

ANNALES SCIENTIFIQUES  
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2  
*Série Mathématiques*

PIERRE SAMUEL

**Méchants anneaux de séries formelles**

*Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2*, tome 24, série *Mathématiques*, n° 3 (1964), p. 109-111

<[http://www.numdam.org/item?id=ASCFM\\_1964\\_\\_24\\_3\\_109\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1964__24_3_109_0)>

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# MÉCHANTS ANNEAUX DE SÉRIES FORMELLES

Pierre SAMUEL

Soit  $A$  un anneau commutatif. Rappelons qu'on note  $A[X]$  (resp.  $A[[X]]$ ) l'anneau des *polynômes* (resp. *séries formelles*) à une variable sur  $A$ , c'est-à-dire l'anneau des sommes formelles finies (resp. infinies)  $\sum_{n \geq 0} a_n X^n$  ( $a_n \in A$ ), avec l'addition et la multiplication bien connues. Ce sont là deux notions voisines, pour lesquelles théorèmes et démonstrations sont souvent parallèles. Tout au plus on doit quelque fois remplacer une démonstration dans laquelle on raisonne sur le *degré* d'un polynôme (c'est-à-dire le plus grand exposant  $n$  tel que  $a_n \neq 0$ ), par une démonstration portant sur l'*ordre* d'une série formelle (c'est-à-dire le plus petit exposant  $n$  tel que  $a_n \neq 0$ ).

## Exemples de telles démonstrations.

1/ Si  $A$  est intègre, il en est de même de  $A[X]$  et  $A[[X]]$ . On raisonne ici "par le bas". Soient  $P(X)$  et  $Q(X)$  deux polynômes (resp. séries formelles) non nuls,  $aX^p$  et  $bX^q$  leurs termes de plus bas degré (alors  $a \neq 0$  et  $b \neq 0$ ). Le terme de plus bas degré de  $P(X)Q(X)$  est  $abX^{p+q}$ ; il est non nul car  $ab \neq 0$  d'après l'intégrité de  $A$ .

2/ Si  $A$  est noethérien, il en est de même de  $A[X]$  et  $A[[X]]$ . Ici on raisonne "par le haut" pour les polynômes et "par le bas" pour les séries formelles. Voir Zariski-Samuel, "Commutative Algebra" vol. 1, ch. IV, th. 1 et vol. II, ch. VII, th. 4.

3/ Si  $A$  est complètement intégralement clos, il en est de même de  $A[X]$  et  $A[[X]]$ . Rappelons qu'un anneau  $A$  est dit complètement intégralement clos s'il est intègre et si, pour tout élément  $x$  du corps des fractions de  $A$ , l'existence d'un élément  $d \neq 0$  de  $A$  tel que  $dx^n \in A$  pour tout  $n$  (c'est-à-dire d'un dénominateur commun pour tous les  $x^n$ ) implique qu'on a  $x \in A$ . Un anneau complètement intégralement clos est intégralement clos; la réciproque est vraie lorsque l'anneau est noethérien.

Ceci étant, soit  $z$  un élément du corps des fractions de  $A[X]$  (resp.  $A[[X]]$ ), et soit  $d(X)$  un élément  $\neq 0$  de  $A[X]$  (resp.  $A[[X]]$ ) tel que  $d(X)z^n \in A[X]$  (resp.  $A[[X]]$ ) pour tout  $n$ . Notons  $K$  le corps des fractions de  $A$ ; les excellents anneaux principaux  $K[X]$  et  $K[[X]]$  étant complètement intégralement clos,  $z$  est un polynôme (resp. série formelle) sur  $K$ , que nous noterons  $z(X) = \sum_{n \geq 0} z_n X^n$ . Il s'agit de montrer que tous les coefficients de  $z(X)$  sont dans  $A$ . Sinon soit  $p$  le plus petit entier tel que  $z_p \notin A$ ; posons  $z'_p(X) = z_p X^p + z_{p+1} X^{p+1} + \dots$ ; comme  $z(X) - z'_p(X)$  a ses coefficients dans  $A$ , on a  $d(X).z'_p(X)^n \in A[X]$  (resp.  $\dots$ ) pour tout  $n \geq 0$ . Si  $dX^q$  est le terme de plus bas degré de  $d(X)$ , celui de  $d(X).z'_p(X)^n$  et  $d(z_p)^n X^{q+np}$ ; on a donc  $d(z_p)^n \in A$  pour tout  $n \geq 0$ , d'où  $z_p \in A$  puisque  $A$  est complètement intégralement clos. Contradiction. C.Q.F.D.

Mais l'analogie entre polynômes et séries formelles n'est pas complète; il y a plus de différences qu'on ne croit généralement. Je ne parlerai pas des éléments inversibles (nettement plus nombreux chez les séries formelles), mais je vais donner trois exemples de différences dues à ce que le fini n'est pas l'infini (oh! la Pallisse!!).

## I - LE CORPS DES FRACTIONS -

Etant donné un anneau intègre  $B$ , nous noterons  $cf(B)$  son corps des fractions. Soit  $A$  un anneau intègre. Le fait que les coefficients d'un polynôme sur  $cf(A)$  admettent un dénominateur commun prouve aisément qu'on a  $cf(A)[X] \subset cf(A[X])$ ; on en déduit que  $cf(A[X])$  est le corps de fonctions rationnelles  $cf(A)(X)$ .

Pour les séries formelles, l'inclusion  $\text{cf}(A)[[X]] \subset \text{cf}(A[[X]])$  n'est pas vraie en général. On a  $\text{cf}(A[[X]]) \subset \text{cf}(A)(X)$  (le second membre étant un corps) ; mais les deux membres sont en général distincts.

Voyons le dans le cas où  $A$  est l'anneau d'une valuation discrète  $v$ . Considérons une série formelle  $\sum_{n \geq 0} z_n X^n$  sur  $\text{cf}(A)$  qui appartienne à  $\text{cf}(A[[X]])$ . On a alors des éléments  $a_n, b_n$  de  $A$  tels que :

$$\left( \sum_n z_n X^n \right) \left( \sum_n a_n X^n \right) = \sum_n b_n X^n,$$

d'où :

$$z_n a_0 + z_{n-1} a_1 + \dots + z_0 a_n = b_n. \quad (1)$$

On peut supposer  $a_0 \neq 0$  sans inconvénient (sinon on divise par une puissance de  $X$ ). En utilisant (1) et les propriétés des valuations, on voit, par récurrence sur  $n$  ; qu'on a :

$$v(z_n) \geq -(n+1)v(a_0). \quad (2)$$

Ainsi la fonction  $n \rightarrow v(z_n)$  est minorée par une fonction linéaire de  $n$ .

Par exemple, si  $a$  est tel que  $v(a) > 0$ , la série  $\sum_{n \geq 0} a^{-n^2} X^n$  n'appartient pas à  $\text{cf}(A[[X]])$ , Par contre la série  $\sum_{n \geq 0} a^{-(n+1)} X^n$  appartient à ce corps des fractions puisqu'elle vaut  $1/(a-X)$ .

On peut se demander si, réciproquement, toute série  $\sum_{n \geq 0} z_n X^n$  sur  $\text{cf}(A)$  telle que  $v(z_n)$  soit minorée par une fonction linéaire de  $n$ , est dans  $\text{cf}(A[[X]])$ . La réponse est négative ; pour le montrer nous aurons besoin du lemme suivant, qui nous sera aussi utile ultérieurement :

LEMME -

Soit  $A$  un anneau intègre et  $a \in A$ . Il existe une série formelle  $u(X) = \sum_{n \geq 0} u_n X^n$  avec  $u_n \in \text{cf}(A)$  telle que :

$$a) (Xu(X))^2 - a(Xu(X)) + X = 0 ;$$

$$b) a^{2n+1} u_n \in A \text{ pour tout } n > 0.$$

En effet la relation de a) équivaut à  $u_0 u_n + u_1 u_{n-1} + \dots + u_n u_0 - a u_{n+1} = 0$  pour  $n > 0$  et  $a u_0 = 1$ . Ces relations déterminent les  $u_n$  par récurrence. De plus, si on a  $a^{2j+1} u_j \in A$  pour tout  $j \leq n$ , on a :

$$a^{2n+2} u_j u_{n-j} = (a^{2j+1} u_j) (a^{2(n-j)+1} u_{n-j}) \in A,$$

et la formule ci-dessus montre qu'on a :

$$a^{2(n+1)+1} u_{n+1} = a^{2n+3} u_{n+1} \in A ;$$

ceci démontre b) par récurrence. C. Q. F. D.

Ceci étant, prenons pour  $A$  l'anneau d'une valuation discrète  $v$  et  $a \in A$  tel que  $v(a) > 0$  ( $a \neq 0$ ). La série  $Xu(X)$  vérifie la condition de majoration par une fonction linéaire d'après b). D'après a), c'est un élément entier sur  $A[[X]]$ . Comme  $A$  est complètement intégralement clos, il en est de même de  $A[[X]]$ . Donc  $Xu(X)$  ne peut appartenir à  $\text{cf}(A[[X]])$ , car, sinon, ce serait un élément de  $A[[X]]$ .

## II - LA NOTION D'ANNEAU INTEGRALEMENT CLOS -

Rappelons qu'un anneau  $A$  est dit intégralement clos s'il est intègre et si tout élément de  $\text{cf}(A)$  qui est entier sur  $A$  est dans  $A$ . On démontre que les anneaux intégralement clos ne sont autres que les intersections d'anneaux de valuations (discrètes ou non, de hauteurs quelconques). Au moyen de ce critère (ou par une autre méthode), on démontre que, si  $A$  est intégralement clos, il en est de même de l'anneau de polynômes  $A[X]$ . Par contre :

*THEOREME 1 -*

*Il existe un anneau intégralement clos A tel que A [[X]] ne soit pas intégralement clos.*

Prenons pour A un anneau intégralement clos contenant deux éléments non nuls et non inversibles a, d tels que  $d \cdot a^n \in A$  pour tout  $n \geq 0$ , par exemple l'anneau d'une valuation de hauteur  $\geq 2$  (Notons qu'un tel anneau A ne peut être complètement intégralement clos). Construisons la série  $Xu(X)$  du lemme. D'après b) on a  $du_n \in A$  pour tout  $n \geq 0$ , de sorte que  $Xu(X) \in \text{cf}(A[[X]])$ . Comme  $u_0 = a^{-1} \notin A$ , on a  $Xu(X) \notin A[[X]]$ . Enfin  $Xu(X)$  est entier sur  $A[[X]]$  d'après a). Ainsi  $A[[X]]$  n'est pas intégralement clos.

III - LA NOTION D'ANNEAU FACTORIEL -

Rappelons qu'un anneau A est dit factoriel s'il est intègre et si tout élément de A s'exprime, de façon essentiellement unique, comme produit d'éléments extr maux (certains disent "irréductibles"). Tout anneau principal, Z par exemple, est factoriel. Si A est factoriel, il en est de même de  $A[X]$  (th. de Gauss). Par contre :

*THEOREME 2 -*

*Il existe un anneau factoriel A tel que A [[X]] ne soit pas factoriel.*

La démonstration repose sur deux résultats, dont on trouvera les démonstrations, assez compliquées, dans :

P. Samuel "On unique factorization domains", I II. J. Math. 5 (1961), 1-17 (pour le 1er).

P. Samuel "Un exemple d'anneau factoriel", Bull. Soc. Math. Sao Paulo, 1963 (pour le 2 me).

P. Samuel "Factorial rings", Cours polycopié, Tate Institute, Bombay, 1963 (pour les deux).

*PROPOSITION 1 -*

*Soient A un anneau intègre. x, y, z trois éléments de A et i, j, k trois entiers  $\geq 0$ . On suppose : Ax est premier,  $Ax \cap Ay = Axy$ ,  $z^{i-1} \notin Ax + Ay$ ,  $z^i \in Ax^j + Ay^k$ , et  $ijk - ij - jk - ki \geq 0$ . Alors A [[X]] n'est pas factoriel.*

*PROPOSITION 2 -*

*Soient K un corps,  $F(x_1, \dots, x_n)$  un polynôme à n variables sur K qu'on suppose irréductible, et isobare de poids w, lorsqu'on munit  $x_1, \dots, x_n$  de poids  $w_1, \dots, w_n > 0$ . Sii est un entier étranger à w, l'anneau  $K[x_1, \dots, x_n, z]$  où  $z^i = F(x_1, \dots, x_n)$  est factoriel.*

L'hypothèse "K est un corps" peut être affaiblie en "K est un anneau factoriel sur lequel tout module projectif de type fini est libre". Lorsque  $i \equiv 1 \pmod{w}$ , elle peut même être affaiblie en "K est un anneau factoriel".

Ceci étant, on choisit trois entiers i, j, k étrangers, deux à deux, et assez grands pour qu'on ait  $ijk - ij - jk - ki \geq 0$  (par exemple 2, 3 et 7). On prend pour F le polynôme  $x^j + y^k$  (isobare de poids jk si on munit x du poids k et y du poids j) ; alors  $A = K[x, y, z]$  avec  $z^i = x^j + y^k$  est factoriel d'après la proposition 2, tandis que  $A[[X]]$  n'est pas factoriel d'après la proposition 1.