ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

C. PICAVET

Sur une généralisation de la notion de spectre d'anneau

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 44, série *Mathématiques*, n° 7 (1970), p. 81-101

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1970__44_7_81_0>

SUR UNE GÉNÉRALISATION DE LA NOTION DE SPECTRE D'ANNEAU

C. PICAVET

(Département de Mathématiques, Faculté des Sciences de Clermont)

Le travail qui suit a pour but de généraliser la notion de Spectre d'un anneau : on munit l'ensemble des idéaux propres d'un anneau d'une topologie à la Zariski, induisant sur le Spectre la topologie usuelle. On étudie ensuite comment se comportent les homomorphismes d'anneaux par rapport à cette topologie.

Dans ce qui suit les anneaux seront toujours des anneaux commutatifs unitaires, les homomorphismes d'anneaux conserveront toujours l'unité. On désigne par Ann la catégorie des anneaux unitaires. Pour éviter des répétitions fastidieuses, on écrira : φ est un élément de Hom(A , A′) pour exprimer que A et A′ sont des anneaux et que φ est un homomorphisme d'anneaux de source A et de but A′.

On adopte les conventions d'écriture suivantes : Spec(A) désigne l'ensemble des idéaux premiers de A, muni ou non de sa topologie ; Max(A) désigne l'ensemble des idéaux maximaux de l'anneau A ; Min(A) désigne l'ensemble des idéaux minimaux de l'anneau A ; l'ensemble des unités d'un anneau A sera noté par U(A). On désignera par Nil(A) l'ensemble des éléments nilpotents d'un anneau A. Enfin on notera suivant les cas l'anneau des fractions d'un A-module M par rapport à une partie multiplicative S de A par $S^{-1}M$ ou par M_S.

Les paragraphes I et II concernent des notions et des résultats plus ou moins connus. Pour la clarté de l'exposé il est nécessaire de les exprimer sous une forme adaptée à notre sujet.

I. ETUDE DE CERTAINES PARTIES MULTIPLICATIVES D'UN ANNEAU

DEFINITION 1.– Soient A un anneau et I un idéal de A. Un élément x de A est dit premier avec I s'il satisfait : $I : x = I$.

Il est équivalent de dire que x est premier avec I ou de dire que l'image canonique de x dans A/I est un élément régulier.

DEFINITION 2.– Soient A un anneau et I un idéal propre de A. L'ensemble des éléments de A premiers avec I est une partie multiplicative de A, saturée, non vide et distincte de A. On dénote cette partie par $\Lambda(I)$. Les définitions qui précèdent proviennent de [1] page 9 ou de [2] tome I page 223.

DEFINITION 3.– Soient A un anneau et I un idéal propre de A. On désigne par $\omega(I)$, (resp. $\omega'(I)$), l'ensemble des idéaux maximaux dans l'ensemble des idéaux de A disjoints de $\Lambda(I)$, (resp. disjoints de $\Lambda(I)$ et contenant I).

(Manuscrit reçu le 28 avril 1969).

L'idée de rechercher une topologie sur l'ensemble des idéaux propres d'un anneau m'a été donnée par M. P. Samuel. Qu'il trouve ici mes remerciements pour tous les conseils qu'il a bien voulu me donner.

Les ensembles $\omega(I)$ et $\omega'(I)$ ne sont pas vides puisque $I \cap \Lambda(I)$ est vide. On sait que les éléments de $\omega(I)$ et de $\omega'(I)$ sont des idéaux premiers de A.

PROPOSITION 1.– *Soient* A *un anneau et* I *un idéal propre de* A. *Alors* :

$$A - \Lambda(I) = \bigcup_{\mathfrak{p} \in \omega(I)} \mathfrak{p} \quad \text{et} \quad A - \Lambda(I) = \bigcup_{\mathfrak{p} \in \omega'(I)} \mathfrak{p}$$

Preuve : La première égalité est bien connue pour une partie multiplicative saturée. La deuxième se démontre facilement, par exemple en utilisant les résultats de [1] lemme 1.13.

PROPOSITION 2.– *Soient* A *un anneau et* I *un idéal propre de* A. *Soit* $\mathfrak{M}(I)$ *la famille des idéaux minimaux dans l'ensemble des idéaux premiers contenant* I. *Alors* :

$$\Lambda(I) \subset \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathfrak{M}(I)} (A - \mathfrak{p}) \subset \Lambda(\sqrt{I}) \subset A - \sqrt{I}$$

Preuve : La première inclusion se démontre en utilisant l'anneau A/I. Il est clair que si $\mathfrak{p}$ est un élément de $\mathfrak{M}(I)$ l'idéal $\mathfrak{p}/I$ de A/I est un idéal premier minimal. Ses éléments sont donc des diviseurs de zéro. Soit x un élément de $\cap (A - \mathfrak{p})$, alors pour tout élément $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{M}(I)$ on a $\mathfrak{p} : x = \mathfrak{p}$ et par suite $\sqrt{I} : x = \sqrt{I}$.

COROLLAIRE 1.– *Soient* A *un anneau et* I *un idéal propre de* A. *Alors* :

$$\Lambda(\sqrt{I}) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathfrak{M}(I)} (A - \mathfrak{p})$$

COROLLAIRE 2.– *Soient* A *un anneau et une famille* $(\mathfrak{a}_\eta)_{\eta \in N}$ *finie d'idéaux* $\mathfrak{p}$*-primaires de* A. *Alors* :

$$\Lambda(\cap\, \mathfrak{a}_\eta) = A - \mathfrak{p}.$$

DEFINITION 4.– Soit M un module sur un anneau A. On dit que l'idéal premier $\mathfrak{p}$ de A est faiblement associé au A-module M s'il existe un élément x de M tel que $\mathfrak{p}$ soit un idéal minimal dans l'ensemble des idéaux premiers de A contenant l'annulateur sur A de x.

On désigne par $\mathrm{Assf}_A(M)$ l'ensemble des idéaux premiers faiblement associés à M. Cette notion provient de [4] Ch. IV, Par. 1, exercice 17.

PROPOSITION 3.– *Soient* A *un anneau et* I *un idéal propre de* A. *Alors* $A - \Lambda(I)$ *est égal à la réunion des éléments de* $\mathrm{Assf}_A(A/I)$ *et* $\sqrt{I}$ *est égal à leur intersection.*

Preuve : On a les résultats suivants pour un élément a de A :

1/ Une condition nécessaire et suffisante pour que l'homothétie de rapport a dans A/I soit injective est que a ne soit contenu par aucun élément de $\mathrm{Assf}_A(A/I)$.

2/ Une condition nécessaire et suffisante pour que l'homothétie de rapport a dans A/I soit ponctuellement nilpotente est que a appartienne à tous les éléments de $\mathrm{Assf}_A(A/I)$.

COROLLAIRE 1.– *Soient* A *un anneau et* I *un idéal propre de* A. *Soit* x *un élément de* A. *Les assertions suivantes sont équivalentes* :

a) *Il existe un élément* $\mathfrak{p}$ *de* $\mathrm{Assf}_A(A/I)$ *tel que* x *appartienne à* $\mathfrak{p}$.

b) *Il existe un élément* y *de* A - I *tel que* xy *appartienne à* I.

COROLLAIRE 2.– *Soient* A *un anneau et* I *un idéal propre de* A. *Soit* J *un idéal de* A. *Alors* :

a) $I : J \neq I$ *entraine* $J \subset A - \Lambda(I)$.

b) *Si l'anneau* A *est noethérien,* $I : J \neq I$ *équivaut à* $J \subset A - \Lambda(I)$.

Depuis la rédaction de cet article, la notion d'idéaux faiblement associés a été exposée dans l'article suivant : Idéaux faiblement associés par Jean MERKER *Bull. Sc. math.* 2e série, 93, 1969, p. 15 à 21.

Preuve : L'assertion a) est conséquence immédiate du corollaire 1. On sait d'autre part que lorsque l'anneau A est noethérien on a : $\mathrm{Assf}_A(A/I) = \mathrm{Ass}_A(A/I)$. Alors b) résulte de [2] Ch. I, page 214. On trouvera la définition de Ass dans [4] Ch. IV.

COROLLAIRE 3.– *Soient* A *un anneau et* I *un idéal propre de* A *ayant une décomposition primaire, finie et irrédondante* : $I = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i$ *où* $\mathfrak{q}_i$ *désigne un idéal* $\mathfrak{p}_i$*-primaire. Alors* :

$$\Lambda(I) = \bigcap_{i=1}^{n} (A - \mathfrak{p}_i)$$

Preuve : Dans la situation des hypothèses du corollaire $\mathrm{Assf}_A(A/I)$ est composé des idéaux premiers $\mathfrak{p}_i$.

PROPOSITION 4.– *Soient* A *un anneau et* I *un idéal propre de* A. *Soit* x *un élément de* A.

1/ $x \in \Lambda(I)$ *entraine* : $I . x = I \cap Ax$. *La réciproque est vraie si l'anneau* A *est intègre.*

2/ *Soit* A *un anneau principal. Soit* a *un élément de* A. *Alors* $\Lambda(a)$ *est l'ensemble des éléments* x *de* A *tels qu'un* p.g.c.d. *de* x *et* a *soit* 1. *De plus soit* $a = \prod_{i=1}^{n} a_i^{\alpha_i}$ *une décomposition de* a *en éléments extrémaux, alors* $\Lambda(a)$ *est encore égal à l'ensemble* $\bigcap_{i=1}^{n} (A - (a_i))$.

Preuve : Pour démontrer 1/ on utilise la relation : $(I : x) . x = I \cap Ax$. D'autre part un anneau principal est intègre et factoriel. Il résulte de 1/ que "x appartient à $\Lambda(a)$" équivaut à $(a)(x) = (a) \cap (x)$. On en déduit la première assertion de 2. La deuxième résulte de ce que $(a) = \bigcap_{i=1}^{n} (a_i)^{\alpha_i}$ est une décomposition primaire irrédondante.

II. IDEAUX PRIMAUX DANS UN ANNEAU

On a vu dans le paragraphe précédent que, pour I idéal propre de A, l'ensemble $A - \Lambda(I)$ est une réunion d'idéaux propres et premiers de A. $A - \Lambda(I)$ se comporte donc à peu près comme un idéal premier : $A - \Lambda(I)$ est stable par multiplication par un élément de A, d'autre part $x y \in A - \Lambda(I)$ entraine x ou y est dans $A - \Lambda(I)$.

On peut alors se demander dans quel cas $A - \Lambda(I)$ est stable par addition. Si on suppose qu'il en est ainsi, les remarques précédentes montrent que $A - \Lambda(I)$ est un idéal premier et $(A - \Lambda(I))/I$ est un idéal premier de A/I formé par l'ensemble des éléments non réguliers de A/I. Or [4] Ch IV, Par. 2 exercice 33 :

DEFINITION 1.– Soient A un anneau et I un idéal de A. L'idéal I est dit primal si dans A/I l'ensemble des éléments non réguliers est un idéal $\mathfrak{p}/I$. Il est alors évident que $\mathfrak{p}$ est un idéal premier.

COROLLAIRE.– *Soit* A *un anneau. Les assertions suivantes sont équivalentes* :

a) I *est un idéal primal de* A

b) $A - \Lambda(I)$ *est un idéal premier de* A

c) $A - \Lambda(I)$ *est stable par addition*

[4] montre que tout idéal premier, primaire, tout idéal inter-irréductible est primal. On a le résultat suivant : soit I un idéal propre de A tel que l'ensemble des idéaux J satisfaisant $I : J \neq I$ ait un plus grand élément, alors I est un idéal primal. La réciproque est vraie dans le cas où A est un anneau noethérien. De plus dans ce cas $A - \Lambda(I)$ est le plus grand élément de $\mathrm{Assf}_A(A/I)$.

Un anneau dans lequel les idéaux sont totalement ordonnés par inclusion a tous ses idéaux primaux : par exemple un anneau de valuation.

On verra au paragraphe 8 que tout v-idéal (au sens de [2] Ch. II appendice 2) est primal.

III. CONSTRUCTION D'UNE TOPOLOGIE A LA ZARISKI SUR L'ENSEMBLE DES IDEAUX PROPRES D'UN ANNEAU

On définit dans [3] Ch II la notion de support d'un A-module M : Supp(M) est l'ensemble des éléments $\mathfrak{p}$ de Spec(A) tels que $M_{\mathfrak{p}} \neq 0$. On définit aussi dans Spec(A) une topologie dite à la Zariski dont les fermés sont les ensembles V(I) : I désigne un idéal de l'anneau A et V(I) est l'ensemble des éléments de Spec(A) contenant I. On démontre que V(I) = Supp(A/I). On désignera par $\mathfrak{I}(A)$ ou par $\mathfrak{I}$ l'ensemble des idéaux propres d'un anneau A.

DEFINITION 1.– Soit M un A-module. On appelle support généralisé de M l'ensemble des éléments I de $\mathfrak{I}(A)$ tels que $M \otimes_A A_{\Lambda(I)} \neq 0$. On désignera par S(M) cet ensemble. On définit dans $\mathfrak{I}$ l'ensemble W(I) où I est idéal quelconque de A comme étant S(A/I).

REMARQUE.– Il est clair que $S(M) \cap \mathrm{Spec}(A) = \mathrm{Supp}(M)$.

Explicitons W(I)

W(I) est l'ensemble des éléments J de $\mathfrak{I}(A)$ tels que $\Lambda(J)^{-1}\, A/I \neq 0$. Or A/I est un A-module de type fini et par suite $\Lambda(J)^{-1}\, A/I = 0$ équivaut donc à l'existence d'un élément t de $\Lambda(J)$ tel que $t.A/I = 0$. On en déduit que :

$$W(I) = \{J \in \mathfrak{I}(A) / I \subset A - \Lambda(J)\}$$

De plus lorsque A est un anneau noethérien on voit que (cf. paragraphe I, prop. 3, cor. 2)

$$W(I) = \{J \in \mathfrak{I}(A) / \mathfrak{I} \neq \mathfrak{I} : I\}$$

Proposition 1 : Soit A *un anneau et* I *un idéal de* A. *Alors*

$$W(I) = \bigcup_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Assf}_A(A/I)} W(\mathfrak{p})$$

Preuve : Elle résulte du fait que W(I) = S(A/I) et du lemme suivant.

LEMME.– *Soit* M *un* A-*module. Les assertions suivantes sont équivalentes pour* J *élément de* $\mathfrak{I}(A)$:

a) *Il existe* $\mathfrak{p}$ *élément de* $\mathrm{Assf}_A(M)$ *tel que* $\Lambda(J) \subset \Lambda(\mathfrak{p})$

b) J *appartient à* S(M).

Preuve : On sait que (cf. les références sur les idéaux faiblement associés) si L est un A-module, $\mathrm{Assf}_A(L) \neq \emptyset$ équivaut à $L \neq O$. D'autre part si S est une partie multiplicative de A et Φ l'ensemble des idéaux premiers de A qui ne rencontrent pas S, on a l'égalité : $\mathrm{Assf}_{S^{-1}A}(S^{-1}M) = \mathrm{Assf}_A(M) \cap \Phi$.

PROPRIETES DE W(I)

On énumère ici un certain nombre de propriétés de W qui sont, on s'en doute, les propriétés des fermés de la topologie de Spec(A). Les preuves sont à peu près évidentes.

1/ Pour toute famille $\{I_\rho\}_{\rho \in R}$ d'idéaux de A, on a $W(\cup I_\rho) = \cap W(I_\rho)$

2/ Pour tout I idéal de A, on a : $W(I) = W(\sqrt{I})$

3/ Pour tout I et J idéaux de A, on a : $W(I \cap J) = W(I) \cup W(J) = W(I\,.\,J)$

4/ L'application W est une application de l'ensemble des parties de A dans l'ensemble des parties de $\mathfrak{I}(A)$ qui est décroissante pour les relations d'inclusion des deux ensembles précédents.

5/ Pour tout I idéal de A on a : $W(I) = \bigcap_{f \in I} W(Af)$

6/ Pour toute famille $\{I_\rho\}_{\rho \in R}$ d'idéaux de A on a : $W(\Sigma I_\rho) \subset \cap W(I_\rho)$. Cette relation appelle une remarque : l'égalité n'est pas vraie en général. En effet $A - \Lambda(I)$ n'est pas stable en général pour l'addition.

7/ Soit M une partie de A. On définit W(M) comme étant l'ensemble des éléments I de $\mathcal{I}$ tels que $M \subset A - \Lambda(I)$. Pour tout f élément de A on notera $W(\{f\})$ par W(f).

8/ Pour tout f élément de A, on a : $W(Af) = W(f)$ et $W(M) = \bigcap_{f \in M} W(f)$.

9/ $W(1) = \emptyset$ et $W(0) = \mathcal{I}(A)$.

CONCLUSION.– Malgré 6/ les numéros de 1/ à 9/ permettent de définir sur $\mathcal{I}$ une topologie à la Zariski. Pour cela on définit les ensembles fermés de la topologie sur $\mathcal{I}(A)$ comme étant les ensembles W(M) où M désigne une partie de A. On peut prendre aussi les ensembles suivants : $\bigcap_{\rho \in R} W(f_\rho)$ où f_ρ est un élément de A, ce qui revient au même. Il est clair que $W(M) \cup W(M')$ est de la forme $W(M'')$.

REMARQUE.– On a évidemment $W(M) \cap \mathrm{Spec}(A) = V(M)$. Par suite la topologie induite sur Spec(A) par celle de $\mathcal{I}(A)$ est la topologie usuelle.

DEFINITION 2.– Soit A un anneau. On définit dans $\mathcal{I}(A)$ les ensembles Y_f de la manière suivante : ce sont les complémentaires dans $\mathcal{I}(A)$ des ensembles W(f).

Les ensembles Y_f forment une base d'ouverts de la topologie de $\mathcal{I}(A)$. Y_f est l'ensemble des éléments I de $\mathcal{I}(A)$ tels que : $f \in \Lambda(I)$. On a les propriétés évidentes :

a) $Y_0 = \emptyset$ et $Y_1 = \mathcal{I}(A)$

b) Pour tout f et g éléments de A on a : $Y_{fg} = Y_f \cap Y_g$

c) Pour f élément de A, $Y_f = \mathcal{I}$ équivaut à : $f \in U(A)$ (ensemble des unités de A).

DEFINITION 3.– Soient A un anneau et $\mathcal{Y}$ une partie de $\mathcal{I}(A)$. On définit $\mathcal{R}$ application des parties de $\mathcal{I}(A)$ dans l'ensemble des parties de A par

$$\mathcal{R}(\mathcal{Y}) = \bigcap_{I \in \mathcal{Y}} (A - \Lambda(I)).$$

$\mathcal{R}(\mathcal{Y})$ n'est pas en général un idéal premier de A. L'application $\mathcal{R}$ est décroissante pour les relations d'inclusion convenables. Il est clair que $\mathcal{R}(\emptyset) = A$ et que $\mathcal{R}(\cup \mathcal{Y}_\rho) = \cap \mathcal{R}(\mathcal{Y}_\rho)$ où $\{\mathcal{Y}_\rho\}_{\rho \in R}$ est une famille de parties de $\mathcal{I}(A)$.

On remarquera que $\mathcal{R}$ prolonge à $\mathcal{I}(A)$ l'application $\mathfrak{I}$ de [3], Ch. II, paragraphe 4.

PROPOSITION 2.– *Soient* A *un anneau et* $\mathcal{I}(A)$ *l'espace topologique associé. Pour tout* I *idéal de* A *on a* $\mathcal{R}(W(I)) = \sqrt{I}$ *et pour toute partie* $\mathcal{Y}$ *de* $\mathcal{I}(A)$ *on a* $W(\mathcal{R}(\mathcal{Y}))$ *égal à l'adhérence dans* $\mathcal{I}(A)$ *de* $\mathcal{Y}$.

Preuve : C'est la même que celle de [3], Ch. II, paragraphe 4, prop. 11, du moins essentiellement.

COROLLAIRE 1.– *Soient* A *un anneau et* I *et* J *des idéaux de* A. *Alors :* $W(I) \subset W(J)$ *équivaut à* $\sqrt{J} \subset \sqrt{I}$.

COROLLAIRE 2.– *Soient* A *un anneau et* f *et* g *des éléments de* A. *Alors* : $Y_f = Y_g$ *équivaut à* $\sqrt{Af} = \sqrt{Ag}$. *Par suite* $Y_f = \emptyset$ *équivaut à la nilpotence de l'élément* f.

IV. SPECTRE GENERALISE D'UN ANNEAU

DEFINITION 1.– On appelle spectre généralisé d'un anneau A l'ensemble des idéaux primaux de l'anneau A, muni de la topologie induite par celle de $\mathcal{I}(A)$.

On désigne cet ensemble par Specg(A). On notera $Y_f \cap \mathrm{Specg}(A)$ par Dg(f) et de même $W(M) \cap \mathrm{Specg}(A)$ par Vg(M).

Il est clair que les propriétés 1/ à 9/ du paragraphe 3 se transmettent à Specg(A). De même les propriétés a) et b) aux Dg.

On remarquera que dans Specg(A), on a $Vg(\Sigma I_\rho) = Vg(\cup I_\rho)$ pour toute famille $\{I_\rho\}_{\rho \in R}$ d'idéaux de A. En effet pour un élément I de Specg(A) on a vu que $A - \Lambda(I)$ est stable par addition. On peut donc se borner dans la définition des ensembles fermés de Specg(A) à prendre les ensembles Vg(I) où I désigne un idéal de A.

La restriction $\mathcal{R}g$ de $\mathcal{R}$ aux parties de Specg(A) définit une application de l'ensemble des parties de Specg(A) dans l'ensemble des idéaux semi-premiers de A. La proposition 2 du paragraphe 3 est encore valable en remplaçant $\mathcal{R}$ par $\mathcal{R}g$. De plus $\mathcal{R}g$ et Vg sont des bijections, inverses l'une de l'autre entre l'ensemble des parties fermées de Specg(A) et l'ensemble des idéaux semi-premiers de l'anneau A.

PROPOSITION 1.– *Soit* A *un anneau. Alors* Specg(A) *est dense dans* $\mathcal{J}(A)$ *et* Spec(A) *est très dense dans* Specg(A).

Preuve : L'adhérence dans $\mathcal{J}(A)$ de Specg(A) est $W(\mathcal{R}(\text{Specg}(A)))$. Soit I un élément de $\mathcal{J}(A)$, alors $\mathcal{R}(\text{Specg}(A)) \subset A - \Lambda(I)$ puisque $A - \Lambda(I)$ est une réunion d'idéaux premiers. On en déduit que Specg(A) est dense dans $\mathcal{J}(A)$.

Pour prouver la deuxième assertion, il suffit de prouver d'après [5] Ch IV 10-1-1, que l'adhérence de $Vg(I) \cap \text{Spec}(A)$ dans Specg(A) est Vg(I).

Or on a $Vg(I) \cap \text{Spec}(A) = V(I)$ et l'adhérence de V(I) dans Specg(A) est $Vg(\mathcal{R}g(V(I)))$. Il est clair que $\mathcal{R}g(V(I)) = \sqrt{I}$. Donc l'adhérence de V(I) dans Specg(A) n'est autre que Vg(I).

COROLLAIRE 1.– *Soit* A *un anneau. Les ensembles* Dg(f) *pour* f *élément de* A *sont quasi compacts. En particulier* Specg(A) *est quasi compact.*

Preuve : D'après [5] déjà cité, l'application $U' \longrightarrow U' \cap \text{Spec}(A)$ est une bijection entre l'ensemble des parties ouvertes de Specg(A) et celui des parties ouvertes de Spec(A).

COROLLAIRE 2.– *Soit* A *un anneau. Une condition nécessaire et suffisante pour que* Specg(A) *soit connexe est que* Spec(A) *soit connexe. S'il en est ainsi* $\mathcal{J}(A)$ *est connexe.*

Preuve : Il est clair que si Spec(A) est connexe il en est de même pour Specg(A) et $\mathcal{J}(A)$. D'autre part si Specg(A) est connexe, du fait que l'adhérence d'un ensemble V(I) dans Specg(A) est Vg(I), on démontre sans difficulté que Spec(A) est connexe.

V. ETUDE DE QUELQUES PROPRIETES TOPOLOGIQUES DE $\mathcal{J}(A)$ ET SPECG(A)

1/ $\mathcal{J}(A)$ et Specg(A) ne sont pas en général des espaces de Kolmogoroff

Considérons dans $\mathcal{J}(A)$ la relation d'équivalence R définie de la manière suivante : on a I R J si et seulement si $\overline{\{I\}} = \overline{\{J\}}$. On remarque que I R J équivaut à $\Lambda(I) = \Lambda(J)$, puisque $\overline{\{I\}} = W(A - \Lambda(I))$. On sait d'autre part (cf. par exemple [6] Ch I paragraphe 8 exercice 27) que l'on a le résultat suivant : soit X un espace topologique. Il existe un espace de Kolmogoroff Y et une application continue $\varphi : X \longrightarrow Y$ vérifiant la propriété universelle suivante : pour toute application continue $f : X \longrightarrow Z$ où Z est un espace de Kolmogoroff, il existe une application continue unique $g : Y \longrightarrow Z$ telle que $f = g \circ \varphi$. On peut prendre $Y = X/R$ où R désigne la relation d'équivalence définie par x R x′ si et seulement si $\overline{\{x\}} = \overline{\{x'\}}$.

Donc $\mathcal{J}(A)/R$ est un espace de Kolmogoroff et en général $\mathcal{J}(A)$ ne l'est pas. Soit de même dans Specg(A) la relation R. Ainsi on a encore un espace de Kolmogoroff : Specg(A)/R où I R J équivaut à $\Lambda(I) = \Lambda(J)$. Soit d'autre part l'application $\alpha : \text{Specg}(A) \longrightarrow \text{Spec}(A)$ définie par $\alpha(I) = A - \Lambda(I)$. L'application α est continue car $\alpha^{-1}(V(I)) = Vg(I)$. Sachant que Spec(A) est un espace de Kolmogoroff et d'après le résultat donné ci-dessus, on a une factorisation :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Specg}(A) \arrow[r, "\bar{\alpha}"] \arrow[dr, "\alpha"'] & \mathrm{Specg}(A)/R \arrow[d, "\varphi"] \\ & \mathrm{Spec}(A) \end{tikzcd}$$

La fonction φ est continue et unique. Comme de plus φ est injective par définition et surjective de toute évidence, il en résulte que φ est une bijection continue. En fait φ est un homéomorphisme puisque l'application α est ouverte : en effet $\alpha(\mathrm{Dg}(f)) = D(f)$.

THEOREME 1.– *Soient* A *un anneau et la relation* R *définie dans* $\mathfrak{J}(A)$ *de la manière suivante : on a* I R J *si et seulement si* $\Lambda(I) = \Lambda(J)$. *Alors* $\mathfrak{J}(A)/R$ *est un espace de Kolmogoroff ayant la propriété suivante : soit* α *l'application canonique de* $\mathfrak{J}(A)$ *dans* $\mathfrak{J}(A)/R$, *alors pour toute application continue* φ *de* $\mathfrak{J}(A)$ *dans un espace de Kolmogoroff* Y *il existe une application continue et unique* φ' *de* $\mathfrak{J}(A)/R$ *dans* Y *telle que :* $\varphi = \varphi' \circ \alpha$. *De plus* Specg(A)/R *est un espace homéomorphe à* Spec(A).

2/ Etude de l'accessibilité de $\mathfrak{J}(A)$ et Specg(A)

On sait qu'un espace est accessible si et seulement si tout point est fermé. Dans le cas de $\mathfrak{J}(A)$, on voit que cet espace est accessible si pour tout élément I de $\mathfrak{J}(A)$ on a $W(A - \Lambda(I)) = \{I\}$. On peut encore exprimer cette condition par : pour tout élément I de $\mathfrak{J}(A)$ et tout élément K de $\mathfrak{J}(A)$, la relation $\Lambda(K) \subset \Lambda(I)$ entraine $K = I$.

Soit I un élément de $\mathfrak{J}(A)$. On sait que $\Lambda(I) = \cap\, \Lambda(\mathfrak{p})$, intersection prise pour certains idéaux premiers de A. On a donc $\mathfrak{J}(A) = \mathrm{Spec}(A)$. Soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de A. Puisque $(0) \subset \mathfrak{m}$ on a aussi $\Lambda(\mathfrak{m}) \subset \Lambda(0)$ et donc $\mathfrak{m} = (0)$. Il en résulte que A est un corps. De plus, puisque un espace séparé est aussi accessible, on voit qu'on a obtenu la proposition :

PROPOSITION 2.– *Soit* A *un anneau. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1/ $\mathfrak{J}(A)$ *est un espace accessible.*

2/ $\mathfrak{J}(A)$ *est un espace séparé.*

3/ *L'anneau* A *est un corps.*

Supposons maintenant que Specg(A) soit accessible. Il en est de même pour Spec(A). Or, d'après [3] Ch. II, Par. 4, Exercice 16, on sait que dans ce cas Spec(A) = Max(A). Pour tout élément I de Specg(A) il existe un élément $\mathfrak{p}$ de Spec(A) tel que $\Lambda(I) = \Lambda(\mathfrak{p})$. Puisque Specg(A) est accessible on en déduit que $I = \mathfrak{p}$ et Specg(A) = Max(A).

Réciproquement, si Specg(A) = Max(A), alors on a Specg(A) = Spec(A) = Max(A) et tout point est fermé.

De même une condition nécessaire et suffisante pour que Specg(A) soit séparé est que :

$$\mathrm{Specg}(A) = \mathrm{Max}(A).$$

PROPOSITION 3.– *Soit* A *un anneau. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) Specg(A) *est un espace accessible.*

b) Specg(A) *est un espace séparé.*

c) Specg(A) = Max(A).

De plus si a), b) *où* c) *est réalisé, on peut ajouter que* A/Nil(A) *est un anneau absolument plat.*

PROPOSITION 4.– *Soit* A *un anneau. L'espace* $\mathfrak{J}(A)$ *est irréductible si et seulement si l'idéal* Nil(A) *de* A *est premier. Il en est de même pour* Specg(A).

Preuve : Elle est évidente en utilisant les ouverts de la base de $\mathfrak{J}(A)$ et la définition d'un espace irréductible.

VI. PROPRIETES FONCTORIELLES DE $\mathfrak{I}(A)$

Soit ψ un élément de Hom(A , A′). On définit une application ${}^t\psi$ de $\mathfrak{I}(A')$ dans $\mathfrak{I}(A)$ par ${}^t\psi(I') = \psi^{-1}(I')$ pour I' élément de $\mathfrak{I}(A')$.

C'est bien une application de $\mathfrak{I}(A')$ dans $\mathfrak{I}(A)$ car tout élément de $\mathfrak{I}(A')$ est contenu dans un élément de Max(A′).

On désigne par $\mathfrak{I}(A/A')$ l'image de $\mathfrak{I}(A')$ par ${}^t\psi$. Il est clair que $\mathfrak{I}(A/A')$ est l'ensemble des éléments I de $\mathfrak{I}(A)$ tels que $\psi^{-1}(I\,.\,A') = I$.

Soient ψ un élément de Hom(A , A′) et φ un élément de Hom(A′ , A″), alors ${}^t(\varphi\circ\psi) = {}^t\psi\circ{}^t\varphi$.

Soient ψ et φ des éléments de Hom(A , A′), on se propose d'étudier dans quel cas ${}^t\varphi = {}^t\psi$.

LEMME 1.– *Une condition nécessaire et suffisante pour que* ${}^t\varphi = {}^t\psi$ *est qu'il existe des fonctions* $h(\varphi)$ *et* $h(\psi)$ *de* A *dans* A′ *satisfaisant* : $\varphi = h(\psi)\psi$ *et* $\psi = h(\varphi)\varphi$.

Preuve : Soit x un élément de A. Si $\psi(x)$ n'est pas un élément inversible de A′, on déduit de

$$\psi^{-1}(A'\psi(x)) = \varphi^{-1}(A'\psi(x))$$

l'existence d'un élément ψ_x de A′ tel que $\varphi(x) = \psi_x\,\psi(x)$. Même raisonnement pour $\varphi(x)$. Si par contre $\psi(x)$ est inversible dans A′ on peut écrire $\varphi(x) = \psi(x)^{-1}\,\varphi(x)\,\psi(x)$. Réciproquement, on voit que si pour tout x élément de A il existe des éléments φ_x et ψ_x de A′ tels que $\varphi(x) = \psi_x\ \psi(x)$ et $\psi(x) = \varphi_x\ \varphi(x)$, alors ${}^t\varphi = {}^t\psi$.

Alors pour tout x élément de A, appelons $Z(\varphi)_x$ l'ensemble des éléments φ_x de A′ tels que $\psi(x) = \varphi_x\varphi(x)$. Définition analogue pour $Z(\psi)_x$. Utilisant l'axiome du choix, on construit alors les fonctions $h(\varphi)$ et $h(\psi)$ cherchées en prenant pour chaque x un élément φ_x dans $Z(\varphi)_x$ et un élément ψ_x dans $Z(\psi)_x$.

Soient A et A′ des anneaux et considérons dans Hom(A , A′) la relation d'équivalence définie de la manière suivante : pour φ et φ' éléments de Hom(A , A′) on a $\varphi\, R_{A,A'}\, \varphi'$ si et seulement si ${}^t\varphi = {}^t\varphi'$. On considère alors les ensembles $\mathrm{Hom}(A\,,A')/R_{A,A'}$ dont les éléments seront notés $\widetilde{\varphi}$ et où φ est un élément de Hom(A , A′). On définit une application de

$$\mathrm{Hom}(A'\,,A'')/R_{A',A''} \times \mathrm{Hom}(A\,,A')/R_{A,A'}$$

dans $\mathrm{Hom}(A\,,A'')/R_{A,A''}$ par $(\widetilde{\varphi'}\,,\widetilde{\varphi}) \longrightarrow \widetilde{\varphi'\circ\varphi}$. Soit alors la catégorie définie de la manière suivante : les objets sont les anneaux et les morphismes de A dans A′ les éléments de $\mathrm{Hom}(A\,,A')/R_{A,A'}$. Cette catégorie est désignée par Ann_R. On peut définir un foncteur de Ann_R dans Ens qui sera noté $(\mathfrak{I}\,,t)$: pour A objet de Ann_R, $\mathfrak{I}(A)$ est l'ensemble défini au paragraphe 3 et pour $\widetilde{\varphi}$ morphisme de Ann_R on prend ${}^t\widetilde{\varphi} = {}^t\varphi$. On voit alors que $(\mathfrak{I}\,,t)$ est un foncteur contravariant et fidèle de Ann_R dans Ens.

Si on se place dans la catégorie des anneaux intègres on a davantage de précisions. Soient φ et ψ des éléments de Hom(A , A′) tels que ${}^t\varphi = {}^t\psi$. Pour tout x n'appartenant pas à $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\psi)$ les éléments φ_x et ψ_x associés sont uniques. Associons O à tout élément de $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\psi)$. On définit encore, sans utilisation de l'axiome du choix, les fonctions $h(\varphi)$ et $h(\psi)$. Cependant, elles ont ici une propriété supplémentaire : $h(\varphi)$ et $h(\psi)$ sont des homomorphismes multiplicatifs de A dans $U(A')\cup\{0\}$. On va maintenant caractériser les applications de $\mathfrak{I}(A')$ dans $\mathfrak{I}(A)$, obtenues par transposition d'un élément de Hom(A , A′), et qui sont continues. Pour cela on a besoin du lemme suivant.

LEMME 2.– *Soient* φ *un élément de* Hom(A , A′) *et* M *un* A*-module,* M′ *un* A′*-module et* g *un homomorphisme injectif de* A*-modules de* M *dans* $\varphi_*(M')$. *Alors on a* $\mathrm{Assf}_A(M) \subset {}^t\varphi(\mathrm{Assf}_{A'}(M'))$.

Preuve : C'est une adaptation au cas des modules d'un résultat de [7] exposé 4 prop. 3.3. Donnons cependant une démonstration.

Soit $\mathfrak{p}$ un élément de $\mathrm{Assf}_A(M)$, alors il existe un élément x de M tel que $\mathfrak{p}$ soit idéal premier minimal dans l'ensemble des idéaux premiers qui contiennent $\mathrm{Ann}_A(x)$. L'injectivité de g entraine que l'on a la relation $\varphi^{-1}(\mathrm{Ann}_{A'}(g(x))) = \mathrm{Ann}_A(x)$. De plus $\varphi(A - \mathfrak{p})$ est une partie multiplicative de A' non vide et $\varphi(A-\mathfrak{p}) \cap \mathrm{Ann}_{A'}(g(x)) = \emptyset$. Par localisation de A' en $\varphi(A-\mathfrak{p})$ on déduit l'existence d'un idéal premier $\mathfrak{p}'$ minimal dans l'ensemble des idéaux premiers contenant $\mathrm{Ann}_{A'}(g(x))$ et tel que $\mathfrak{p}' \cap \varphi(A-\mathfrak{p}) = \emptyset$. Il est clair que $\mathfrak{p}'$ est un élément de $\mathrm{Assf}_{A'}(M')$ et que la minimalité de $\mathfrak{p}$ entraine $\mathfrak{p} = {}^t\varphi(\mathfrak{p}')$.

Corollaire.– *Soit* φ *un élément de* $\mathrm{Hom}(A, A')$ *et soit* I' *un élément de* $\mathfrak{I}(A')$. *Posons* $I = {}^t\varphi(I')$, *alors* $\mathrm{Assf}_A(A/I) \subset {}^t\varphi(\mathrm{Assf}_{A'}(A'/I')$. *On en déduit que* $\varphi^{-1}(\Lambda(I')) \subset \Lambda(\varphi^{-1}(I'))$.

Preuve : On applique le lemme à $\overline{\varphi} : A/I \longrightarrow A'/I'$, application canonique déduite de φ par passage aux quotients. La dernière assertion peut se prouver en utilisant $\varphi^{-1}(I' : \varphi(x)) = \varphi^{-1}(I') : x$ où x est un élément de A. On peut aussi remarquer que $A - \Lambda(I)$ est la réunion des éléments de $\mathrm{Assf}_A(A/I)$.

Theoreme 1.– *Soit* φ *un élément de* $\mathrm{Hom}(A, A')$. *Les assertions suivantes sont équivalentes pour un élément* I' *de* $\mathfrak{I}(A')$

1/ ${}^t\varphi$ *est une application continue en* I' *élément de* $\mathfrak{I}(A')$,

2/ *Pour tout* f *élément de* $\Lambda(\varphi^{-1}(I'))$ *il existe un élément* f' *de* $\Lambda(I')$ *tel que si* J' *est un élément de* $\mathfrak{I}(A')$, *alors* f' *appartient à* $\Lambda(J')$ *entraine que* f *appartient à* $\Lambda(\varphi^{-1}(J'))$.

3/ $\varphi^{-1}(\Lambda(I')) = \Lambda(\varphi^{-1}(I'))$.

Preuve : L'équivalence de 1/ et 2/ se démontre facilement en utilisant la définition de la continuité en un point à l'aide des voisinages et en prenant pour ceux-ci les ouverts des bases de $\mathfrak{I}(A)$ et $\mathfrak{I}(A')$. Pour démontrer que 2/ implique 3/, il suffit de prouver que $\Lambda(\varphi^{-1}(I')) \subset \varphi^{-1}(\Lambda(I'))$, compte tenu du corollaire du lemme 2. Soit donc f un élément de $\Lambda(\varphi^{-1}(I'))$, d'après 2/ il existe un élément f' de $\Lambda(I')$. Mais $\Lambda(I') = \cap \Lambda(\mathfrak{p}')$ où l'intersection est prise pour les éléments $\mathfrak{p}'$ de $\mathrm{Assf}_{A'}(A'/I')$. Par suite, pour tout élément $\mathfrak{p}'$ de $\mathrm{Assf}_{A'}(A'/I')$, f' appartient à $\Lambda(\mathfrak{p}')$ et d'après 2/ on en déduit que f appartient à $\Lambda(\varphi^{-1}(\mathfrak{p}'))$ pour tout élément $\mathfrak{p}'$ de $\mathrm{Assf}_{A'}(A'/I')$. L'inclusion à démontrer est alors conséquence de ce qui précède. Supposons maintenant que $\Lambda(\varphi^{-1}(I')) = \varphi^{-1}(\Lambda(I'))$ pour démontrer que 3/ implique 2/. Soit f élément de $\Lambda(\varphi^{-1}(I'))$, alors il existe un élément f' de $\Lambda(I')$ égal à $\varphi(f)$ tel que si J' est un élément de $\mathfrak{I}(A')$, alors f' appartient à $\Lambda(J')$ entraine que f appartient à $\varphi^{-1}(\Lambda(J'))$. Mais d'après le corollaire du lemme 2, on a $\varphi^{-1}(\Lambda(J')) \subset \Lambda(\varphi^{-1}(J'))$. Il est alors clair que l'assertion 2) est démontrée.

Corollaire.– *Soit* φ *un élément de* $\mathrm{Hom}(A, A')$. *Une condition nécessaire et suffisante pour que* ${}^t\varphi$ *soit une application continue de* $\mathfrak{I}(A')$ *dans* $\mathfrak{I}(A)$ *est que pour tout* M *partie de* A *on ait* :

$$({}^t\varphi)^{-1}(W(M)) = W(\varphi(M))$$

(ou ce qui revient au même : pour tout f *élément de* A *on a* $({}^t\varphi)^{-1}(Y_f) = Y_{\varphi(f)}$).

Preuve : Il suffit de démontrer que la continuité de ${}^t\varphi$ entraine que pour tout M partie de A on a

$$({}^t\varphi)^{-1}(W(M)) = W(\varphi(M)),$$

ce qui se fait sans difficulté.

Definition 1.– Soit φ un élément de $\mathrm{Hom}(A, A')$.

a) si pour I' élément de $\mathfrak{I}(A')$, on a $\varphi^{-1}(\Lambda(I')) = \Lambda(\varphi^{-1}(I'))$, on dit que φ appartient à $E_{I'}(A, A')$.

b) si pour tout I' élément de $\mathfrak{I}(A')$, φ appartient à $E_{I'}(A, A')$, on dit que φ appartient à $E(A, A')$.

On dira plus brièvement que φ est du type E si φ appartient à $E(A, A')$.

Corollaire.– $(\mathfrak{I}, t)$ est un foncteur contravariant de la sous catégorie de Ann dont les objets sont les anneaux unitaires et les morphismes les homomorphismes du type E, dans la catégorie des espaces topologiques dont les morphismes sont les applications continues.

PROPOSITION 1.– *Soit* φ *un élément de* Hom(A , A') *satisfaisant à la condition* : (C) : *Quel que soit l'élément* a' *de* A', *il existe un élément* u' *de* U(A') *et il existe un élément* a *de* A *tels que* $a' = u' \varphi(a)$.

Alors l'application ${}^t\varphi$ *de* $\mathfrak{I}(A')$ *dans* $\mathfrak{I}(A)$ *est continue.*

Preuve : Il suffit de montrer que pour tout élément I' de $\mathfrak{I}(A')$ on a $\Lambda(\varphi^{-1}(I')) = \varphi^{-1}(\Lambda(I'))$, ce qui est évident.

REMARQUE.– Les applications vérifiant la condition (C) sont assez fréquentes. Par exemple, les épimorphismes de la catégorie Ann qui sont classiques au sens de [7], comme les surjections et les localisations, vérifient la condition (C).

EXEMPLE D'UN HOMOMORPHISME VERIFIANT LA CONDITION (C)

Soient K un corps, K[X], anneau de polynomes sur K, K[[X]] anneau de séries formelles sur K et φ l'injection canonique de K[X] dans K[[X]]. Pour F(X) élément de K[[X]], on peut écrire $F(X) = X^n H(X)$ où H(X) est une série formelle inversible et n un entier positif ou nul. Il est clair que φ vérifie la condition (C).

EXEMPLE D'UN HOMOMORPHISME QUI N'EST PAS DU TYPE E

Soit Z, anneau des entiers relatifs et soit Z[X] anneau des polynomes à une indéterminée sur Z. On désigne par φ l'injection canonique de Z dans Z[X]. L'idéal I' = (2X) de Z[X] est tel que $\varphi^{-1}(I') = (O)$. Donc 2 appartient à $\Lambda(\varphi^{-1}(I'))$ mais n'appartient pas à $\varphi^{-1}(\Lambda(I'))$. La condition 3 du théorème n'étant pas satisfaite, φ n'est pas du type E.

Par contre tout homomorphisme qui va d'un corps dans un anneau est du type E. C'est le cas par exemple de l'injection canonique d'un corps dans son anneau de polynomes à une indéterminée.

PROPOSITION 2.– *Soit* φ *un élément de* Hom(A , A') *tel que* ${}^t\varphi$ *soit une application injective. Les assertions suivantes sont équivalentes* :

a) *L'application* ${}^t\varphi$ *considérée comme application de* $\mathfrak{I}(A')$ *dans* $\mathfrak{I}(A/A')$ *est ouverte.*

b) *Pour tout élément* I' *de* $\mathfrak{I}(A')$, *pour tout élément* f' *de* $\Lambda(I')$, *il existe un élément* f *de* $\Lambda(\varphi^{-1}(I'))$, *ayant la propriété suivante : si* J' *est un élément de* $\mathfrak{I}(A')$ *tel que* f *appartienne à* $\Lambda(\varphi^{-1}(J'))$, *alors* f' *appartient à* $\Lambda(J')$.

Preuve : On voit, en utilisant la caractérisation d'une application ouverte donnée par [6], Ch. I, Par. 5, n° 3, Prop. 5, que l'assertion a) peut se formuler de manière équivalente par : quel que soit l'élément I' de $\mathfrak{I}(A')$, quel que soit l'ouvert $Y_{f'}$ de $\mathfrak{I}(A')$ tel que $I' \in Y_{f'}$, il existe un élément f de A tel que ${}^t\varphi(I') \in Y_f$ et tel que $Y_f \cap \mathfrak{I}(A/A') \subset {}^t\varphi(Y_{f'})$. Il suffit alors de traduire en termes algébriques ce qui précède et d'utiliser l'injectivité de ${}^t\varphi$. On remarquera que dans la preuve de b) entraine a) l'injectivité de ${}^t\varphi$ n'intervient pas. Ceci montre qu'un homomorphisme satisfaisant à la condition b) est tel que ${}^t\varphi$ soit une application ouverte de $\mathfrak{I}(A')$ sur $\mathfrak{I}(A/A')$.

PROPOSITION 3.– *Soit* φ *un élément de* Hom(A , A') *du type* E. *Si l'application* φ *vérifie la condition* b) *de la proposition 2, alors pour tout élément* f' *de* A', *il existe un élément* f *de* A *et un élément* a' *de* A' *tels que* $\varphi(f) = a' f'$.

Preuve : Soit f' un élément de A'. Supposons d'abord que pour tout élément I' de $\mathfrak{I}(A')$, f' n'appartienne pas à $\Lambda(I')$. Dans ce cas f' appartient à Nil(A') et on peut écrire que $\varphi(O) = f'^{n-1} f'$, puisque f' est nilpotent. Supposons maintenant que f' appartienne à au moins une partie multiplicative $\Lambda(I')$. L'application φ étant du type E et vérifiant la condition b) de la proposition précédente, il existe un élément g de A tel que $\varphi(g)$ appartienne à $\Lambda(I')$ et ayant la propriété suivante : quel que soit l'élément J' de $\mathfrak{I}(A')$ tel que $f' \notin \Lambda(J')$, alors $\varphi(g)$ n'appartient pas à $\Lambda(J')$. Soit $\{\mathfrak{p}'\}$ la famille des idéaux premiers de A' qui contiennent f'. Alors $\varphi(g)$ appartient à tout élément de la famille précédente et donc $\varphi(g) \in \sqrt{A'f'}$. Si n est l'entier tel que $\varphi(g^n) \in A'f'$, il suffit de prendre $f = g^n$ pour obtenir le résultat cherché.

VII. ETUDE DE L'INJECTIVITE DE ${}^t\varphi$

Soit φ un élément de Hom(A , A'), on peut alors considérer que A' est muni d'une structure de A-module par l'application φ. Pour un idéal propre I de A, on désigne par Tot(A/I) l'anneau total des fractions de l'anneau A/I. Il est clair que le produit tensoriel $\mathrm{Tot}(A/I) \otimes_A A'$ est isomorphe en tant qu'anneau et en tant que A-module à $\Lambda(I)^{-1}\ A'/I.A'$. Soit l'application composée : $A' \longrightarrow A'/I.A' \longrightarrow \Lambda(I)^{-1}\ A'/I.A'$ où les flèches désignent les homomorphismes canoniques.

Le noyau de cette application est désigné par ${}^s\varphi(I)$. L'ensemble ${}^s\varphi(I)$ se compose des éléments x' de A' pour lesquels il existe un élément a de $\Lambda(I)$ tel que $\varphi(a)\,x'$ appartienne à $I.A'$.

On voit facilement que si I est un élément de $\mathfrak{I}(A/A')$, alors ${}^s\varphi(I)$ est un élément de $\mathfrak{I}(A')$ et que l'on a ${}^t\varphi({}^s\varphi(I)) = I$.

On peut donc considérer ${}^s\varphi$ comme une application de $\mathfrak{I}(A/A')$ dans $\mathfrak{I}(A')$ et dans ces conditions ${}^t\varphi \circ {}^s\varphi$ est l'identité sur $\mathfrak{I}(A/A')$.

PROPOSITION 1.– *Soit φ un élément de* Hom(A , A'). *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1/ *L'application ${}^t\varphi$ de $\mathfrak{I}(A')$ dans $\mathfrak{I}(A)$ est une injection.*

2/ *Pour tout élément I' de $\mathfrak{I}(A')$ on a $I' = \varphi^{-1}(I').A'$.*

3/ *Pour tout élément f' de A', il existe un nombre fini d'éléments $f_1, \dots f_i, \dots f_n$ de A tels que* $A'f' = \sum_{i=1}^{n} A'\varphi(f_i)$.

4/ *L'application ${}^s\varphi$ de $\mathfrak{I}(A/A')$ dans $\mathfrak{I}(A')$ est une bijection.*

Preuve : Il est évident que 1/ et 2/ sont équivalents. Pour démontrer que 2/ entraine 3/ on distingue deux cas. Si l'élément f' de A' est inversible on peut écrire que $f' = \varphi(1)\,f'$ et $\varphi(1) = f'\,f'^{-1}$. Si l'élément f' n'est pas inversible, on applique 2/ à l'idéal A'f' de A'.

Dans les deux cas on conclut à l'existence d'un nombre fini d'éléments $f_1, \dots, f_n$ de A tels que $f' = \sum_{i=1}^{n} \varphi(f_i)\ a'_i$ et $\varphi(f_i) = b'_i\ f'$ où $\{a'_i\}$ et $\{b'_i\}$ sont des familles de n éléments de A'. On en déduit immédiatement le résultat cherché. Il est clair que 3/ implique 1/. Compte tenu du fait que ${}^t\varphi \circ {}^s\varphi$ est l'identité sur $\mathfrak{I}(A/A')$, on voit que 4/ entraine 1/. Supposons que ${}^t\varphi$ soit injective, de la relation ${}^t\varphi \circ {}^s\varphi \circ {}^t\varphi = {}^t\varphi$ démontrée plus haut on déduit que ${}^s\varphi \circ {}^t\varphi$ est l'identité sur $\mathfrak{I}(A')$, ce qui prouve que 1/ entraine 4/.

COROLLAIRE 1.– *Soit φ un élément de* Hom(A , A'). *Si ${}^t\varphi$ est injective l'application φ est du type* E.

Preuve : Il suffit de montrer que pour tout élément I' de $\mathfrak{I}(A')$ on a $\Lambda(\varphi^{-1}(I')) \subset \varphi^{-1}(\Lambda(I'))$. Soit donc un élément x de $\Lambda(\varphi^{-1}(I'))$ et soit un élément f' de A' tel que $f'\varphi(x)$ appartienne à I'. D'après la proposition 1, 3/ il existe des éléments $f_1, \dots, f_n$ en nombre fini et deux familles d'éléments de A', $\{a'_i\}$ et $\{b'_i\}$ ayant chacune n éléments tels que $f' = \sum_{i=1}^{n} \varphi(f_i)\ a'_i$ et $\varphi(f_i) = b'_i\ f'$. Donc $\varphi(f_i x)$ appartient à I' et puisque x est un élément de $\Lambda(\varphi^{-1}(I'))$ on obtient que $\varphi(f_i)$ est un élément de I'. Par suite f' appartient à I'. Ceci signifie que x est un élément de $\varphi^{-1}(\Lambda(I'))$, ce qu'il fallait démontrer.

COROLLAIRE 2.– *L'application ${}^t\varphi$, dans les cas suivants, est injective et donc continue :*

a) *L'élément φ de* Hom(A , A') *vérifie la condition* (C).

b) *L'élément φ de* Hom(A , A') *est un épimorphisme plat de la catégorie* Ann.

c) *L'élément φ de* Hom(A , A') *possède un inverse à droite.*

Preuve : L'assertion dans le cas de a) se démontre sans difficulté. Dans l'exposé [4] de [7], il a été démontré que si φ est un épimorphisme plat de A dans A', alors pour tout idéal I'de A' on a $I' = \varphi^{-1}(I').A'$. Le cas de c) est trivial.

COROLLAIRE 3.– *Soit* φ *un élément de* $\mathrm{Hom}(A, A')$. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) *L'application* ${}^t\varphi$ *est un homéomorphisme de* $\mathfrak{I}(A')$ *sur* $\mathfrak{I}(A/A')$.

b) *L'application* ${}^t\varphi$ *de* $\mathfrak{I}(A')$ *sur* $\mathfrak{I}(A/A')$ *est injective et ouverte.*

COROLLAIRE 4.– *Soit* φ *un élément de* $\mathrm{Hom}(A, A')$ *satisfaisant à la condition* (C). *Alors* ${}^t\varphi$ *est un homéomorphisme de* $\mathfrak{I}(A')$ *sur* $\mathfrak{I}(A/A')$.

Preuve : Il suffit de montrer que ${}^t\varphi$ est ouverte, ce qui se fait sans peine en utilisant la caractérisation de la proposition 2 du paragraphe VI.

COROLLAIRE 5.– *Soit* A *un anneau et* S *une partie multiplicative de* A *et soit* φ *l'homomorphisme canonique de* A *dans* $S^{-1}A$. *Alors l'application* ${}^t\varphi$ *de* $\mathfrak{I}(S^{-1}A)$ *sur* $\mathfrak{I}(A/S^{-1}A)$ *est un homéomorphisme. De plus* $\mathfrak{I}(A/S^{-1}A)$ *est l'ensemble des éléments* I *de* $\mathfrak{I}(A)$ *qui sont tels que* S *soit contenu dans* $\Lambda(I)$.

Preuve : L'application φ vérifie la condition (C). Il suffit donc de montrer que $\mathfrak{I}(A/S^{-1}A)$ est l'ensemble indiqué. On sait que $\mathfrak{I}(A/S^{-1}A)$ est l'ensemble des éléments I de $\mathfrak{I}(A)$ tels que $S \cap I = \emptyset$ et tels que I soit saturé par rapport à S. Soit donc un élément I de $\mathfrak{I}(A/S^{-1}A)$ et soit x un élément de S. Supposons que l'on ait un élément y de A tel que xy soit dans I. Puisque I est saturé pour S, l'élément y est dans I et x appartient à $\Lambda(I)$. La réciproque se fait sans difficulté.

COROLLAIRE 6.– *Soit* A *un anneau et soient* f *un élément de* A *et* S_f *la partie multiplicative de* A *dont les éléments sont de la forme* f^n *où l'exposant* n *est un entier positif ou nul. Si l'on désigne par* A_f *le localisé de* A *par rapport à* S_f, *alors* $\mathfrak{I}(A_f)$ *est homéomorphe à l'ouvert* Y_f *de* $\mathfrak{I}(A)$.

REMARQUE.– Soit J un élément de $\mathfrak{I}(A)$ associé à l'anneau A. Alors $\mathfrak{I}(A/\Lambda(J)^{-1}A)$ n'est autre que le générisé dans $\mathfrak{I}(A)$ de l'ensemble {J}. En effet $\Lambda(J) \subset \Lambda(I)$ équivaut à $J \in \overline{\{I\}}$ puisque $\overline{\{I\}} = W(A - \Lambda(I)))$.

PROPOSITION 2.– *Soit* φ *un élément de* $\mathrm{Hom}(A, A')$. *Si l'application* ${}^t\varphi$ *est une bijection de* $\mathfrak{I}(A')$ *sur* $\mathfrak{I}(A)$, *alors* φ *est une application plate et bonne* (cf. [8]). *Elle est donc fidèlement plate.*

Preuve : Pour tout élément I de $\mathfrak{I}(A)$ il existe un élément I' de $\mathfrak{I}(A')$ tel que $\varphi^{-1}(I') = I$. Mais ${}^t\varphi$ étant une application injective on a $I' = \varphi^{-1}(I') . A'$ et par suite $I = \varphi^{-1}(I . A')$, ce qui montre que φ est bonne. Montrons maintenant que le A-module A' est un module plat. Pour cela, d'après [3] Ch. I, Par. 2, exercice 22, il suffit de prouver que pour tout idéal I de A et pour tout élément a de A on a :

$$(I : a) . A' = I . A' : \varphi(a).$$

Si l'idéal I est l'anneau A, c est bien clair. Si I est un élément de $\mathfrak{I}(A)$, il suffit de montrer que l'on a : $I . A' : \varphi(a) \subset (I : a) . A'$. En effet l'autre inclusion est toujours vraie. Soit donc un élément x' de A' tel que $x'\varphi(a)$ soit dans I . A'. Or la proposition 1, 3) du paragraphe 7 affirme l'existence d'éléments $x_1, \ldots, x_n$ de A en nombre fini et de deux familles $\{a_i'\}$ et $\{b_i'\}$ composées chacune de n éléments de A' tels que $\varphi(x_i) = b_i' x'$ et tels que $x' = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) a_i'$. On en déduit que $\varphi(ax_i)$ appartient à I . A' et, puisque φ est bonne, ax_i appartient à I. Ceci démontre que x' appartient à (I : a) . A'.

REMARQUES ET EXEMPLES :

1/ Reprenons l'exemple qui suit la proposition 1 du paragraphe 6. L'homomorphisme $\varphi : K[X] \longrightarrow K[[X]]$ satisfait à la condition (C). Par suite ${}^t\varphi$ est un homéomorphisme de $\mathfrak{I}(K[[X]])$ sur $\mathfrak{I}(K[X]/K[[X]])$. Par contre φ n'est pas un homomorphisme fidèlement plat : K[X] est un anneau noethérien et K[[X]] est son complété pour la topologie (X)-adique ; si φ était un homomorphisme fidèlement plat, K[X] serait un anneau de Zariski pour (X), ce qui est absurde.

Considérons toujours l'homomorphisme φ. D'après [2] Ch. VIII page 268, on a la factorisation suivante :

$$\begin{tikzcd} K[X] \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "j"'] & K[[X]] \\ & K[X]_{(1+(X))} \arrow[u, "\varphi'"'] \end{tikzcd}$$

Avec les notations ci-dessus, on a : ${}^t j \circ {}^t\varphi' = {}^t\varphi$. On en déduit que ${}^t\varphi'$ est injective. D'autre part, $K[X]_{(1+(X))}$ est un anneau de Zariski dont le complété pour la topologie adique correspondante est $K[[X]]$ (cf. la référence donnée plus haut). Il en résulte que φ' est bonne. On voit donc que ${}^t\varphi'$ est bijective bien que φ' ne le soit pas.

2/ L'injection canonique de $\mathbf{Z}[X, Y]$ dans $\mathbf{Q}[X, Y]$ vérifie la condition (C).

3/ Soit φ un élément de $\mathrm{Hom}(A, A')$, on démontre dans [7] que si φ est un épimorphisme de Ann, la restriction de ${}^t\varphi$ à $\mathrm{Spec}(A')$ est une injection. Il n'en est pas de même pour ${}^t\varphi$. Considérons par exemple l'épimorphisme suivant donné dans [7] : soit A un anneau, soit f un élément de A, l'application diagonale $\varphi : A \longrightarrow A_f \times A/Af$ associée aux homomorphismes canoniques $A \longrightarrow A_f$ et $A \longrightarrow A/Af$ est telle que ${}^t\varphi$ n'est pas injective.

Considérons, par exemple, l'anneau $A = K[X, Y]$ des polynomes à deux indéterminées sur un corps K. Soit φ l'homomorphisme diagonal : $\varphi : A \longrightarrow A_{X^2} \times A/AX^2$ et considérons les idéaux

$$I'_1 = (Y)\, A_{X^2} \times AX/AX^2 \qquad \text{et} \qquad I'_2 = (Y)\, A_{X^2} \times (AXY + AX^2)/AX^2$$

Il est clair que I'_1 et I'_2 sont des idéaux distincts. Cependant on a : $\varphi^{-1}(I'_1) = (Y) \cap (X) = (XY)$ et $\varphi^{-1}(I'_2) = (Y) \cap (AXY + AX^2) = (XY)$, cette dernière égalité provenant de la loi modulaire. Il en résulte que ${}^t\varphi$ n'est pas une application injective. Si par contre on suppose que l'anneau A est principal, l'application transposée de $\varphi : A \longrightarrow A_f \times A/Af$ est toujours injective.

Deux idéaux de $A_f \times A/Af$ peuvent toujours se mettre sous la forme suivante :

$$I'_1 = (a)^e \times (b)/Af \qquad \text{et} \qquad I'_2 = (a')^e \times (b')/Af$$

où (a), (b), (a'), (b') sont des idéaux principaux de A et e désigne l'opération d'extension des idéaux de A à A_f. Supposons que l'on ait $\varphi^{-1}(I'_1) = \varphi^{-1}(I'_2)$, on en déduit que $(a) \cap (b) = (a') \cap (b')$. Plusieurs cas sont alors à examiner. Nous étudierons le cas où les idéaux composants de I'_1 et de I'_2 sont tous propres, les autres cas se traitant de façon similaire.

Dans les conditions du cas que nous examinons, on a les hypothèses suivantes : f appartient à $\Lambda(a)$ et $\Lambda(a')$ et à (b) et (b'), les éléments b et b' ne sont pas des unités de l'anneau A. La proposition 4 du paragraphe I nous montre que a et f sont des éléments étrangers, ainsi que a' et f. Mais de $f \in (b)$ et $f \in (b')$ on déduit que les couples suivants sont formés d'éléments étrangers : (a, b), (a, b'), (a', b'), (a', b). Il en résulte les égalités : (a) = (a') et (b) = (b'). Ceci nous montre que $I'_1 = I'_2$.

4/ Soit φ un élément de $\mathrm{Hom}(A, A')$, l'injectivité de ${}^t\varphi$ n'entraine pas la platitude de φ ; exemple : l'homomorphisme canonique $\mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$.

5/ Soit φ un élément de $\mathrm{Hom}(A, A')$, la platitude de φ n'entraine pas l'injectivité de ${}^t\varphi$; exemple : soit A un anneau noethérien, l'homomorphisme canonique $A \longrightarrow A[[X]]$ est plat (cf. [4] Ch. III, Par. 3, page 70) mais ${}^t\varphi$ n'est pas injective.

Nous allons maintenant démontrer un lemme qui sera d'un usage constant dans la suite.

Lemme 1.– *Soit le diagramme commutatif d'anneaux et d'homomorphismes d'anneaux où les flèches verticales sont des homomorphismes qui vérifient la condition* (C) :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\alpha"'] & A' \arrow[d, "\alpha'"] \\ A_1 \arrow[r, "\varphi_1"] & A'_1 \end{tikzcd}$$

Alors :

1/ Si ${}^t\varphi$ est injective il en est de même pour ${}^t\varphi_1$.

2/ Si φ est du type E *il en est de même pour φ_1.*

3/ Si ${}^t\varphi$ est un homéomorphisme de $\mathfrak{I}(A')$ sur $\mathfrak{I}(A/A')$ il en est de même pour ${}^t\varphi_1$.

Preuve : 1/ résulte de : ${}^t\varphi \circ {}^t\alpha' = {}^t\alpha \circ {}^t\varphi_1$ et du fait que ${}^t\alpha'$ est injective. On démontre 2/ en utilisant le corollaire du théoréme 1 du paragraphe 6 et la continuité de ${}^t\alpha$ et ${}^t\alpha'$. La preuve de 3/ résulte alors de 1/ et 2/ et de la proposition 2 du paragraphe 6.

COROLLAIRE 1.– *Soit φ un élément de* $\mathrm{Hom}(A, A')$. *Si ${}^t\varphi$ est une application injective, on a pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de* A *ou bien $\mathfrak{m} . A' = A'$ ou bien $\mathfrak{m} . A'$ est un idéal maximal de* A' *et dans ce cas* ${}^t\varphi(\mathfrak{m} . A') = \mathfrak{m}$.

Preuve : Si $\mathfrak{m} . A' \neq A'$, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & A' \\ \downarrow & & \downarrow \\ A/\mathfrak{m} & \xrightarrow{\overline{\varphi}} & A'/\mathfrak{m} . A' \end{array}$$

Le lemme 1 montre que ${}^t\overline{\varphi}$ est injective. Or $A/\mathfrak{m}$ est un corps et $A'/\mathfrak{m} . A'$ n'est pas réduit à zéro. On en déduit que pour tout élément $\overline{I'}$ de $\mathfrak{I}(A'/\mathfrak{m} . A')$ on a ${}^t\overline{\varphi}(\overline{I'}) = {}^t\overline{\varphi}((\overline{O})) = (\overline{O})$. Il en résulte que $\overline{I'} = (\overline{O})$ et $A'/\mathfrak{m} . A'$ est un corps.

Nous noterons par $\mathrm{Sat}_S(I)$ le saturé d'un idéal I d'un anneau A pour une partie multiplicative S de A. On rappelle que si α est l'application canonique $A \longrightarrow S^{-1}A$, on a $\alpha^{-1}(S^{-1}I) = \mathrm{Sat}_S(I)$. Dans le cas où S est le complémentaire d'un idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, on utilisera la notation $\mathrm{Sat}_{\mathfrak{p}}$.

COROLLAIRE 2.– *Soit φ un élément de* $\mathrm{Hom}(A, A')$. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1/ L'application ${}^t\varphi$ est injective.

2/ Pour tout idéal premier $\mathfrak{p}'$ de A', l'application ${}^t\varphi_{\mathfrak{p}'}$ associée à l'application canonique $\varphi_{\mathfrak{p}} : A_{\mathfrak{p}} \longrightarrow A'_{\mathfrak{p}'}$ (où $\mathfrak{p} = {}^t\varphi(\mathfrak{p}')$) est injective et pour tout élément I' de $\mathfrak{I}(A')$ on a $\varphi^{-1}(\mathrm{Sat}_{\mathfrak{p}'}(I')) = \mathrm{Sat}_{\mathfrak{p}}(I)$ où $I = {}^t\varphi(I')$.

Preuve : Montrons d'abord que 1/ implique 2/. Pour tout idéal premier $\mathfrak{p}'$ de A' on a un diagramme commutatif.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & A' \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_{\mathfrak{p}} & \xrightarrow{\varphi_{\mathfrak{p}'}} & A'_{\mathfrak{p}'} \end{array}$$

dont les flèches verticales vérifient la condition (C). Par suite ${}^t\varphi_{\mathfrak{p}'}$ est injective.

Soit $\varphi(x)$ un élément de $\mathrm{Sat}_{\mathfrak{p}'}(I')$. Par définition il existe un élément s' de $A' - \mathfrak{p}'$ tel que : $s'\varphi(x) \in I'$. Mais ${}^t\varphi$ étant injective, il existe des éléments $s_1, \dots, s_n$ de A en nombre fini et deux familles d'éléments $\{s'_i\}$ et $\{a'_i\}$ de A' tels que $s' = \sum_{i=1}^{n} \varphi(s_i)\, s'_i$ et $\varphi(s_i) = a'_i\, s'$. On en déduit les deux faits suivants :

a) $s_i\, x$ appartient à $\varphi^{-1}(I')$,

b) Il y a au moins un des éléments s_i qui est tel que $\varphi(s_i)$ n'appartienne pas à $\mathfrak{p}'$. Dans le cas contraire on aurait : $s' \in \mathfrak{p}'$ ce qui est impossible. De a) et b) on déduit que $\varphi^{-1}(\mathrm{Sat}_{\mathfrak{p}'}(I')) \subset \mathrm{Sat}_{\mathfrak{p}}(I)$. L'autre inclusion étant toujours vraie, la première partie de la démonstration est faite. Montrons que 2/ implique 1/. Pour cela nous allons montrer que

$$(*)\ \forall I' \in \mathfrak{I}(A'),\ \forall\ \mathfrak{m}' \in \mathrm{Max}(A'),\ \text{on a } I'_{\mathfrak{m}'} \subset (\varphi^{-1}(I') . A')_{\mathfrak{m}'}$$

En effet d'après [3] Ch. II, par. 3, n° 3, Cor. 3 du th. 1, on aura ainsi démontré que pour tout élément I' de $\mathfrak{J}(A')$ on a $I' = \varphi^{-1}(I') \,.\, A'$. Soit donc $\mathfrak{m}'$ un élément de $\mathrm{Max}(A')$ et considérons le diagramme du début dans lequel on a remplacé $\mathfrak{p}'$ par $\mathfrak{m}'$ et $\mathfrak{p}$ par $\mathfrak{m}$. On sait que dans un diagramme commutatif d'anneaux les extensions des idéaux commutent. Pour démontrer (*) il suffit donc de prouver que $I'_{\mathfrak{m}'} \subset (\varphi^{-1}(I')_{\mathfrak{m}}) \,.\, A'_{\mathfrak{m}'}$. Or par hypothèse ${}^t\varphi_{\mathfrak{m}'}$ est injective, il en résulte que $I'_{\mathfrak{m}'} = \varphi_{\mathfrak{m}'}^{-1}(I'_{\mathfrak{m}'}) \,.\, A'_{\mathfrak{m}'}$ et ceci même dans le cas : $I'_{\mathfrak{m}'} = A'_{\mathfrak{m}'}$.

Par conséquent un élément g de $I'_{\mathfrak{m}'}$ peut s'écrire $g = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{\mathfrak{m}'}\left(\frac{a_i}{s_i}\right) \frac{a_i'}{s_i'}$ avec les conditions suivantes : $s_i \notin \mathfrak{m}$, de plus $s_i' \notin \mathfrak{m}'$ et $\varphi_{\mathfrak{m}'}\left(\frac{a_i}{s_i}\right) = \frac{\varphi(a_i)}{\varphi(s_i)} \in I'_{\mathfrak{m}'}$. Compte tenu de 2/ en ce qui concerne les saturés et du fait que $\frac{\varphi(a_i)}{1}$ appartient à $I'_{\mathfrak{m}'}$, on voit que les éléments a_i appartiennent à $\mathrm{Sat}_{\mathfrak{m}}(I)$.

Par suite $g = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{\mathfrak{m}'}\left(\frac{a_i}{1}\right) \frac{a_i'}{\varphi(s_i)s_i'}$ avec $\frac{a_i}{1}$ appartenant à $(\varphi^{-1}(I'))_{\mathfrak{m}}$. L'inclusion cherchée en résulte immédiatement.

THEOREME 2.– *Soit φ un élément de* $\mathrm{Hom}(A, A')$. *Si l'application ${}^t\varphi$ est injective on a :*

Quel que soit I' *élément de* $\mathfrak{J}(A')$ *on a* $\mathrm{Assf}_A(A/I) = {}^t\varphi(\mathrm{Assf}_{A'}(A'/I'))$ *où* $I = {}^t\varphi(I')$ *et on peut remplacer* I' *par* $I \,.\, A'$.

Preuve : Compte tenu du corollaire du lemme 2 du paragraphe 6, il suffit de démontrer que

$$ {}^t\varphi(\mathrm{Assf}_{A'}(A'/I')) \subset \mathrm{Assf}_A(A/I). $$

Soit donc $\mathfrak{p}'$ un élément de $\mathrm{Assf}_{A'}(A'/I')$. Alors il existe un élément x' de A' tel que $\mathfrak{p}'$ soit minimal dans l'ensemble des idéaux premiers de A' qui contiennent $I' : x'$. Mais l'application ${}^t\varphi$ étant injective il existe des éléments $x_1, \ldots, x_n$ en nombre fini et deux familles d'éléments x_i' et y_i' de A' tels que :

$$ x' = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\, x_i' \qquad \text{et} \qquad \varphi(x_i) = y_i'\, x'. $$

Il existe au moins un élément x_i tel que $I' : \varphi(x_i) \subset \mathfrak{p}'$. En effet si pour tout élément x_i il existait un élément g_i' de A' tel que $g_i'\varphi(x_i)$ appartienne à I' avec g_i' n'appartenant pas à $\mathfrak{p}'$, on aurait : $I' : x' \not\subset \mathfrak{p}'$ (on aurait $g_1' \ldots, g_n'\, x' \in I'$ et $g_1' \ldots, g_n' \notin \mathfrak{p}'$) ce qui est en contradiction avec l'hypothèse sur $\mathfrak{p}'$.

Appelons x un des x_i tels que $I' : \varphi(x) \subset \mathfrak{p}'$. En utilisant la formule donnée dans la démonstration du corollaire du lemme 2 du paragraphe 6 on obtient que $\varphi^{-1}(I') : x \subset \varphi^{-1}(\mathfrak{p}')$. D'autre part les inclusions $I' : x' \subset I' : \varphi(x) \subset \mathfrak{p}'$ montrent que $\mathfrak{p}'$ est un idéal premier minimal dans l'ensemble des idéaux premiers de A' qui contiennent $I' : \varphi(x)$.

Posons $J = \varphi^{-1}(I') : x$ et $J' = I' : \varphi(x)$. On a ${}^t\varphi(J') = J$ et un diagramme commutatif

$$ \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & A' \\ \downarrow & & \downarrow \\ B = A/J & \xrightarrow{\bar\varphi} & A'/J' = B' \end{array} $$

De ce qui précède on déduit que $p' = \mathfrak{p}'/J'$ est un élément de $\mathrm{Min}(B')$.

La démonstration sera terminée si l'on prouve que ${}^t\bar\varphi(p') = \varphi^{-1}(\mathfrak{p}')/J$ est un élément de $\mathrm{Min}(B)$. Si ${}^t\bar\varphi(p')$ n'appartient pas à $\mathrm{Min}(B)$, il existe un élément p de $\mathrm{Min}(B)$ tel que : $p \subset {}^t\bar\varphi(p')$. Or $\bar\varphi$ est une application injective et on sait d'après [3] Ch. II, par. 2, page 96 qu'il existe un élément q' de $\mathrm{Min}(B')$ tel que $p = {}^t\bar\varphi(q')$. Or l'injectivité de ${}^t\varphi$ se transmet à ${}^t\bar\varphi$ puisque les flèches du diagramme commutatif ci-dessus vérifient la condition (C). De l'inclusion $p = {}^t\bar\varphi(q') \subset {}^t\bar\varphi(p')$ on déduit que l'on a $q' \subset p'$ et donc $p = {}^t\bar\varphi(p')$, puisque $p' = q'$.

Remarque.– On obtient en utilisant ce théorème le corollaire 1 de la proposition 1, mais le théorème précédent est beaucoup plus précis.

Definition 1.– Soit φ un élément de Hom(A , A′). L'homomorphisme φ est dit monomorphisme très essentiel de Ann si φ est un monomorphisme de Ann (i.e. une injection) et si pour tout I′ élément de $\mathfrak{J}(A')$ l'homomorphisme canonique déduit de φ par passage au quotient : $A/{}^t\varphi(I') \longrightarrow A'/I'$ est un monomorphisme essentiel de Ann.

Proposition 3.– *Soit φ un élément de* Hom(A , A′). *On a les assertions équivalentes :*

a) *L'application ${}^t\varphi$ est injective,*

b) *L'application φ se factorise en $\varphi = m \circ s$ où s est un homomorphisme surjectif et m un monomorphisme très essentiel.*

Preuve : Montrons d'abord que l'injectivité de ${}^t\varphi$ et l'injectivité de φ entrainent que φ est un monomorphisme essentiel de Ann. Soit donc ψ un élément de Hom(A′ , A″) tel que $\psi \circ \varphi$ soit une injection. Alors $({}^t\varphi \circ {}^t\psi)((O)) = (O)$, mais puisque φ est injective on a ${}^t\varphi((O)) = (O)$. Il résulte de l'injectivité de ${}^t\varphi$ que l'on a ${}^t\psi((O)) = (O)$. Par conséquent ψ est injective et φ est un monomorphisme essentiel.

Supposons maintenant que ${}^t\varphi$ soit injective. L'application φ se factorise suivant le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "s"'] & A' \\ & A/\mathrm{Ker}(\varphi) \arrow[u, "m"'] \end{tikzcd}$$

où s et m sont les homomorphismes canoniques. Pour prouver b) il suffit de montrer que m est un monomorphisme très essentiel. Mais les applications m et ^{t}m sont injectives et ces propriétés se conservent dans les passages aux quotients à effectuer. Il résulte de ce qui a été vu au début de la preuve que m est un monomorphisme très essentiel.

Réciproquement, supposons que l'on puisse écrire $\varphi = m \circ s$ où s est une surjection et m un monomorphisme très essentiel. L'application ^{t}s étant injective, tout revient à prouver qu'un monomorphisme très essentiel $m : A \longrightarrow A'$ a une application transposée ^{t}m qui est injective. Soit donc I′ un élément de $\mathfrak{J}(A')$ et $I = {}^tm(I')$. L'hypothèse sur m entraine que l'application $A/I \longrightarrow A'/I.A'$ déduite de m par passage aux quotients est un monomorphisme essentiel, puisque $I = m^{-1}(I\,.\,A')$. D'autre part l'application composée : $A/I \longrightarrow A'/I\,.\,A' \longrightarrow A'/I'$ est une injection. Par suite $A'/I\,.\,A' \longrightarrow A'/I'$ est une injection et donc $I' = I\,.\,A'$. Ceci démontre que ^{t}m est une injection.

Proposition 4.– *Soit φ un élément de* Hom(A , A′) *tel que φ soit un homomorphisme plat et que φ satisfasse la condition b) de la proposition 2 du paragraphe VI, alors φ est du type* E.

Preuve : Elle se fait en deux étapes :

a) Pour tout élément I′ de $\mathfrak{J}(A')$ on a $\varphi(\Lambda(\varphi^{-1}(I'))) = \Lambda(\varphi^{-1}(I')\,.\,A') \cap \varphi(A)$. En effet, d'après [3] Ch. I, Ex. 22, la platitude de φ entraine que pour tout élément I de $\mathfrak{J}(A)$ et pour tout élément x de A, on a : $I\,.\,A' : \varphi(x) = (I : x)\,.\,A'$. On en déduit que $\varphi(\Lambda(\varphi^{-1}(I')) \subset \Lambda(\varphi^{-1}(I')\,.\,A') \cap \varphi(A)$. L'autre inclusion est évidente.

b) Pour tout élément I′ de $\mathfrak{J}(A')$ on a $\Lambda(I') = \Lambda(\varphi^{-1}(I')\,.\,A')$. Supposons, en effet, de manière plus générale que : $\Lambda(\varphi^{-1}(I')) \subset \Lambda(\varphi^{-1}(J'))$. Alors de la proposition 2 du paragraphe 6 on déduit que $\Lambda(I') \subset \Lambda(J')$. Donc $\Lambda(\varphi^{-1}(I')) = \Lambda(\varphi^{-1}(J'))$ entraine $\Lambda(I') = \Lambda(J')$ et puisque $\varphi^{-1}(I') = \varphi^{-1}(\varphi^{-1}(I')\,.\,A')$ on a le résultat cherché.

De a) et b) on tire : $\Lambda(\varphi^{-1}(I')) \subset \varphi^{-1}(\Lambda(I'))$. Donc φ est du type E.

Remarque.– Lorsque φ est du type E on a toujours pour un élément I de $\mathfrak{J}(A/A')$ l'égalité :

$$\varphi(\Lambda(I)) = \Lambda(I\,.\,A') \cap \varphi(A).$$

Proposition 5.– *Soit φ un élément de* Hom(A , A′). *Si l'application ${}^t\varphi$ est injective et ouverte de $\mathfrak{I}(A')$ dans $\mathfrak{I}(A)$, alors pour tout élément* I′ *de $\mathfrak{I}(A')$ l'application canonique $\varphi_{I'} : A_{A(I)} \longrightarrow A'_{A(I')}$ où $I = {}^t\varphi(I')$ est fidèlement plate. On en déduit en particulier que φ est une application plate.*

Preuve : Pour un élément I′ de $\mathfrak{I}(A')$, l'injectivité de ${}^t\varphi$ permet de conclure à l'existence d'une application $\varphi_{I'}$ telle que l'on ait un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & A' \arrow[d] \\ A_{A(I)} \arrow[r, "\varphi_{I'}"] & A'_{A(I')} \end{tikzcd}$$

D'autre part il est clair que $\mathfrak{I}(A'/A'_{A(I')}) = \bigcap_{f' \in A(I')} Y_{f'}$, ce résultat étant une application directe de la proposition 1, corollaire 5. L'injectivité de ${}^t\varphi$ entraine : ${}^t\varphi\,(\mathfrak{I}(A'/A'_{A(I')})) = \bigcap_{f' \in A(I')} {}^t\varphi(Y_{f'})$. Puisque ${}^t\varphi$ est une application ouverte, ${}^t\varphi(Y_{f'})$ est un voisinage de $I = {}^t\varphi(I')$ dans $\mathfrak{I}(A)$. D'autre part on a vu que $\mathfrak{I}(A/A_{A(I)})$ est le générisé dans $\mathfrak{I}(A)$ de l'ensemble $\{I\}$, c'est-à-dire que les éléments J de $\mathfrak{I}(A/A_{A(I)})$ sont ceux tels que : $I \in \overline{\{J\}}$. Il en résulte que tout voisinage de I contient tous les éléments J de $\mathfrak{I}(A/A_{A(I)})$, et que par suite : $\mathfrak{I}(A/A_{A(I)}) \subset {}^t\varphi\,(\mathfrak{I}(A'/A'_{A(I')}))$. La continuité de ${}^t\varphi$ donne l'inclusion en sens contraire, d'où l'égalité : $\mathfrak{I}(A/A_{A(I)}) = {}^t\varphi(\mathfrak{I}(A'/A'_{A(I')}))$. L'application ${}^t\varphi_{I'}$ est injective puisque les flèches verticales du diagramme vérifient la condition (C). Elle est aussi surjective, ceci résultant de l'égalité :

$${}^t\varphi(\mathfrak{I}(A'/A'_{A(I')})) = \mathfrak{I}(A/A_{A(I)}).$$

La proposition 2 nous montre alors que $\varphi_{I'}$ est fidèlement plate.

Quelques remarques :

1/ Soient φ un élément de Hom(A , A′) et ψ_1 et ψ_2 des éléments de Hom(A′ , A″). Supposons ${}^t\varphi$ injective et que $\psi_1 \circ \varphi = \psi_2 \circ \varphi$, il est clair que ${}^t\psi_1 = {}^t\psi_2$. Par suite l'élément $\widetilde{\varphi}$ de $\mathrm{Hom}(A, A')/R_{A,A'}$ est un épimorphisme de la catégorie Ann_R. Il y a des analogies entre les épimorphismes de Ann et les morphismes de cette même catégorie dont les transposés sont injectifs. Les deux ensembles ne sont pas disjoints, mais ils ne coincident pas comme on l'a vu.

2/ Nagata a montré dans "Local Rings" que si un élément de Hom(A , A′) est une application plate et si $I \in \mathfrak{I}(A)$ entraine que $I . A' \in \mathfrak{I}(A')$, alors cette application est bonne. Convenons de dire qu'une application φ, élément de Hom(A , A′), est propre si : $I \in \mathfrak{I}(A)$ entraine $I . A' \in \mathfrak{I}(A')$. On en déduit que lorsqu'une application est plate il y a équivalence entre la propreté et la bonté de cette application.

On sait d'autre part que si un élément φ de Hom(A , A′) est fidèle et de type fini, il est propre (cf. par exemple [3], Ch. 2, ex. 27, Par. 2). De ce qui précède, il résulte qu'un homomorphisme fidèle, de type fini, plat, et tel que son transposé soit injectif est fidèlement plat.

VIII. IDEAUX PRIMAUX D'UN ANNEAU ET FONCTEUR ($\mathfrak{I}$, t)

L'ensemble des idéaux primaux d'un anneau, muni de la topologie qui lui a été donné plus haut, a des propriétés très voisines de celle du spectre d'un anneau. Malheureusement il n'en est pas de même dès qu'il est question d'homomorphismes. On a cependant quelques propriétés dans le cas de certains homomorphismes.

1/ Soit φ un élément de Hom(A , A′). En général ${}^t\varphi$ (Specg(A′)) n'est pas inclus dans Specg(A), comme le montre l'exemple suivant.

Soient K un corps, K[X , Y] anneau des polynomes à deux indéterminées sur K, et l'homomorphisme φ de K[X , Y] dans K[X , Y] défini par $\varphi(P)(X, Y) = P(X^3, Y^3)$ où P est un élément de K[X , Y]. L'idéal de K[X , Y], $I' = (X) \cap (Y) \cap (X, Y)^3$ est un idéal primal. En effet les idéaux (X), (Y) sont premiers et l'idéal $(X, Y)^3$ est (X , Y)-primaire. De plus la décomposition de I′ est irrédondante. Les éléments de Assf(A′/I′)

sont donc (X), (Y) et (X , Y). Leur réunion étant un idéal, I' est primal. On vérifie facilement les faits suivants : $\varphi^{-1}((X)) \not\subset \varphi^{-1}((Y))$ et de même $\varphi^{-1}((Y)) \not\subset \varphi^{-1}((X))$. Mais on voit que $\varphi^{-1}((X)) \subset \varphi^{-1}((X , Y)^3)$. Il en résulte que $\varphi^{-1}(I') = \varphi^{-1}((X)) \cap \varphi^{-1}((Y))$ et c'est une décomposition primaire irrédondante. Donc ${}^t\varphi(I')$ n'est pas un idéal primal.

2/ Soit par contre un élément φ de Hom(A , A') et supposons que Spec(A) = Max(A). Alors l'application ${}^t\varphi$ restreinte à Specg(A') a pour but Specg(A). Soit en effet I' un idéal primal de A', on sait que $A' - \Lambda(I')$ est un idéal premier de A' et que $A - \Lambda({}^t\varphi(I')) \subset \varphi^{-1}(A' - \Lambda(I'))$. Or $A - \Lambda({}^t\varphi(I'))$ est une réunion d'idéaux premiers, et donc maximaux, de A. Ces idéaux étant contenus dans l'idéal propre $\varphi^{-1}(A' - \Lambda(I'))$, ils sont tous égaux à cet idéal. Donc $A - \Lambda(I)$ est un idéal et $I = {}^t\varphi(I')$ est un idéal primal.

3/ Soit φ un élément de Hom(A , A') et supposons que $\mathcal{I}(A')$ soit totalement ordonné par inclusion, (cas d'un anneau de valuation par exemple). Soit I' un idéal primal de A', on sait que $\mathrm{Assf}_A(A/I)$ est contenu dans ${}^t\varphi$ $(\mathrm{Assf}_{A'}(A'/I')$. Il en résulte que $\mathrm{Assf}_A(A/I)$ est totalement ordonné par inclusion et que par suite $I = {}^t\varphi(I')$ est un idéal primal. On remarquera que l'hypothèse faite sur A' entraine : $\mathcal{I}(A') = \mathrm{Specg}(A')$. On retrouve aussi le fait que tout v-idéal (cf. par. 2) est un idéal primal.

Proposition 1.– *Soit φ un élément de* Hom(A , A').

a) *Si l'application φ est du type* E, *la restriction de ${}^t\varphi$ à* Specg(A) *a une image contenue dans* Specg(A) *et est une application continue.*

b) *Si l'application ${}^t\varphi$ est une injection, alors ${}^t\varphi$ restreinte à* Specg(A') *est un homéomorphisme de* Specg(A') *sur son image dans* Specg(A).

Preuve : a) est évident puisque pour tout élément I' de $\mathcal{I}(A')$ on a $\varphi^{-1}(\Lambda(I')) = \Lambda(\varphi^{-1}(I'))$. Pour prouver b) il suffit de montrer que l'application ${}^t\varphi$ considérée comme application de Specg(A') sur son image dans Specg(A) est fermée. On va prouver que pour tout idéal I' de $\mathcal{I}(A')$ on a ${}^t\varphi(\mathrm{Vg}(I')) = \mathrm{Vg}(I) \cap \mathrm{Im}({}^t\varphi)$. Seule l'inclusion $\mathrm{Vg}(I) \cap \mathrm{Im}({}^t\varphi) \subset {}^t\varphi(\mathrm{Vg}(I'))$ présente quelques difficultés. Soit donc P un élément de $\mathrm{Vg}(I) \cap \mathrm{Im}({}^t\varphi)$ alors on a $P = \varphi^{-1}(P')$ avec P élément de Vg(I). On en déduit l'inclusion

$$\varphi^{-1}(I') \subset \varphi^{-1}(A' - \Lambda(P')) \ ;$$

or P' est primal et donc $A' - \Lambda(P')$ est stable par addition ; de plus ${}^t\varphi$ étant injective on a $I' = \varphi^{-1}(I') \,.\, A'$. On déduit de ce qui précède que : $I' \subset A' - \Lambda(P')$. Donc P' appartient à $\mathrm{Vg}(I')$ et l'inclusion est démontrée.

IX. CHANGEMENT DE L'ANNEAU DES SCALAIRES D'UN MODULE ET SUPPORT GENERALISE

Dans ce paragraphe, on utilisera plusieurs fois, sans le dire, le résultat suivant : si le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"'] & B \arrow[d, "\gamma"] \\ & C \end{tikzcd}$$

est un diagramme commutatif d'anneaux et de morphismes d'anneaux, l'isomorphisme canonique de C-modules : $C \otimes_C B = B$ est aussi un isomorphisme de A-modules pour les structures suivantes : B est un A-module par α, la structure de A-module de C est définie par β et celle de A-module de $C \otimes_C B$ est définie par $a(c \otimes b) = a\,c \otimes b$. Comme nous l'avons fait ci-dessus les isomorphismes seront notés par le signe =.

Proposition 1.– *Soit φ un élément de* Hom(A , A') *qui soit du type* E. *Si l'on désigne par $\varphi^*(M)$ le produit tensoriel $M \otimes_A A'$ pour un A-module M on a* $S(\varphi^*(M)) \subset ({}^t\varphi)^{-1}\,(S(M))$.

Preuve : C'est pour l'essentiel celle de [3], Ch. 2, Par. 4, n° 4, prop. 19. Soit un élément I' de $S(\varphi^*(M))$, on a donc $(M \otimes_A A') \otimes_{A'} A'_{\Lambda(I')} \neq 0$. Du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & A' \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_{\Lambda(I)} & \xrightarrow{\varphi_{I'}} & A'_{\Lambda(I')} \end{array}$$

où $I = {}^t\varphi(I')$ et provenant de : $\varphi \in E(A, A')$, on déduit la suite d'isomorphismes :

$$(M \otimes_A A') \otimes_{A'} A'_{\Lambda(I')} = M \otimes_A A'_{\Lambda(I')} = (M \otimes_A A_{\Lambda(I)}) \otimes_{A_{\Lambda(I)}} A'_{\Lambda(I')}$$

Par suite $M \otimes_A A_{\Lambda(I)}$ est différent de zéro et ${}^t\varphi(I')$ appartient à $S(M)$. Si M est de type fini, peut-on conclure à l'égalité ? Nous allons donner une réponse partielle à cette question.

Supposons que pour l'élément I' de $\mathfrak{I}(A')$ on ait $(M \otimes_A A')_{\Lambda(I')} = 0$. On a toujours l'égalité

$$(M \otimes_A A')_{\Lambda(I')} = (M \otimes_A A_{\Lambda(I)}) \otimes_{A_{\Lambda(I)}} A'_{\Lambda(I')}$$

On est donc dans la situation suivante : $E = M \otimes_A A_{\Lambda(I)}$ est un C-module de type fini où $C = A_{\Lambda(I)}$ et on a un homomorphisme d'anneaux $\Psi : C \longrightarrow D$ où Ψ est $\varphi_{I'}$ et où $D = A'_{\Lambda(I')}$ qui est tel que $E \otimes_C D = 0$.

Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de D, alors $\Psi_{\mathfrak{p}} : C_{\Psi^{-1}(\mathfrak{p})} \longrightarrow D_{\mathfrak{p}}$ est un homomorphisme local satisfaisant au diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\Psi} & D \\ \downarrow & & \downarrow \\ C_{\Psi^{-1}(\mathfrak{p})} & \xrightarrow{\Psi_{\mathfrak{p}}} & D_{\mathfrak{p}} \end{array}$$

On en déduit la suite d'isomorphismes : $(E \otimes_C D) \otimes_D D_{\mathfrak{p}} = E \otimes_C (D \otimes_D D_{\mathfrak{p}})$égal encore à $E \otimes_C D_{\mathfrak{p}}$. Or on a $D_{\mathfrak{p}} = C_{\Psi^{-1}(\mathfrak{p})} \otimes_{C_{\Psi^{-1}(\mathfrak{p})}} D_{\mathfrak{p}}$, isomorphisme de ($C_{\Psi^{-1}(\mathfrak{p})}$, C-modules). Donc on a les isomorphismes :

$$(E \otimes_C D) \otimes_D D_{\mathfrak{p}} = E \otimes_C (C_{\Psi^{-1}(\mathfrak{p})} \otimes_{C_{\Psi^{-1}(\mathfrak{p})}} D_{\mathfrak{p}} = (E \otimes_C C_{\Psi^{-1}(\mathfrak{p})}) \otimes_{C_{\Psi^{-1}(\mathfrak{p})}} D_{\mathfrak{p}}$$

Or l'homomorphisme $\Psi_{\mathfrak{p}}$ est local et $E \otimes_C C_{\Psi^{-1}(\mathfrak{p})}$ est un module de type fini sur $C_{\Psi^{-1}(\mathfrak{p})}$. On sait d'après [3] Ch II, n° 4, Par. 4, lemme 4 que, puisque $(E \otimes_C C_{\Psi^{-1}(\mathfrak{p})}) \otimes_{C_{\Psi^{-1}(\mathfrak{p})}} D_{\mathfrak{p}} = 0$, on a $E \otimes_C C_{\Psi^{-1}(\mathfrak{p})} = 0$.

On a donc prouvé, en désignant par e' l'opération d'extension des idéaux de A' à $A'_{\Lambda(I')}$, que :
Quel que soit l'élément $\mathfrak{p}'^{e'}$ de $\mathrm{Spec}(A'_{\Lambda(I')})$ on $a(M_{\Lambda(I)})_{\varphi_{I'}^{-1}(\mathfrak{p}'^{e'})} = 0$.

On constate, par un calcul facile, que si $\mathfrak{p}'^{e'}$ est un élément de $\mathrm{Spec}(A'_{\Lambda(I')})$ on a l'égalité

$$\varphi_{I'}^{-1}(\mathfrak{p}'^{e'}) = (\varphi^{-1}(\mathfrak{p}'))^e$$

où e désigne l'opération d'extension des idéaux de A à $A_{\Lambda(I)}$. D'autre part, d'après la proposition 11, iii, n° 5, Par. 2, Ch. II de [3], il est clair que $(A_{\Lambda(I)})_{(\varphi^{-1}(\mathfrak{p}'))^e}$ et $A_{\varphi^{-1}(\mathfrak{p}')}$ sont des anneaux et des A-modules isomorphes.

On en déduit la suite d'isomorphismes :

$$(M_{\Lambda(I)})_{\varphi_{I'}^{-1}(\mathfrak{p}'^{e'})} = (M \otimes_A A_{\Lambda(I)})_{(\varphi^{-1}(\mathfrak{p}'))^e} = M \otimes_A (A_{\Lambda(I)})_{(\varphi^{-1}(\mathfrak{p}'))^e}.$$

Ces modules sont encore isomorphes à $M \otimes_A A_{\varphi^{-1}(\mathfrak{p}')}$ qui est donc nul.

PROPOSITION 2.– *Soit φ un élément de* $\mathrm{Hom}(A, A')$ *du type* E *et soit* M *un* A-*module de type fini. Si pour un élément* I' *de* $\mathfrak{I}(A')$ *on a* $(\varphi^*(M))_{\Lambda(I')} = 0$ *alors quel que soit l'élément* $\mathfrak{p}'$ *de* $\mathrm{Spec}(A'/A'_{\Lambda(I')})$ *on a* $M_{\varphi^{-1}(\mathfrak{p}')} = 0$.

COROLLAIRE.– *Soit φ un élément de* $\mathrm{Hom}(A, A')$ *du type* E *et soit* M *un* A-*module de type fini et pour un élément* I' *de* $\mathfrak{I}(A')$ *posons* $I = {}^t\varphi(I')$. *Supposons que* $\omega(I) \subset {}^t\varphi(\omega(I'))$, *alors* $(\varphi^*(M))_{\Lambda(I')} = 0$ *entraine* $M_{\Lambda(I)} = 0$.

Preuve : Remarquons d'abord que la condition sur les ensembles ω n'entraine pas forcément la continuité de ${}^t\varphi$ en I'.

Soit $\mathfrak{p}^e$ un élément de $\mathrm{Max}(A_{\Lambda(I)})$, avec la même signification de e que précédemment. D'après l'hypothèse faite, on a $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{p}')$ où $\mathfrak{p}'^{e'}$ est un élément de $\mathrm{Max}(A'_{\Lambda(I')})$. On en déduit que $\mathfrak{p}^e = \varphi_{I'}^{-1}(\mathfrak{p}'^{e'})$. Or il a été montré dans la preuve de la proposition 2 que $(\varphi^*(M))_{\Lambda(I')} = 0$ entraine : pour tout élément $\mathfrak{p}'^{e'}$ de $\mathrm{Spec}(A'_{\Lambda(I')})$ on a $(M_{\Lambda(I)})_{\varphi_{I'}^{-1}(\mathfrak{p}'^{e'})} = 0$. On en déduit que pour tout élément $\mathfrak{p}^e$ de $\mathrm{Max}(A_{\Lambda(I)})$ on a $(M_{\Lambda(I)})_{\mathfrak{p}^e} = 0$ où ce qui revient au même $(M \otimes_A A_{\Lambda(I)}) \otimes_{A_{\Lambda(I)}} (A_{\Lambda(I)})_{\mathfrak{p}^e} = 0$.

On sait que $\bigoplus_{\mathfrak{p}^e \in \mathrm{Max}(A_{\Lambda(I)})} (A_{\Lambda(I)})_{\mathfrak{p}^e}$ est un $A_{\Lambda(I)}$-module fidèlement plat, il en résulte que $M_{\Lambda(I)} = 0$.

Remarque.– Soit φ un élément de $\mathrm{Hom}(A, A')$ du type E. Si on a $\mathfrak{p} \,.\, A' \cap \Lambda(I')$ vide pour tout élément $\mathfrak{p}$ de $\omega(I)$, on est alors dans les hypothèses du corollaire. Il existe en effet dans ce cas un élément $\mathfrak{p}'$ de $\omega(I')$ tel que $\mathfrak{p} \,.\, A' \subset \mathfrak{p}'$, ce qui entraine évidemment que $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{p}')$.

Soit A un anneau et M un A-module, on désignera par Sg(M) l'ensemble des idéaux primaux de A qui sont dans S(M).

Proposition 3.– *Soit φ un élément de* $E(A, A')$ *et soit* M *un* A*-module. Dans ces conditions on a* : $\mathrm{Sg}(\varphi^*(M)) \subset ({}^t\varphi_{|\mathrm{Specg}(A')})^{-1}(\mathrm{Sg}(M))$. *L'égalité a lieu lorsque* M *est de type fini sur* A.

Preuve : La première assertion est évidente. D'autre part lorsque I' est un idéal primal, $\omega(I')$ est réduit à l'idéal $A' - \Lambda(I')$. L'application φ étant du type E, on a aussi $\omega(I)$ réduit à $A - \Lambda(I)$. Donc on a $\omega(I) = {}^t\varphi(\omega(I'))$. Puisque M est de type fini, la preuve résulte du corollaire précédent.

Proposition 4.– *Soit φ un élément de* $\mathrm{Hom}(A, A')$ *satisfaisant à la condition* (C) *et soit* M *un* A*-module de type fini. Désignons par* K *l'annulateur sur* A *de* M *et par* K' *l'annulateur sur* A' *de* $\varphi^*(M)$. *On suppose que* $K = {}^t\varphi(K')$, *alors* : $({}^t\varphi)^{-1}(S(M)) = S(\varphi^*(M))$.

Preuve : On vérifie comme dans [3] Ch. II, Par. 4, n° 4, Prop. 17, que $S(M) = S(A/K) = W(K)$, lorsque M est un A-module de type fini. Puisque φ est du type E on en déduit que $({}^t\varphi)^{-1}(S(M)) = W(\varphi(K))$. Mais φ vérifiant (C) et ayant $K = {}^t\varphi(K')$, on a $W(\varphi(K)) = W(K')$. Puisque $W(K') = S(\varphi^*(M))$, on voit que la proposition est démontrée.

X. CONSTRUCTION DE FAISCEAUX SUR $\mathfrak{I}$(A) ET SPECG(A)

Ce qui suit s'inspire de [5] Ch. I. On se rapportera pour les notations à cet ouvrage. On rappelle le lemme :

Lemme.– Soient A un anneau et M un A-module. Soit f un élément de A, on désigne par S_f la partie multiplicative engendrée par f et par S'_f la partie multiplicative saturée associée à S_f. Les assertions suivantes, relatives à deux éléments f et g de A, sont équivalentes :

$$\text{a) } g \in S'_f \quad ; \quad \text{b) } S'_g \subset S'_f \quad ; \quad \text{c) } \sqrt{Af} \subset \sqrt{Ag} \quad ; \quad \text{d) } W(g) \subset W(f) \quad ; \quad \text{e) } Y_f \subset Y_g .$$

On fait alors la même théorie que dans [5]. On désigne par $\mathcal{Y}(I)$ l'ensemble des ouverts Y_f qui contiennent l'élément I de $\mathfrak{I}(A)$. On ordonne cet ensemble par la relation d'ordre opposée à l'inclusion. On désigne par $\rho_{f,g}$ l'application canonique de M_f dans M_g définie par l'inclusion : $Y_f \supset Y_g$. Le système $(M_f, \rho_{f,g})$ indexé par $\mathcal{Y}(I)$ est alors un système inductif. Si l'on remarque que $\Lambda(I) = \bigcup_{f \in \Lambda(I)} S'_f$, on voit que le système inductif précédent a pour limite inductive le $A_{\Lambda(I)}$-module $M_{\Lambda(I)}$.

Definition 1.– On appelle faisceau complet de l'anneau A (resp. faisceau complet associé au A-module M) et on désigne par $\hat{A}$ (resp. $\widehat{M}$), le faisceau d'anneaux (resp. le $\hat{A}$-module) associé au préfaisceau $Y_f \longrightarrow A_f$ (resp. $Y_f \longrightarrow M_f$) sur la base d'ouverts de $\mathfrak{I}(A)$ formée par les ouverts Y_f. On sait d'après [5] que la fibre $\hat{A}_I$ (resp. $\widehat{M}_I$) s'identifie à $A_{\Lambda(I)}$ (resp. $M_{\Lambda(I)}$).

On désigne par θ_f l'application canonique de M_f dans $\Gamma(Y_f, \widehat{M})$ définie par $\theta_f(x) = (\rho_I^f(x))_{I \in Y_f}$ et où ρ_I^f est l'application canonique de M_f dans $M_{\Lambda(I)}$.

PROPOSITION.— *Pour tout* A-*module* M *et tout élément* f *de* A, *l'homomorphisme canonique* θ_f *de* M_f *dans* $\Gamma(Y_f, \widehat{M})$ *est injectif.*

Preuve : Il suffit d'adapter celle de [5] Ch. I, prop. 1.3.7.

REMARQUE.— On peut construire un faisceau $\check{A}$ sur Specg(A) par le même procédé. Cette fois l'application θ_f est bijective. On peut le démontrer directement, de la même façon que dans [5]. On a vu dans le paragraphe 4 que Spec(A) est très dense dans Specg(A). Donc l'injection canonique i de Spec(A) dans Specg(A) est un quasi-homéomorphisme (cf. [5], Ch. IV, Par. 10, n° 10.2) et il est continu. On sait alors que le foncteur $\mathcal{F} \longrightarrow i^*(\mathcal{F})$ est une équivalence de la catégorie des faisceaux d'anneaux sur Specg(A) dans la catégorie des faisceaux d'anneaux sur Spec(A).

BIBLIOGRAPHIE

[1] SHREERAM ABHYANKAR.— *Ramification theoretic methods in algebraic geometry* (1959).

[2] O. ZARISKI and P. SAMUEL.— *Commutative Algebra.* (Van Nostrand Company) (1963).

[3] N. BOURBAKI.— *Algebre commutative,* Ch. I, Ch. II, (Hermann) (1961).

[4] N. BOURBAKI.— *Algebre commutative,* Ch. III, Ch. IV, (Hermann) (1967).

[5] A. GROTHENDIECK.— *Elements de géométrie algébrique* (P.U.F.).

[6] N. BOURBAKI.— *Topologie générale,* Ch. I, (Hermann) (1961).

[7] Séminaire Samuel.— (Secrétariat Mathématique Paris) (1968).

[8] A. BESSERRE.— Thèse de l'Université de Clermont-Ferrand (1968).

Département de Mathématiques
de la Faculté des Sciences
Université de Clermont-Ferrand
Avril 1969.