' \in \mathcal{Y}} \operatorname{conv}(Y', \{a\})$$

Pour tout x de P , $x \neq a$, posons :

$$\lambda_o = \max \{\lambda : a + \lambda (x - a) \in P\}$$

(ce maximum existe car P est borné)

$\lambda_o \geqslant 1$ car x est dans P et $x_1 = a + \lambda_o (x - a)$ est dans P puisque P est fermé. x_1 est donc combinaison convexe d'un sous ensemble X d'au plus d+1 points affinement indépendants de Y . Si X avait d+1 éléments, x_1 appartiendrait à l'intérieur relatif de P_o , ce qui contredit la définition de λ_o . Si Y' est un élément de $\mathcal{Y}$ contenant X , x est élément de conv (Y', {a})

Démonstration du théorème 3

Soit f = 1 l'équation de l'espace affine engendré par K. Tout élément x de K étant élément de l'intérieur $\overset{\circ}{C}$ de C appartient à l'intérieur d'un simplexe à sommets dans $\overline{\Sigma}$ par le lemme 6 et donc est intérieur à un simplexe S_x à sommets dans Σ. Le compact K contenu dans une réunion des intérieurs de ces simplexes est contenu dans une réunion finie de tels simplexes

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{p} \overset{\circ}{S}_{x_i}$$

Soient P le polytope engendré par $\bigcup_{i=1}^{p} \overset{\circ}{S}_{x_i}$, a un point de Σ intérieur à P et $\mathcal{Y}$ la famille des ensembles de m - 1 sommets d'une même face de P.

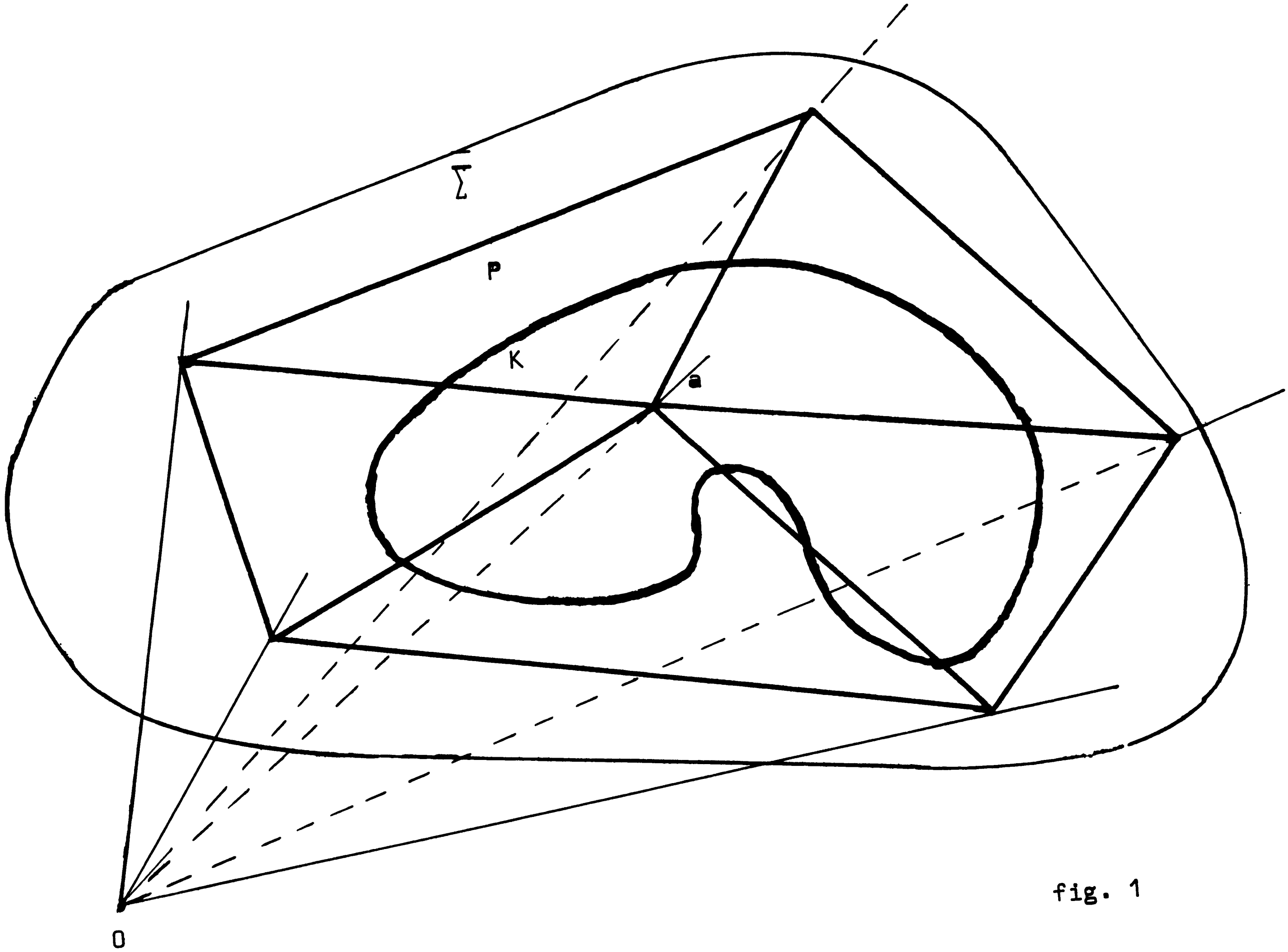

fig. 1

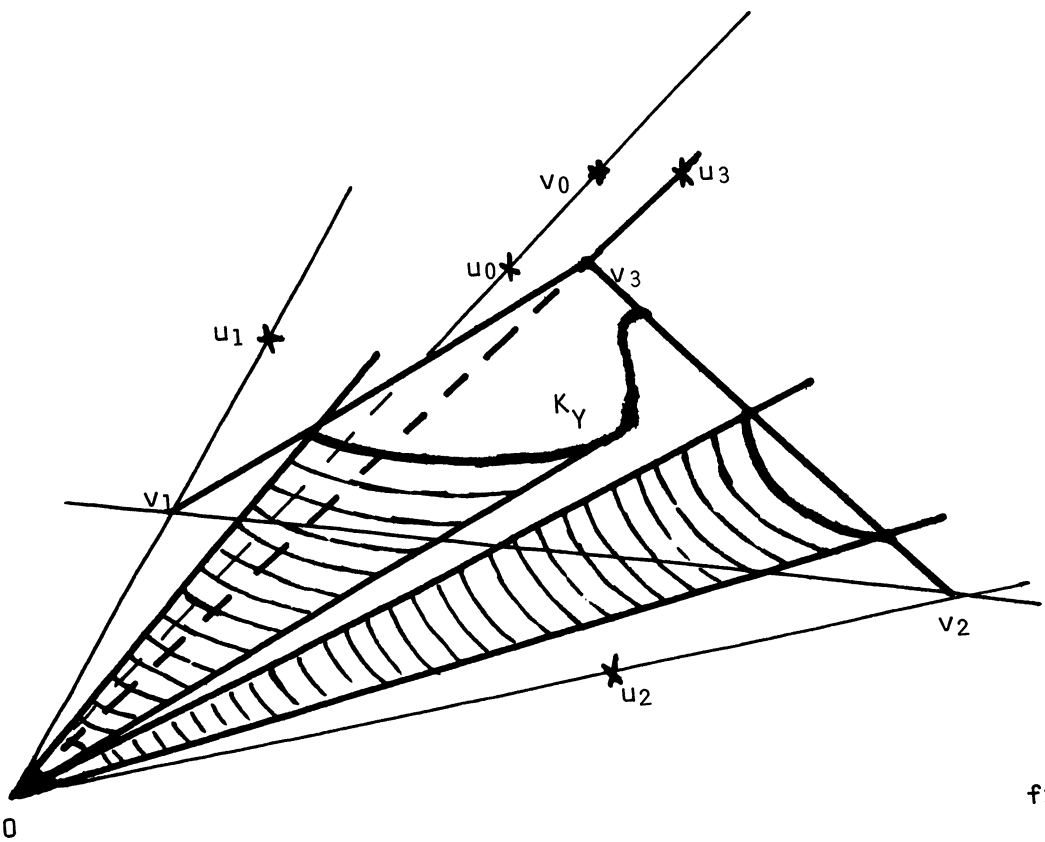

fig. 2

Par le lemme 7

$$P = \bigcup_{Y \in \mathcal{Y}} \text{conv } (Y , \{a\})$$

Posons $K_Y = K \cap \text{conv } (Y , \{a\})$ et soit Γ_Y le cône de semelle K_Y . Le cône Γ_Y est à semelle compacte contenue dans l'intérieur de l'enveloppe convexe de C. De $K \subset P$, on déduit $K = \bigcup_{Y \in \mathcal{Y}} K_Y$ et $\Gamma = \bigcup_{Y \in \mathcal{Y}} \Gamma_Y$. Puisque $\mathcal{Y}$ est un ensemble fini, il suffit de montrer que tous les Γ_Y satisfont les conclusions du théorème 3. Fixons Y et montrons que Γ_Y vérifie les hypothèses du lemme 5. (cf figures 1 et 2)

Tout x de K_Y est intérieur à un simplexe S_{x_i} et à fortiori intérieur au polytope P. Par conséquent $K_Y \cap \text{conv } Y = \emptyset$

Soient v_i^* (i = 1, 2, ... m) les formes linéaires définissant le cône engendré par conv (Y, {a}). Sans perte de généralité, nous supposons que v_i est élément de Y pour $i < m$ et que $V_m = a$.

Alors :

$$\bigcap_{i=1}^{m-1} (v_i^* < 0) \cap \text{int } P$$

est un ouvert (de P) non vide puisque a est dans int P et satisfait $< v_i^* , a > = 0$ pour $i \leqslant m-1$. Il existe donc un élément v_o de $\sum$ vérifiant les inégalités :

$$< v_i^* , v_o > < 0 \qquad\qquad (i \leqslant m-1)$$

De plus $v_m = a$ et v_i est dans Y pour $0 < i < m$. Pour tout $0 \leqslant i \leqslant m$, v_i est dans $\sum$ et il existe un $\lambda_i > 0$ tel que $u_i = \lambda_i v_i$ soit dans S. Le cône Γ_Y est donc contenu dans l'intersection des demi espaces

$$\bigcap_{i=1}^{m-1} (u_i^* \geqslant 0) \cap (u_m^* > 0)$$

et il existe un u_o dans S tel que pour $i < m$

$$< u_i^* , u_o > \; < 0$$

Nous pouvons maintenant aborder l'étude de l'ensemble de première visite d'une promenade aléatoire à un convexe.

Notations et définitions

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et E un espace vectoriel topologique localement convexe réel, C désignera un convexe fermé de E d'intérieur non vide, X_n une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans E et de même répartition μ. Le support $S(\mu)$ de X_n sera supposé apériodique, et engendre un semi groupe fermé S. Si E est de dimension infinie, nous supposerons de plus que l'intérieur de $S(\mu)$ est non vide. Nous définissons la promenade aléatoire :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

et nous posons $T = \inf \{n : S_n \in C\}$

$\sum$ désignera l'ensemble de première visite, c'est-à-dire le support de la variable aléatoire S_T quand $T < +\infty$.

Nous poserons de plus pour tout borélien A contenu dans C

$$\rho_n (A) = P \left[(S_n \in A) \cap \bigcap_{i=1}^{n-1} (S_i \notin C) \right]$$

et pour tout A contenu dans $\complement C$

$$\psi_n (A) = P \left[(S_n \in A) \cap \bigcap_{i=1}^{n-1} (S_i \notin C) \right]$$

Le théorème 4 suivant justifie l'étude de $\sum$.

Théorème 4

Si $S(\mu)$ n'est pas séparable $P(T < +\infty) > 0$

Démonstration

En vertu des corollaires 1 ou 2, le semi-groupe fermé engendré par $S(\mu)$ est E. Puisque l'intérieur $\overset{\circ}{C}$ de C n'est pas vide, il existe des éléments $x_1, x_2 \dots x_p$ de S_μ et des entiers strictement positifs $m_1, m_2 \dots m_p$ tels que la combinaison

$$Z = \sum_{i=1}^{p} m_i x_i$$

soit intérieure à C. Nous posons alors

$$M = \sum_{i=1}^{p} m_i$$

et $y_j = x_i$ pour $\sum_{k=1}^{i-1} m_k < j \leqslant \sum_{k=1}^{i} m_k$.

On obtient alors les inégalités suivantes

$$P\left(\bigcup_n (S_n \in C)\right) \geqslant P(S_M \in C) \geqslant P(S_M \in \overset{\circ}{C})$$

$$\geqslant P\left(\bigcap_{j=1}^{M} \left(X_j \in y_j + \frac{\overset{\circ}{C} - Z}{M}\right)\right)$$

$$\geqslant \prod_{j=1}^{M} \mu\left(y_j + \frac{\overset{\circ}{C} - Z}{M}\right) > 0$$

car $y_j + \dfrac{\overset{\circ}{C} - Z}{M}$ est voisinage de y_j .

Nous définissons d'abord la couronne d'un convexe.

Définition 2

Si C est un convexe fermé de E et μ une probabilité sur E, on appelle couronne de C associée à μ l'adhérence de l'ensemble des points de C somme d'un élément extérieur à C et d'un élément de l'enveloppe convexe de S (μ), c'est-à-dire

$$\overline{\left[\complement C + \text{conv } S(\mu)\right] \cap C}$$

Nous nous proposons d'étudier les conditions sous lesquelles $\sum$ est la couronne de C associée à μ .

<u>Théorème 5</u>

La couronne de C associée à μ est l'adhérence de l'ensemble des points de C somme d'un élément extérieur à C et d'un élément de S (μ), soit :

$$\overline{\left[\complement C + \text{conv } S(\mu)\right] \cap C} = \overline{\left[\complement C + S(\mu)\right] \cap C}$$

<u>Démonstration</u>

On a trivialement l'inclusion :

$$(\complement C + S(\mu)) \cap C \subset \left[\complement C + \text{conv } S(\mu)\right] \cap C$$

Soit z élément de $\left[\complement C + \text{conv } S(\mu)\right] \cap C$. Il existe un t extérieur à C et p éléments x_i de S (μ) tel que :

$$z = t + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$$

les coefficients λ_i étant positifs, de somme 1.

Soit f une forme linéaire continue telle que f (t) > $\beta \geqslant$ f (C). Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que les x_i sont indicés de manière que la suite f (x_i) soit décroissante.

Posons $z - x_p = u$

$$f(u) = f(t) + f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i\right) - f(x_p)$$

$$= f(t) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(x_i - x_p) > \beta$$

C'est dire que u est extérieur à C et que $z = u + x_p$ est élément de

$$[\complement C + S(\mu)] \cap C .$$

Ce théorème est démontré.

Démontrons maintenant un lemme.

<u>Lemme 8</u>

Soit f une forme linéaire continue telle que $f(C) \leqslant \alpha < 0$. Alors pour tout x de S tel que $f(x) > \alpha$ et pour tout voisinage V de x ne rencontrant pas C , il existe un entier n tel que $\psi_n(V) > 0$

<u>Démonstration</u>

Posons $f(x) = \beta$ et soit W un voisinage convexe de O tel que :

$$x + W \subset \left(f > \frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cap V \quad \text{et} \quad W \subset \left(f > \frac{\alpha}{2}\right).$$

Il existe des éléments $x_1, \ldots, x_p$ de S_μ et des entiers strictement positifs $m_1, \ldots, m_p$ tels que $z = \sum_{i=1}^{p} m_i x_i$ soit élément de x + W. Sans perte de généralité, nous pouvons convenir que $f(x_i) \geqslant f(x_{i+1})$. Nous posons

$$\sum_{i=1}^{p} m_i = M$$

$$y_j = x_i \quad \text{pour} \quad \sum_{k=1} m_k < j \leqslant \sum_{k=1} m_k$$

et en plus $W' = (x - z + W) \cap W$.

Pour tout $M' \leqslant M$ et pour tout u élément de $\sum_{j=1}^{M'} (y_j + \frac{W'}{M})$, u est élément de $\sum_{j=1}^{M'} (y_j + \frac{M'\,W'}{M})$.

On a alors $f\left(\frac{M'}{M} W'\right) \subset f(W') \subset f(W)$

et comme $f(x + W) \subset \left]\frac{\alpha + \beta}{2}, +\infty\right)$

$$f(W) \subset \left]\frac{\alpha-\beta}{2}, +\infty\right) \cap \left]\frac{\alpha}{2}, +\infty\right)$$

Donc $f\left(\frac{M'}{M} W\right) \subset \left]\max\left(\frac{\alpha-\beta}{2}, \frac{\alpha}{2}\right), +\infty\right)$

La suite $\sum_{j=1}^{n} f(x_j)$ est d'abord positive, puis le cas échéant négative décroissante, Donc si

$$\sum_{j=1}^{M'} f(y_j) \geqslant 0 \quad \text{alors} \quad f(u) > \frac{\alpha}{2} > \alpha$$

et si $\sum_{j=1}^{M'} f(y_j) < 0$

alors $\sum_{j=1}^{M'} f(y_j) \geqslant \sum_{j=1}^{M} f(y_j) = f(z) > \frac{\alpha+\beta}{2}$

$$\text{D'où } f(u) > \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2} = \alpha$$

Dans tous les cas :

$$f\left(\sum_{j=1}^{M'} (y_j + \frac{W'}{M})\right) \subset \left]\alpha, +\infty\right)$$

Et par conséquent

$$\psi_M(V) \geqslant \psi_M(x + W) \geqslant P\left(\bigcap_{j=1}^{M} (X_j \in y_j + \frac{W'}{M})\right) \geqslant \prod_{j=1}^{M} \mu(y_j + \frac{W'}{M}) > 0$$

car $\frac{W'}{M}$ est un voisinage de 0.

Posons alors la définition suivante :

Définition 3

Une bande de l'espace E est un convexe défini par des inégalités $\alpha \leqslant g \leqslant \beta$ où g est une forme linéaire continue sur E.

Nous obtenons alors deux théorèmes.

Théorème 6

Supposons S (μ) non séparable et 0 extérieur à C. Si C n'est pas une bande de E, l'ensemble de première visite de la promenade aléatoire S_n à C est la couronne de C associée à μ .

Démonstration (cf. figure 3)

Soit x extérieur à C , V un voisinage de x ne rencontrant pas C et W un voisinage convexe de 0 tel que x + W soit contenu dans V.

Soit alors f une forme linéaire continue séparant 0 et C :

$$f\ (C) \leqslant \alpha < 0$$

1°) si f (x) > α , le lemme 8 et les corollaires 1 ou 2 montrent que

ψ_M (V) > 0 pour un certain entier M

2°) Si f (x) $\leqslant \alpha$, soit f_1 une forme linéaire continue séparant x et C :

$$f_1\ (C) \leqslant \beta < f_1\ (x).$$

Nous supposerons d'abord f et f_1 indépendantes et nous choisissons un z vérifiant f (z) > α et f_1 (z) > β . Par le lemme 8, pour tout voisinage convexe de l'origine W' contenu dans $\frac{W}{2}$ et ne rencontrant

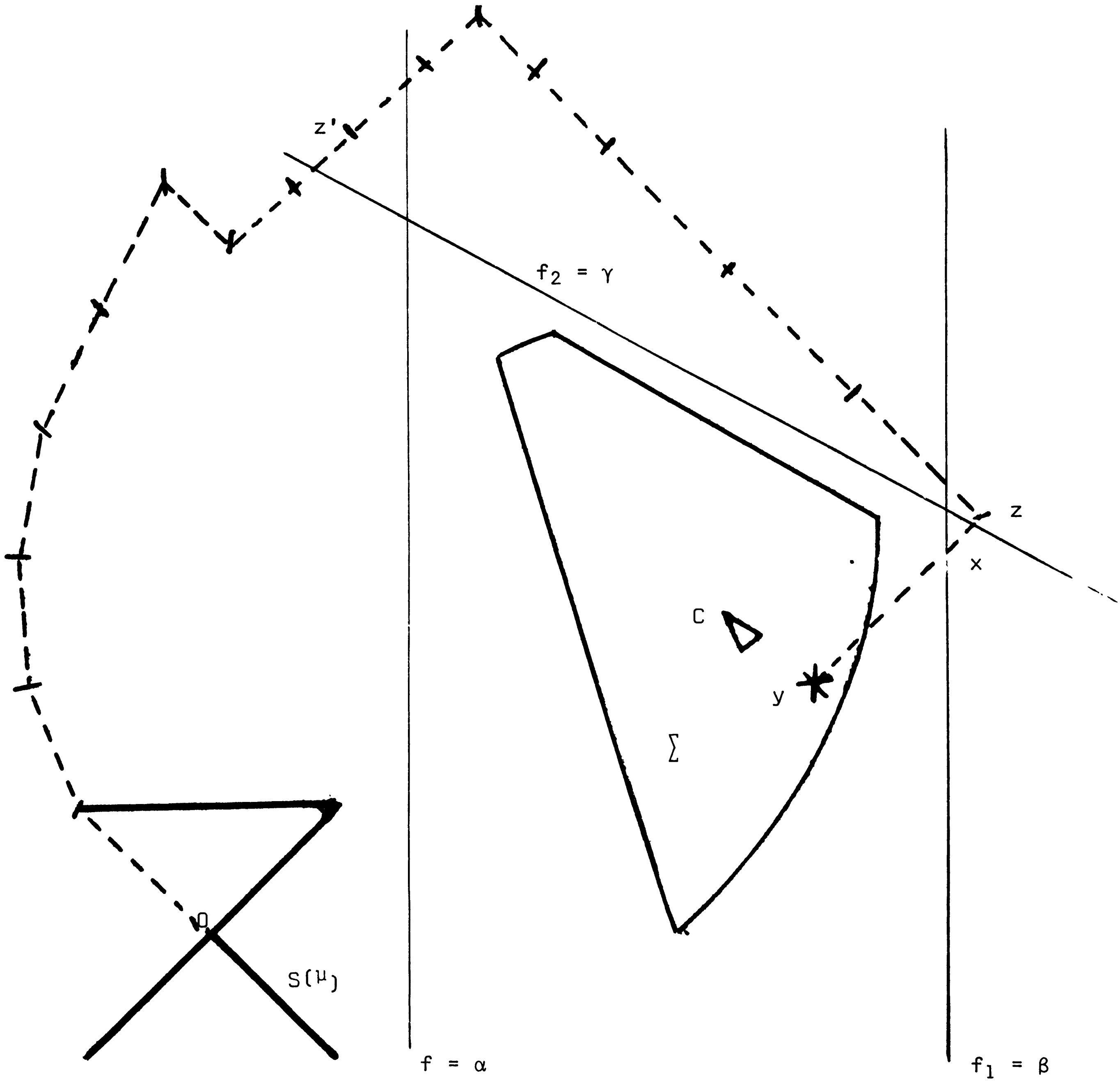

fig. 3

pas C, il existe un entier M tel que ψ_M (z + W') > 0. En appliquant le lemme 8 au convexe $\{f_1 \leq \beta - f_1 (z)\}$ il existe un entier M_1 tel que :

$$P\left[(S_{M_1} \in x - z + W'') \cap \bigcap_{i=1}^{M_1-1} (S_i \notin f_1 \leq \beta - f_1 (z)\right] > 0$$

pour tout W" contenu dans $\frac{W}{2}$ et dans $\{f_1 > \beta - f_1 (x)\}$

D'où :

$$\psi_{M+M'} (V) \geq \psi_{M+M'} (x + W)$$

$$\geq \psi_M (x + W') \, P\left[(S_{M'} \in x - z + W'') \cap \bigcap_{i=1}^{M_1-1} S_i \notin f_1 \leq \beta - f_1 (z)\right]$$

$$> 0$$

3°) Si f et f_1 sont dépendantes, comme C n'est pas une bande, il existe une forme linéaire continue f_2 indépendante de f_1 telle que $f_2(C) \leq \gamma$. Choisissant un z vérifiant $f_2 (z) > \gamma$ et $f_1 (z) > \beta$; pour tout voisinage W' contenu dans $\frac{W}{2}$, il existe un entier M tel que ψ_M (z + W') > 0. En répétant l'argument précédent, il existe alors un entier M_2 tel que $\psi_{M+M_2} (V) > 0$.

En résumé, pour tout x extérieur à C et tout voisinage V de x ne rencontrant pas C , il existe un entier M tel que $\psi_M (V) > 0$.

4°) Soit alors y élément de $\left[\complement C + S (\mu)\right] \cap \overset{\circ}{C}$. Nous posons y = x + t où x est extérieur à C et t élément de S (μ). Pour tout voisinage convexe de O tel que y + W soit contenu dans $\overset{\circ}{C}$, il existe un entier M tel que $\psi_M \left[(x + \frac{W}{2}) \cap \complement C\right] > 0$. Par ailleurs $P (X_{M+1} \in t + \frac{W}{2}) > 0$ et donc :

$$\rho_{M+1}\,(y + W) \geqslant \psi_M \left[(x + \frac{W}{2}) \cap \complement C\right] .\ P\,(X_{M+1} \in t + \frac{W}{2})$$

$$> 0$$

Donc y est élément de $\sum$. Par suite

$$\sum \supset \overline{\left[\complement C + S\,(\mu)\right] \ \cap \ \mathring{C}}$$

5°) Réciproquement, soit y élément de $\sum$. Pour tout voisinage V de y , il existe un entier M tel que ρ_M (V) > 0, et à fortiori :

$$P\ \left[(S_M \in V \cap C) \cap (S_{M-1} \notin C)\right] > 0$$

Donc $V \cap C \ \cap \left[\complement C + S\,(\mu)\right] \ \neq \emptyset$

C'est dire que y est adhérent à $\left[\complement C + S\,(\mu)\right] \cap C$. D'où l'inclusion

$$\overline{\left[\complement C + S\,(\mu)\right] \ \cap \ C} \supset \sum$$

6°) En vertu du théorème 5, il nous suffit de démontrer que

$$\overline{\left[\complement C + S\,(\mu)\right] \ \cap \ C} \ \subset \ \overline{\left[\complement C + S\,(\mu)\right] \ \cap \ \mathring{C}}$$

Si u est adhérent à $\left[\complement C + S\,(\mu)\right] \ \cap \ C$, pour tout voisinage ouvert V de u, on a :

$$V \cap \left[\complement C + S\,(\mu)\right] \ \cap \ C \neq \emptyset$$

$V \ \cap \ \left[\complement C + S\,(\mu)\right]$ est un ouvert rencontrant $C = \overline{\mathring{C}}$, et donc :

$$V \cap \left[\complement C + S\,(\mu)\right] \ \cap \mathring{C} \neq \emptyset$$

Donc u est élément de $\overline{\left[\complement C + S\,(\mu)\right] \ \cap \ \mathring{C}}$

<u>Théorème 7</u>

Soit C la bande $\{\alpha \leqslant g \leqslant \beta\}$. Si S (μ) est non séparable et $\beta <\ 0$, alors

$$\sum = \max\,(\alpha,\ \beta + \lambda) \leqslant g \leqslant \beta\}$$

où on a posé :

$\lambda = \inf g(S(\mu))$

Démonstration

Pour tout x tel que $g(x) > \beta$ et tout voisinage V de x contenu dans $\{g > \beta\}$ il existe, par le lemme 8, un entier M tel que $\psi_M(V) > 0$. Répétant alors le raisonnement écrit au théorème 6, 4°), on obtient :

$$\sum \supset \overline{((g > \beta) + S(\mu)) \cap \overset{\circ}{C}}$$

c'est-à-dire : $\sum \supset \{\max(\alpha, \beta + \lambda) \leqslant g \leqslant \beta\}$

Si $\lambda \leqslant \alpha - \beta$, on a donc $\sum \supset C$ et donc $\sum = C$

Si $\lambda > \alpha - \beta$, pour tout z tel que $g(z) < \alpha$, tout voisinage V de z contenu dans $\{g < \alpha\}$ et tout ω tel que $S_n(\omega)$ soit dans V, l'inégalité $g \circ S_{i+1}(\omega) - g \circ S_i(\omega) \leqslant \lambda$ implique l'existence d'un indice i tel que :

$$\alpha \leqslant g \circ S_i(\omega) \leqslant \beta$$

et donc $\psi_n(V) = 0$.

Soit alors y dans $\sum$. Pour tout voisinage V de y, il existe un entier M tel que $\rho_M(V) > 0$ et donc :

$$P\left((S_M \in V \cap C) \cap \bigcap_{i=1}^{M-1} (S_i \notin C)\right) > 0$$

D'où : $P(S_M \in V \cap C) \cap (g \circ S_{M-1} > \beta) > 0$

Donc $\underline{V \cap C \cap \left[\{g > \beta\} + S(\mu)\right]} \neq \emptyset$ et z est élément de $\left[\{g > \beta\} + S(\mu)\right] \cap C$, c'est-à-dire de $\{\beta + \lambda \leqslant g \leqslant \beta\}$ et donc $\sum \subset \{\beta + \lambda \leqslant g \leqslant \beta\}$

Il est facile de voir que les théorèmes 6 et 7 sont faux lorsque $S(\mu)$ est séparable. Par exemple si $S_\mu = \{(1, 0), (\sqrt{2}, 0), (0, 1), (0, \sqrt{2})$ l'ensemble de première visite à toute bande $\{\alpha \leqslant x + y \leqslant \beta\}$ est fini.

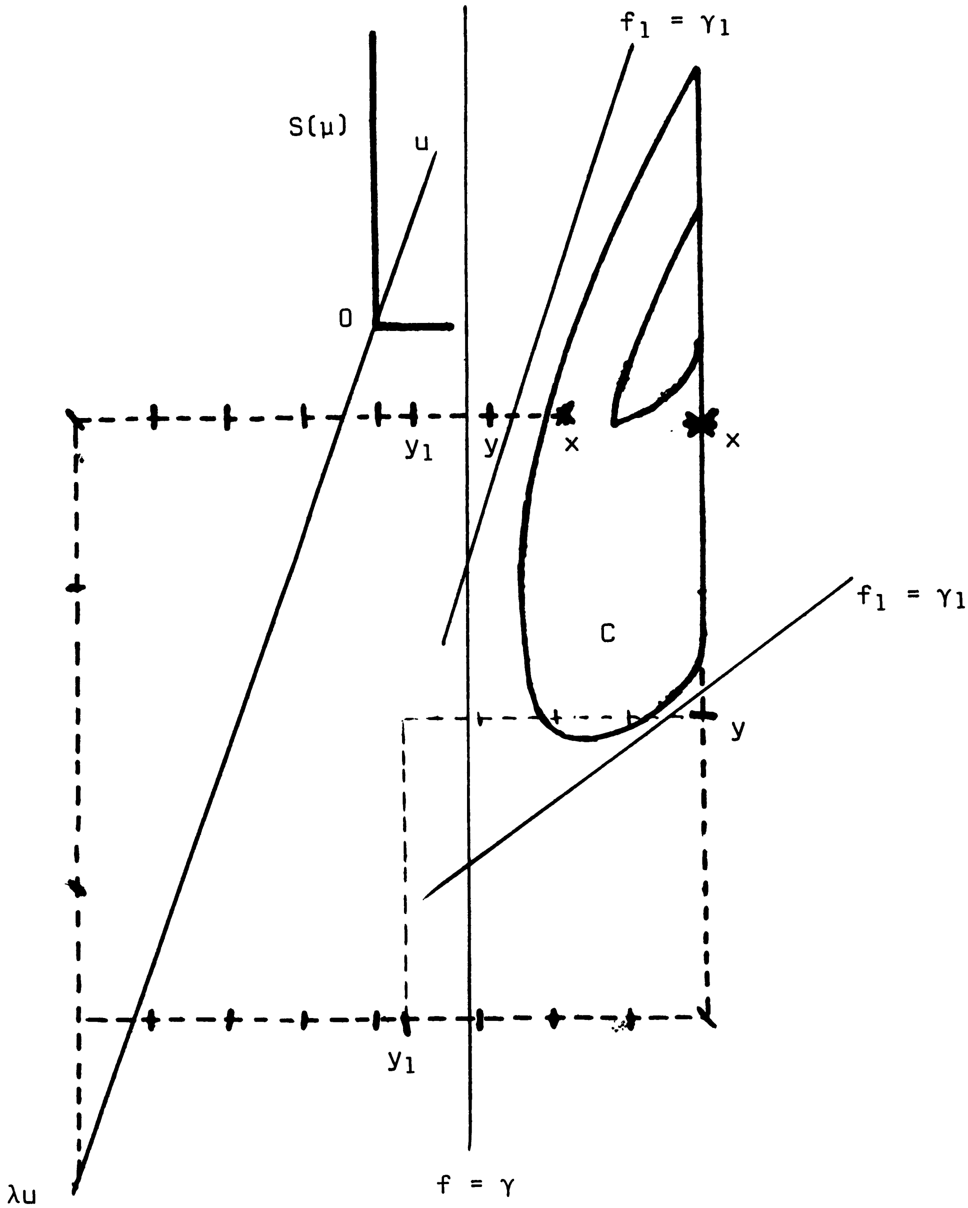

fig. 4

Cependant le théorème 3 nous permet d'établir les résultats suivants.

Théorème 8

Soit f une forme linéaire de R^m telle que $f(S(\mu)) \leqslant 0$ et $\sum_a$ l'ensemble de première visite de la promenade aléatoire $S_n + a$ au convexe C. Si C n'est pas une bande et si C est contenu dans un demi-espace $(f \leqslant \gamma)$, pour tout x de la couronne de C associée à μ et tout voisinage V de x , pour tout u intérieur au cône convexe engendré par $S(\mu)$ il existe un nombre $M \leqslant 0$ tel que $\lambda \leqslant M$ implique $V \cap \sum_{\lambda u} \neq \emptyset$

Démonstration (cf. figure 4)

Il suffit de démontrer le théorème pour x élément de $\left[\complement C + \operatorname{conv} S(\mu)\right] \cap C$ car si x' est adhérent à cet ensemble, tout voisinage V' de x' contient un voisinage ouvert V qui sera lui-même voisinage d'un point x élément de $\left[\complement C + \operatorname{conv} S(\mu)\right] \cap C$.

Par le théorème 5, x est somme d'un élément y extérieur à C et d'un élément t de $S(\mu)$

1°) Si $f(t) < 0$ il existe un entier q tel que $f(x) - q\,f(t) < \gamma$.
Posons $y_1 = x - q\,t$. Il existe une forme linéaire f_1 telle que $f_1(y) > \gamma_1 \geqslant f_1(C)$. Soit V' un voisinage ouvert de x convexe contenu dans V et W défini par :

$$x + W = V' \cap \{f_1 > \gamma_1' + f_1(x - y)\}$$

W est voisinage ouvert convexe de 0 et pour tout q' entier non nul

$$f_1 (W + x - q' t) > \gamma_1 + f_1 (x - y) - q f_1 (x - y)$$
$$> \gamma_1 - (q - 1) f_1 (x - y)$$
$$> \gamma_1$$

Par conséquent $(W + x - q' t) \cap C = \emptyset$

Soit alors W' un voisinage convexe de 0 tel que

$$y_1 + W' \subset (y_1 + W) \cap (f > \gamma)$$

Nous choisissons Γ cône à semelle compacte contenue dans le cône engendré par S (μ) et ayant u en son intérieur.

Il existe un nombre $M_1 \geqslant 0$ tel que $\lambda \geqslant M_1$ implique que $y_1 + \lambda u$ soit élément de Γ' et par le théorème 3 un nombre $M_2 \geqslant M_1$ tel que $\lambda \geqslant M_2$ implique en plus

$$(y_1 + \lambda u + \frac{W'}{q+1}) \cap S \neq \emptyset$$

ou $$(y_1 + \frac{W'}{q+1}) \cap (S - \lambda u) \neq 0$$

Soit y_2 un élément de ce dernier ensemble. Le lemme 8 montre que $\psi_n (y_1 + \frac{W'}{q+1}) > 0$ pour un entier n. On a alors

$$\rho_{n+q} (y_1 + qt + W') \geqslant \psi_n (y_1 + \frac{W'}{q+1}) \prod_{i=1}^{q} (X_{n+i} \in \frac{W'+t}{q+1})$$
$$> 0$$

et $y_1 + q_t$ est élément de $\sum_{\lambda u}$.

2°) Si f (t) = 0 il existe un v dans S (μ) tel que f (v) < 0 car S_μ est apériodique. Soit f_1 une forme linéaire séparant C et y = x - t

$$f_1 (y) > \gamma_1 \geqslant f_1 (C)$$

Il existe un entier q tel que f (x - qv) > γ et un entier q_1 tel que

$$f_1\ (x - qv - q_1\ t) > \gamma_1$$

puisque $f_1\ (t) < 0$.

Soit alors V' un voisinage ouvert convexe de x contenu dans V et W défini par

$$x + W = V' \cap \{f_1 > \gamma_1 + f_1\ (x - y)\} \cap \{f > \gamma\ + f\ (qv)\}$$

On a encore pour tout q' entier naturel strictement positif inférieur à q_1

$$f_1\ (W + x - q'\ t) > \gamma_1$$

et en plus pour tout q' entier naturel inférieur à q

$$f_1\ (W + x - q_1\ t - q'\ v) > \gamma_1$$

puisque : $f_1\ (W + x - q_1\ t) > \gamma_1$

et que : $f_1\ (W + x - q_1\ t - qv) > f_1\ (W) + \gamma_1$

$$> 2\ \gamma_1 - f_1\ (y) > \gamma_1$$

Par ailleurs

$$f\ (W + x - q_1\ t - qv) > \gamma$$

En posant $y_1 = x - q_1\ t - qv$ et en définissant Γ et M comme au 1°), il existe un entier n tel que

$$\psi_n\ (y_1 + \frac{W}{q_1 + q + 1}) > 0 \quad \text{si} \quad \lambda \leqslant - M$$

On a alors $\rho_{n+q+q_1}\ (y_1 + q_1\ t + qv + W)$

$$\geqslant \psi_n\ (y_1 + \frac{W}{q_1+q+1}) \prod_{i=1}^{q_1} (X_{n+i} \in t + \frac{W}{q_1+q+1}) \prod_{i=1}^{q} (X_{n+q_1+i} \in v + \frac{W}{q_1+q+1}) > 0$$

pour $\lambda \leqslant - M$.

Théorème 9

Soit g une forme linéaire sur R^m et $\sum_a$ l'ensemble de première visite de la promenade aléatoire $S_n + a$ à la bande $\{\alpha \leqslant g \leqslant \beta\}$ où $0 > \beta$. Si $\lambda = \inf g(S) < 0$, pour tout x élément de la bande $\max(\alpha, \beta+\lambda) \leqslant g \leqslant \beta\}$ et tout voisinage V de x, pour tout u intérieur au cône engendré par $S(\mu)$ et vérifiant $g(u) < 0$, il existe un nombre M tel que $\lambda \leqslant M$ implique $V \cap \sum_{\lambda u} \neq \emptyset$.

Démonstration

Il suffit de démontrer le théorème pour x élément de la bande $\max(\alpha, \beta + \lambda) \leqslant g \leqslant \beta\}$. Il existe alors un y vérifiant $g(y) > \beta$, et un t élément de $S(\mu)$ tel que $y + t = x$. Soit W un voisinage convexe de 0 tel que $x + W$ soit contenu dans $V \cap \{g < \beta\}$ et W' un voisinage convexe de 0 contenu dans $W \cap \{g > \beta - g(y)\}$. Définissant alors Γ et M comme au théorème 8, 1°) il existe un entier n tel que

$\psi_n (y + \frac{W'}{2}) > 0$ si $\lambda < - M$.

Alors

$$\begin{aligned}\rho_{n+1}(V) &> \rho_{n+1}(y + t + W) \\ &> \psi_n (y + \frac{W'}{2}) \, P(X_{n+1} \in t + \frac{W}{2}) > 0\end{aligned}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] EDWARDS R.E.
Functional Analysis, theory and applications
(Holt, Rinehart and Winston) (1965)

[2] FELLER W.
An introduction to probability theory and applications, vol II
(Wiley) (1966)