ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

JACQUES BERNARD

Sur les automorphismes du demi groupe des applications d'un ensemble dans lui-même

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 43, série *Mathématiques*, n° 6 (1970), p. 1-19

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1970__43_6_1_0>

SUR LES AUTOMORPHISMES DU DEMI GROUPE DES APPLICATIONS D'UN ENSEMBLE DANS LUI-MEME

Jacques BERNARD

INTRODUCTION

Cet article a pour objet l'étude des automorphismes du demi groupe E^E des applications d'un ensemble E dans lui-même.

S'il est en effet clair que pour toute bijection θ de E dans E l'application

$$f \to \theta \circ f \circ \theta^{-1}$$

de E^E dans E^E constitue un automorphisme de E^E, il apparaît que réciproquement tout automorphisme de E^E est de cette forme.

Autrement dit tout automorphisme de E^E est un automorphisme "intérieur".

De cette propriété il résulte en outre que le groupe de permutations d'un ensemble E est isomorphe au groupe des automorphismes du demi groupe E^E.

Ces résultats, établis dans un cadre plus général avec l'introduction de la notion de partie de E^E "représentative" de E, font l'objet de la partie I.

Les résultats obtenus dans la première partie sont ensuite étendus au cas où la connaissance de l'ensemble E est précisée par la donnée d'un certain nombre de relations ; ceci au cours de la deuxième partie.

- PREMIERE PARTIE -

DEFINITIONS ET NOTATIONS

Dans tout ce qui suit E désignera un ensemble quelconque, et E^E l'ensemble des applications de E dans E.

On sait que E^E est un demi groupe pour la loi $\circ$ de composition des applications.

Soit $\widetilde{\mathcal{N}}$ un sous demi groupe de E^E. Nous dirons qu'une application Γ de $\widetilde{\mathcal{N}}$ dans $\widetilde{\mathcal{N}}$ est un automorphisme de $\widetilde{\mathcal{N}}$ (sous entendu pour la loi $\circ$) si à la fois

- Γ est une permutation de $\mathcal{N}$
- $\forall f \in \widetilde{\mathcal{N}} \quad \forall g \in \widetilde{\mathcal{N}} \quad \Gamma\,[f \circ g] = \Gamma\,[f] \circ \Gamma\,[g]$

Définition 1

Soit alors $\mathcal{N}$ une partie quelconque de E^E. Nous appellerons encore <u>automorphisme de $\mathcal{N}$</u> toute application Γ de $\mathcal{N}$ dans $\mathcal{N}$ telle que

- Γ est une bijection de $\mathcal{N}$ dans $\mathcal{N}$
- Γ est la restriction à $\mathcal{N}$ d'un automorphisme du demi-groupe $\widetilde{\mathcal{N}}$ engendré par $\mathcal{N}$.

Le groupe des permutations d'un ensemble E sera noté $\mathcal{A}(E)$.

L'ensemble des automorphismes pour la loi $\circ$ d'une partie $\mathcal{N}$ de E^E sera noté $\mathcal{A}(\mathcal{N}, \circ)$.

Remarque

Pour toute partie $\mathcal{N}$ de E^E, l'ensemble $\mathcal{A}(\mathcal{N}, \circ)$ forme un groupe pour la loi de composition (notée "$\circ$" elle aussi) des applications de E^E dans lui-même.

Définition 2

Une partie $\mathcal{N}$ de E^E sera dite représentative de E si elle possède les deux propriétés suivantes :

(R_1) : les applications constantes de E dans E appartiennent à $\mathcal{N}$

(R_2) : pour toute permutation θ de E

$$\theta \circ \mathcal{N} \circ \theta^{-1} \subset \mathcal{N}.$$

Remarque

Lorsque l'on considère le résultat que nous nous proposons d'établir (théorème 1) il est logique de se demander si le demi groupe engendré par une partie représentative quelconque n'est pas égal à E^E tout entier.

Deux contre exemples simples montrent qu'il n'en est rien dans le cas général. Soit $\mathcal{N}_1$ l'ensemble des applications constantes de E dans E, et $\mathcal{N}_2$ la partie de E^E formée de la réunion de $\mathcal{N}_1$ et de l'ensemble de permutations de E. Il est facile de voir qu'à la fois $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$ sont des sous semi-groupes de E^E, et d'autre part que $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$ possèdent les propriétés (R_1) et (R_2).

Théorème 1

Si $\mathcal{N}$ est une partie représentative de E, une condition nécessaire et suffisante pour qu'une application Γ de $\mathcal{N}$ dans $\mathcal{N}$ soit un automorphisme de $\mathcal{N}$ est qu'il existe une permutation θ de E telle que

$$\forall\, f \in \mathcal{N} \qquad \Gamma\,[f] = \theta \circ f \circ \theta^{-1}$$

Avant d'établir trois lemmes utiles à la démonstration, remarquons que si δ_s , où s appartient à E , désigne l'application constante de E dans E :

$$x \rightarrow \delta_s(x) = s \qquad \forall x \in E$$

alors pour toute application f de E dans E , on a les deux propriétés :

$$(P_1) : f \circ \delta_s = \delta_{f(s)}$$

$$(P_2) : \delta_s \circ f = \delta_s$$

(ce qui traduit le fait que l'ensemble des applications constantes constitue un "idéal" de E^E).

Lemme 1

Si $\mathcal{N}$ est une partie de E^E contenant les applications constantes, et si Γ est un automorphisme de $\mathcal{N}$, l'image par Γ d'une application constante est une application constante.

Soit δ_s une application constante de E dans E . D'après la propriété (P_2) ci-dessus :

$$\Gamma\,[\delta_s \circ f] = \Gamma\,[\delta_s]$$

et puisque Γ respecte le produit de composition des applications de $\mathcal{N}$:

$$\Gamma\,[\delta_s] = \Gamma\,[\delta_s] \circ \Gamma\,[f]$$

Ceci pour tout s de E , et pour tout f de $\mathcal{N}$. Mais puisque Γ est une application bijective de $\mathcal{N}$ dans $\mathcal{N}$, qui contient les applications constantes :

$$\forall z \in E \qquad \exists g \in \mathcal{N} \qquad \Gamma\,[g] = \delta_z$$

Par conséquent :

$$\forall\, s \in E\ ,\ \forall\, z \in E \qquad \Gamma\,[\delta_s] \circ \delta_z = \Gamma\,[\delta_s]$$

La propriété (P_1) nous permet d'écrire :

$$\Gamma\,[\delta_s] \circ \delta_z = \delta_{\Gamma\,[\delta_s]\,(z)}$$

Ainsi

$$\forall\, s \in E\ ,\ \forall\, z \in E\ ,\ \forall\, x \in E \qquad \delta_{\Gamma[\delta_s](z)}\,(x) = \Gamma\,[\delta_s]\,(x)$$

Soit pour tout s de E

$$\forall\, x \in E \quad \forall\, z \in E \qquad \Gamma\,[\delta_s]\,(z) = \Gamma\,[\delta_s]\,(x)$$

L'application $\Gamma\,[\delta_s]$ est donc constante, et de la forme $\delta_{s'}$

<u>Lemme 2</u>

Si $\mathcal{N}$ est une partie de E^E contenant les applications constantes, et Γ un élément de $\mathfrak{A}\,(\mathcal{N}, \circ)$ l'application θ de E dans E définie par :

$$\theta : s \to s' \qquad \text{avec} \qquad \Gamma\,[\delta_s] = \delta_{s'}$$

est une bijection de E dans E .

- <u>θ est injective</u>

En effet

$$\theta\,(s) = \theta\,(t) \quad \Longleftrightarrow \quad \delta_{\theta(s)} = \delta_{\theta(t)} \Longleftrightarrow \Gamma\,[\delta_s] = \Gamma\,[\delta_t]$$

Et de plus

$$\Gamma\,[\delta_s] = \Gamma\,[\delta_t] \Longleftrightarrow \delta_s = \delta_t \Longleftrightarrow s = t$$

- θ est surjective

Soit s un élément quelconque de E.

Γ étant une bijection de $\mathcal{N}$ dans $\mathcal{N}$, et les applications constantes appartenant à $\mathcal{N}$, l'équation en f :

$$\Gamma\,(f) = \delta_s$$

admet une solution et une seule dans $\mathcal{N}$:

$$f = \Gamma^{-1}\,[\delta_s]$$

Or Γ^{-1} est encore un automorphisme de $\mathcal{N}$, et d'après le lemme 1

$$\exists t \in E \qquad \Gamma^{-1}\,[\delta_s] = \delta_t$$

Il est alors clair que :

$$\theta\,(t) = s$$

Remarque

$$\forall\, x \in E \quad \forall\, y \in E \qquad \Gamma\,[\delta_x]\,(y) = \delta_{\theta(x)}\,(y) = \theta\,(x)$$

Lemme 3

Si $\mathcal{N}$ est une partie de E^E contenant les applications constantes, et Γ un élément de $\mathcal{G}(\mathcal{N}, \circ)$ il existe une permutation θ de E telle que

$$\forall\, f \in \mathcal{N} \quad \Gamma\,[f] = \theta_\circ f_\circ \theta^{-1}$$

Soit Γ un élément de $\mathcal{G}(\mathcal{N}, \circ)$ et f un élément de $\mathcal{N}$. Nous allons montrer que si θ désigne la permutation de E associée à Γ par le lemme 2, alors :

$$\Gamma\,[f] = \theta_\circ f_\circ \theta^{-1}$$

Soit x un élément quelconque de E.

Considérons $\Gamma\left[\delta_{f(x)}\right]$. D'après la remarque ci-dessus (lemme 2) :

$$\Gamma\left[\delta_{f(x)}\right](x) = \theta(f(x)) = (\theta \circ f)(x)$$

D'autre part, d'après la propriété (P_1) :

$$\Gamma\left[\delta_{f(x)}\right](x) = \Gamma\left[f \circ \delta_x\right](x)$$

Et puisque Γ respecte le produit de composition dans $\mathcal{A}$:

$$\begin{aligned} \Gamma\left[\delta_{f(x)}\right](x) &= (\Gamma[f] \circ \Gamma[\delta_x])(x) \\ &= \Gamma[f](\Gamma[\delta_x](x)) = \Gamma[f](\theta(x)) \\ &= (\Gamma[f] \circ \theta)(x) \end{aligned}$$

Ainsi pour tout x de E

$$(\Gamma[f] \circ \theta)(x) = (\theta \circ f)(x)$$

Soit

$$\Gamma[f] \circ \theta = \theta \circ f$$

Et finalement

$$\Gamma[f] = \theta \circ f \circ \theta^{-1}$$

<u>Démonstration du théorème</u>

Soit $\mathcal{A}$ une partie représentative de E. Puisqu'en particulier $\mathcal{A}$ contient les applications constantes, le lemme 3 nous montre la nécessité de la condition.

Réciproquement, soit θ une permutation de E. Considérons l'application Π_θ de E^E dans E^E telle que :

$$\forall f \in E^E \qquad \Pi_\theta[f] = \theta \circ f \circ \theta^{-1}$$

Puisque $\mathcal{A}$ est une partie représentative de E, la restriction de Π_θ à $\mathcal{A}$ prend ses valeurs dans $\mathcal{A}$, d'après l'axiome R_2.

Nous allons montrer que Π_θ , considérée comme application de $\mathcal{N}$ dans $\mathcal{N}$ est un élément de $\mathcal{A}(\mathcal{N}, \circ)$.

- Π_θ <u>est injective</u>

En effet

$\Pi_\theta[f] = \Pi_\theta[g] \Longleftrightarrow \theta\circ f\circ\theta^{-1} = \theta\circ g\circ\theta^{-1} \Longleftrightarrow f = g$

puisque θ est une bijection.

- Π_θ <u>est surjective</u>

Si f appartient à $\mathcal{N}$, l'axiome R_2 vérifié par $\mathcal{N}$ entraîne l'appartenance à $\mathcal{N}$ de l'application

$$g = \theta^{-1}\circ f\circ\theta$$

Alors

$$\Pi_\theta(g) = f$$

- Π_θ <u>est un automorphisme de $\mathcal{N}$</u>

Il suffit de voir maintenant que Π_θ est la restriction à $\mathcal{N}$ d'un automorphisme du demi groupe $\widehat{\mathcal{N}}$ engendré par $\mathcal{N}$.

Il est clair que l'application Π_θ définie sur E^E restreinte à $\widehat{\mathcal{N}}$ établit une correspondance bijective entre les éléments de $\widehat{\mathcal{N}}$.

D'autre part, pour tout élément f et tout élément g de E^E

$\Pi_\theta\,(f\circ g) = \theta\circ(f\circ g)\circ\theta^{-1} = \theta\circ f\circ(\theta^{-1}\circ\theta)\circ g\circ\theta^{-1}$

$= (\theta\circ f\circ\theta^{-1})\circ(\theta\circ g\circ\theta^{-1}) = \Pi_\theta(f)\circ\,\Pi_\theta(g)$.

<u>Remarque</u>

E^E est de toute évidence une partie représentative de E , et l'on peut appliquer le théorème précédent aux éléments de $\mathcal{G}(E^E, \circ)$. Ce qui montre que tout automorphisme Γ du demi groupe E^E est tel que :

$$\forall f \in E^E \quad \Gamma[f] = \theta \circ f \circ \theta^{-1}$$

où θ est la bijection de E dans E définie par le lemme 2.

Théorème 2

Le groupe des permutations de E est isomorphe au groupe des automorphismes de toute partie $\mathcal{N}$ de E^E représentative de E

$$\mathcal{G}(E) \simeq \mathcal{G}(\mathcal{N}, \circ)$$

Soit $\mathcal{N}$ une partie représentative de E , θ une bijection de E sur E , et Π_θ l'application de E^E dans E^E introduite lors de la démonstration du théorème 1.

Considérons alors l'application Π de $\mathcal{G}(E)$ dans $\mathcal{G}(\mathcal{N}, \circ)$ définie par :

$$\Pi : \theta \to \Pi_\theta$$

Nous allons montrer que Π est un isomorphisme de groupe entre $\mathcal{G}(E)$ et $\mathcal{G}(\mathcal{N}, \circ)$

- Π est surjective

C'est en effet une conséquence du théorème 1.

- Π est injective

Supposons avoir

$$\Pi_\theta = \Pi_\Psi \quad \text{avec } \theta \in \mathcal{G}(E) \text{ et } \Psi \in \mathcal{G}(E)$$

C'est dire

$$\forall f \in \mathcal{N} \quad \theta \circ f \circ \theta^{-1} = \Psi \circ f \circ \Psi^{-1}$$

ou encore

$$\forall f \in \mathcal{N} \quad f = \Theta^{-1} \circ \Psi \circ f \circ \Psi^{-1} \circ \Theta = (\Theta^{-1} \circ \Psi) \circ f \circ (\Theta^{-1} \circ \Psi)^{-1}$$

Ainsi

$$\forall f \in \mathcal{N} \quad f = \Lambda \circ f \circ \Lambda^{-1}$$

où Λ est la bijection de E dans E

$$\Lambda = \Theta^{-1} \circ \Psi$$

Or $\mathcal{N}$ contient les applications constantes. On doit donc avoir :

$$\forall a \in E \quad \delta_a = \Lambda \circ \delta_a \circ \Lambda^{-1}$$

Mais les propriétés (P_1) et (P_2) mises en évidence lors du théorème 1 entraînent :

$$\Lambda \circ \delta_a \circ \Lambda^{-1} = \Lambda \circ \delta_a = \delta_{\Lambda(a)}$$

Ainsi

$$\forall a \in E \quad \delta_a = \delta_{\Lambda(a)} \quad \text{soit} \quad a = \Lambda(a)$$

La bijection Λ de E dans E est donc l'application identique de E, ce qui montre

$$\Theta = \Psi$$

- <u>L'application Γ est un isomorphisme de groupe</u>

Nous voulons montrer que si Θ et Ψ sont deux bijections de E dans E

$$\Pi\left[\Theta \circ \Psi\right] = \Pi\left[\Theta\right] \circ \Pi\left[\Psi\right] \quad \text{ou encore} \quad \Pi_{\Theta \circ \Psi} = \Pi_\Theta \circ \Pi_\Psi$$

Or :

$$\begin{aligned} \forall f \in \mathcal{N} \quad \Pi_{\Theta \circ \Psi}[f] &= (\Theta \circ \Psi) \circ f \circ (\Theta \circ \Psi)^{-1} \\ &= \Theta \circ (\Psi \circ f \circ \Psi^{-1}) \circ \Theta^{-1} \\ &= \Theta \circ \Pi_\Psi[f] \circ \Theta^{-1} \\ &= \Pi_\Theta\left[\Pi_\Psi[f]\right] \end{aligned}$$

ce qui établit

$$\Pi_{\theta \circ \psi} = \Pi_{\theta} \circ \Pi_{\psi}$$

Corollaire

Le groupe des permutations de E est isomorphe au groupe des automorphismes du demi groupe E^E.

Il suffit d'appliquer le théorème précédent au cas $\mathcal{N} = E^E$.

- DEUXIEME PARTIE -

DEFINITIONS ET NOTATIONS

Nous allons maintenant prolonger les résultats de la première partie au cas où la connaissance de E est précisée par la donnée d'un certain nombre de relations (dans l'acception la plus générale du terme) sur cet ensemble.

Une relation sur un ensemble E est entièrement définie par la donnée de son graphe, c'est-à-dire d'une partie d'un ensemble de la forme E^n , ou $X \times E^n$, où X est un ensemble choisi, et n un entier positif.

La présence de l'ensemble "extérieur" X permet de représenter des situations du type : loi de composition externe, application de E dans un ensemble quelconque.

Afin d'unifier, et d'alléger l'écriture de ce qui suit, nous ferons toujours figurer un tel ensemble X dans la définition d'une relation.

Dans le cas où la présence d'un tel ensemble n'est pas nécessaire (relation binaire, ou loi de composition interne par exemple, on se ramènera au modèle proposé en introduisant un ensemble X arbitraire à un seul élément.

Autrement dit, on utilisera le fait que la partie R de E^n , et la partie $\{a\} \times R$ de $\{a\} \times E^n$ définissent la même relation sur E .

Remarque

Nous utiliserons le même symbole pour représenter une relation et son graphe.

Définition 1

Nous appellerons système de relation sur E tout ensemble de de la forme

$$\mathfrak{S} = \{R_1, R_2 \ldots R_n\}$$

où chaque élément R_i est une relation sur E, donc associé à une partie de l'ensemble $X_i \times E^{m_i}$, où $m_1, m_2, \ldots, m_n$ sont des entiers positifs, et $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des ensembles choisis (coïncidant éventuellement avec E).

Remarque

L'hypothèse de finitude dans la définition de $\mathfrak{S}$ n'intervient pas dans ce qui suit.

Définition 2

Soit R une relation sur E dont le graphe est contenu dans $X \times E^m$. Nous dirons qu'une bijection θ de E dans E préserve la relation R si

$$(x, e_1, e_2, \ldots, e_m) \in R \longleftrightarrow (x, \theta(e_1), \theta(e_2), \ldots, \theta(e_m)) \in R$$

Soit $\mathfrak{S}$ un système de relations sur E. Une bijection θ de E dans E sera qualifiée de $\mathfrak{S}$-automorphisme de E si elle préserve toutes les relations appartenant au système $\mathfrak{S}$.

Il est facile de vérifier que l'ensemble des $\mathfrak{S}$-automorphismes de E constitue un sous groupe de $\mathfrak{A}(E)$, que nous noterons $\mathfrak{A}(E, \mathfrak{S})$.

Soit alors $\mathfrak{S}$ un système de relation sur E . Nous pouvons lui associer canoniquement un système de relations $\tilde{\mathfrak{S}}$ sur E^E en considérant, pour toute valeur de l'indice i , les parties R_i de $X_i \times (E^E)^{m_i}$ définies de la façon suivante :

Un élément de $X_i \times (E^E)^{m_i}$ est de la forme :

$(x, f_1, f_2 \ldots f_{m_i})$

où x est un élément de X_i , et $f_1, f_2, \ldots f_{m_i}$ sont des applications de E dans E ; la partie $\tilde{R}_i$ sera l'ensemble des éléments de $X_i \times (E^E)^{m_i}$ vérifiant :

$\forall\, s \in E \qquad (x, f_1(s), f_2(s), \ldots f_{m_i}(s) \in R_i$

Ainsi $\tilde{\mathfrak{S}} = \{\tilde{R}_1 , \tilde{R}_2 , \ldots \tilde{R}_n\}$

Considérons maintenant une partie quelconque $\mathcal{N}$ de E^E . Nous pouvons parler de restriction à $\mathcal{N}$ du système de relations $\tilde{\mathfrak{S}}$ sur E^E en introduisant les parties $\tilde{R}_i \cap X \times (\mathcal{N})^{n_i}$ de $X \times (\mathcal{N})^{n_i}$, ceci pour toute valeur de l'indice i .

Nous obtenons ainsi un système de relation sur $\mathcal{N}$, que nous noterons encore $\tilde{\mathfrak{S}}$.

Définition 3

Nous dirons qu'une partie $\mathcal{N}$ de E^E est $\tilde{\mathfrak{S}}$-représentative de E si les deux conditions suivantes sont réalisées :

(R_1) - $\mathcal{N}$ contient les applications constantes de E dans E

(R'_2) - Pour tout $\mathfrak{S}$-automorphisme θ de E :

$$\theta \circ \mathcal{N} \circ \theta^{-1} \subset \mathcal{N}$$

<u>Définition 4</u>

Un automorphisme Γ de $\mathcal{N}$ dans $\mathcal{N}$ (au sens de la première partie), vérifiant de plus

$\forall i \quad 1 \leqslant i \leqslant n \quad \forall x \in X_i \quad \forall f_i \in \mathcal{N}$

$$(x, f_1, f_2 \ldots f_{n_i}) \in R_i \Longleftrightarrow (x, \Gamma[f_1], \Gamma[f_2] \ldots \Gamma[f_{n_i}]) \in \breve{R}_i$$

sera appelé <u>$\mathfrak{S}$-automorphisme de $\mathcal{N}$ préservant le produit de composition</u>.

Nous représenterons l'ensemble de ces applications par $\mathcal{A}(\mathcal{N}, \circ, \breve{\mathfrak{S}})$, et il est facile de vérifier que cet ensemble est un sous groupe de $\mathcal{A}(\mathcal{N}, \circ)$.

Le résultat suivant généralise alors (voir remarque) les théorèmes 1 et 2 de la première partie.

<u>Théorème</u>

Soit $\mathfrak{S}$ un système de relations sur un ensemble E, et $\mathcal{N}$ une partie $\breve{\mathfrak{S}}$-représentative de E.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une application Γ de $\mathcal{N}$ dans $\mathcal{N}$ soit un $\breve{\mathfrak{S}}$-automorphisme de $\mathcal{N}$ préservant le produit de composition est qu'il existe un $\mathfrak{S}$-automorphisme θ de E tel que :

$$\forall f \in \mathcal{N} \quad \Gamma[f] = \theta \circ f \circ \theta^{-1}$$

De plus le groupe des $\mathcal{G}$-automorphismes de E est isomorphe au groupe des $\tilde{\tilde{\mathcal{G}}}$-automorphismes de $\mathcal{N}$ préservant le produit de composition

$$\mathcal{O}(E\,,\,\mathcal{G}) \simeq \mathcal{O}(\mathcal{N},\,\circ\,,\,\tilde{\mathcal{G}})$$

Montrons d'abord la condition nécessaire et suffisante.

<u>La condition est nécessaire</u>

Soit Γ un $\tilde{\tilde{\mathcal{G}}}$-automorphisme de la partie représentative $\mathcal{N}$, préservant le produit de composition. C'est en particulier un automorphisme de au sens de la première partie, et puisque $\mathcal{N}$ contient les applications constantes de E dans E, nous savons associer à Γ, grâce au lemme 3 du théorème 1, une permutation θ de E telle que

$$\forall\, f \in \mathcal{N}\quad \Gamma\,[f] = \theta_\circ f_\circ \theta^{-1}$$

Montrons que dans le cas présent cette application θ est $\mathcal{G}$-automorphisme de E.

Pour i quelconque, $1 \leqslant i \leqslant n$, soit x un élément de X_i, et $e_1, e_2, \dots, e_{m_i}$ des éléments de E tels que

(1) $\quad (x, e_1, e_2, \dots, e_{m_i}) \in R_i$

L'écriture précédente est strictement équivalente à

$$(x, \delta_{e_1}, \delta_{e_2} \dots \delta_{e_{n_i}}) \in \tilde{\tilde{R}}_i$$

et puisque Γ est un $\tilde{\tilde{\mathcal{G}}}$-automorphisme de $\mathcal{N}$, il vient

$$(x, \Gamma\,[\delta_{e_1}]\,,\ \Gamma\,[\delta_{e_2}]\ ,\ \dots\ \Gamma\,[\delta_{e_n}]) \in \tilde{\tilde{R}}_i$$

Or

$$\Gamma\left[\delta_{e_i}\right] = \delta_{\theta(e_i)}$$

et aussi

$$(x, \delta_{\theta(e_1)}, \delta_{\theta(e_2)}, \dots \delta_{\theta(e_{n_i})}) \in \tilde{R}_i$$

ce qui est équivalent à :

$$(2) \quad (x, \theta(e_1), \theta(e_2) \dots \theta(e_{n_i})) \in R_i$$

Les hypothèses 1 et 2 étant équivalentes, la permutation θ de E est bien un $\mathcal{G}$-automorphisme de E.

Autrement dit si Γ est un élément de $\mathcal{U}(\mathcal{N}, \circ, \tilde{\mathcal{G}})$, la construction décrite dans le lemme 2 du théorème 1 associe à Γ un élément θ de $\mathcal{U}(E, \mathcal{G})$.

La condition est suffisante

Si θ est une bijection de E dans E, nous avons vu au cours du théorème 1 que la restriction à $\mathcal{N}$ de l'application Π_θ :

$$\Pi_\theta : E^E \to E^E$$

$$\Pi_\theta : f \to \theta \circ f \circ \theta^{-1}$$

est un automorphisme de $\mathcal{N}$.

Supposons que θ soit de plus un $\mathcal{G}$-automorphisme de E.

Pour i quelconque, $1 \leqslant i \leqslant n$, soit n_i un élément de X_i, et $f_1, f_2, \dots f_{m_i}$ des éléments de $\mathcal{N}$ tels que

$$(x, f_1, f_2 \dots f_{m_i}) \in \tilde{R}_i$$

C'est dire :

$$\forall s \in E \; (x, f_1(s), f_2(s), \dots f_{m_i}(s)) \in R_i$$

et en particulier

$$\forall s \in E \; (x, f_1 \; (\theta^{-1}(s)), f_2(\theta^{-1}(s)), \dots f_{m_i}(\theta^{-1}(s))) \in R_i$$

Alors puisque θ est un $\mathfrak{S}$-automorphisme de E

$$\forall s \in E \; (x, \theta \; (f_1(\theta^{-1}(s))), \theta \; (f_2(\theta^{-1}(s))), \dots \theta \; (f_{m_i} \; (\theta^{-1}(s)))) \in R_i$$

Soit encore

$$(x, \theta \circ f_1 \circ \theta^{-1}, \theta \circ f_2 \circ \theta^{-1}, \dots \theta \circ f_{m_i} \circ \theta^{-1}) \in \widehat{R}_i$$

Soit finalement, d'après la définition de Π_θ

$$(x, \Pi_\theta \; [f_1] \; , \Pi_\theta \; [f_2] \; , \dots \Pi_\theta \; [f_{m_i}]) \quad R_i$$

ce qui montre que Π_θ est un $\widehat{\mathfrak{S}}$-automorphisme de $\mathcal{N}$ préservant le produit de composition.

Autrement dit, l'appartenance de θ à $\mathfrak{A}(E, \mathfrak{S})$ entraîne l'appartenance de Π_θ à $\mathfrak{A}(\mathcal{N}, \circ, \widehat{\mathfrak{S}})$.

La deuxième partie du théorème est alors une conséquence directe de ce qui précède.

En effet, nous savons par le théorème 2 de la première partie que les groupes $\mathfrak{A}(E)$ et $\mathfrak{A}(\mathcal{N}, \circ)$ sont isomorphes. Or :

$$\mathfrak{A}(E, \mathfrak{S}) \subset \mathfrak{A}(E) \quad \text{et} \quad \mathfrak{A}(\mathcal{N}, \circ, \widehat{\mathfrak{S}}) \subset \mathfrak{A}(\mathcal{N}, \circ)$$

Il nous suffit donc de montrer que l'application Π :

$$\Pi : \mathfrak{A}(E) \to \mathfrak{A}(\mathcal{N}, \circ)$$

$$\Pi : \theta \to \Pi_\theta$$

introduite lors de la démonstration du théorème 2, et réalisant un isomorphisme entre $\mathfrak{A}(E)$ et $\mathfrak{A}(\mathcal{N}, \circ)$ vérifie de plus :

$$\Pi\left[\mathfrak{A}(E, \mathfrak{S})\right] = \mathfrak{A}(\mathcal{N}, \circ, \breve{\mathfrak{S}})$$

Or au cours de la démonstration de la présente condition nécessaire et suffisante il est successivement apparu :

$$\mathfrak{A}(\mathcal{N}, \circ, \breve{\mathfrak{S}}) \subset \Pi\left[\mathfrak{A}(E, \mathfrak{S})\right] \quad \text{et} \quad \Pi\left[\mathfrak{A}(E, \mathfrak{S})\right] \subset \mathfrak{A}(\mathcal{N}, \circ, \breve{\mathfrak{S}})$$

ce qui établit le résultat.

<u>Remarque</u>

L'application du théorème précédent au cas où le système de relation $\mathfrak{S}'$ ne comprend qu'un élément dont le graphe est $E \times E$ tout entier (ce qui revient en fait à ne supposer aucune relation sur E) permet de retrouver les résultats des théorèmes 1 et 2 de la première partie.