

ANNALES SCIENTIFIQUES  
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2  
*Série Mathématiques*

ANDRÉ LICHNÉROWICZ

**Les spineurs en relativité générale**

*Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2*, tome 8, série *Mathématiques*, n° 2 (1962), p. 171-177

[http://www.numdam.org/item?id=ASCFM\\_1962\\_\\_8\\_2\\_171\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1962__8_2_171_0)

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# LES SPINEURS EN RELATIVITÉ GÉNÉRALE

André LICHNÉROWICZ  
(Collège de France - Paris)

Dans cette conférence, je me propose de montrer comment les champs spinoriels peuvent être introduits en relativité générale et de développer sur un espace-temps arbitraire, la théorie du champ de Dirac.

## 1 - LE GROUPE SPIN (4) -

a) Considérons un espace-temps de Minkowski rapporté à un repère orthonormé et désignons par  $\eta_{\alpha\beta}$  ( $\eta_{\alpha\beta} = 0$  pour  $\alpha \neq \beta$ ,  $\eta_{00} = 1$ ,  $\eta_{AA} = -1$  pour  $A = 1, 2, 3$ ) les composantes du tenseur métrique. Soit  $\{\gamma_\alpha\}$  un système de quatre matrices  $4 \times 4$  de Dirac à éléments complexes :  $\gamma_\alpha = (\gamma_{\alpha\beta}^a)$ . Les indices grecs ou indices "tensoriels" prennent les valeurs 0, 1, 2, 3, les indices latins ou indices "spinoriels" les valeurs 1, 2, 3, 4. Dire que les  $\gamma_\alpha$  sont un système de matrices de Dirac, c'est dire que l'on a l'identité :

$$(\mathbf{V}^\alpha \gamma_\alpha)^2 = - (\mathbf{V}^\alpha \mathbf{V}^\beta \eta_{\alpha\beta}) e \quad (e \text{ matrice unité}) \quad (1-1)$$

quels que soient les  $\mathbf{V}^\alpha$  complexes ; (1-1) peut se traduire par :

$$\gamma_\alpha \gamma_\beta + \gamma_\beta \gamma_\alpha = - 2 \eta_{\alpha\beta} e \quad (1-2)$$

Introduisons les matrices produits :

$$\gamma_\alpha \gamma_\beta \quad \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\gamma \quad \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\gamma \gamma_\delta \quad (1-3)$$

où les indices  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  sont supposés tous *distincts*. Les traces des matrices  $\gamma_\alpha$  et des matrices (1-3) précédentes sont toutes nulles. Par suite les 16 matrices  $4 \times 4$  obtenues en adjoignant à  $e$  et aux  $\gamma_\alpha$ , les six matrices  $\gamma_\alpha \gamma_\beta$  ( $\alpha < \beta$ ), les quatre matrices  $\gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\gamma$  ( $\alpha < \beta < \gamma$ ), et la matrice  $\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$  sont *linéairement indépendantes sur les complexes* et engendrent l'espace vectoriel des matrices  $4 \times 4$  à éléments complexes. On rappelle les propriétés suivantes des matrices de Dirac :

- 1/ Toute matrice  $4 \times 4$  qui commute avec les  $\gamma_\alpha$  est de la forme " $a e$ " où  $a$  est complexe
- 2/ Si  $\{\gamma'_\alpha\}$  est un autre système de matrices vérifiant (1-2), il existe une matrice régulière  $\Lambda$  telle que :

$$\gamma'_\alpha = \Lambda \gamma_\alpha \Lambda^{-1}$$

$\Lambda$  est définie à un facteur complexe près.

- 3/ On a :  $\det. (\gamma_\alpha) = 1$ .

b) Considérons maintenant l'espace vectoriel sur les réels ayant pour base l'ensemble des 16 matrices envisagées. D'après (1-2) tout produit de matrices  $\gamma$  peut s'exprimer par une combinaison linéaire à coefficients réels des matrices de base. Notre espace est ainsi muni d'une structure  $\Gamma$  d'algèbre associative qui est l'algèbre de Clifford engendrée par les  $\gamma_\alpha$ . Les éléments inversibles de  $\Gamma$  définissent un groupe multiplicatif  $\Gamma^*$  qui admet une structure naturelle de groupe de Lie. Introduisons le sous-espace vectoriel  $\mathcal{N}$  de  $\Gamma$  sur les réels qui admet pour base les  $\gamma_\alpha$  et étudions le sous-groupe fermé  $G$  de  $\Gamma^*$  défini par les matrices  $\Lambda$  vérifiant les deux conditions :

- 1/  $\Lambda \mathcal{N} \Lambda^{-1} \subset \mathcal{N}$ .

2/  $\det. (\Lambda) = 1$ .

En rapportant  $\Lambda \gamma_\alpha \Lambda^{-1}$  à la base  $\{\gamma_\alpha\}$  de  $\mathfrak{M}$ , on a :

$$\Lambda \gamma_\alpha \Lambda^{-1} = A_\alpha^{\lambda'} \gamma_\lambda, \quad (1-4)$$

où  $A = (A_\alpha^{\lambda'})$  est une matrice  $4 \times 4$  à éléments réels. En transformant par  $\Lambda$  la matrice  $(v^\alpha \gamma_\alpha)^2$  soit directement, soit compte-tenu de (1-1) on établit que :

$$A_\alpha^{\lambda'} A_\beta^{\mu'} \eta_{\lambda' \mu'} = \eta_{\alpha \beta}$$

Ainsi la matrice  $A$  appartient au groupe de Lorentz homogène, complet  $L(4)$  ; (1-4) définit une application  $p : \Lambda \in G \longrightarrow A \in L(4)$  qui est manifestement un *homomorphisme* de  $G$  dans  $L(4)$ .

c) Désignons par  $\underline{g}$  l'algèbre de Lie de  $G$ , par  $\underline{L(4)}$  celle de  $L(4)$ . De (1-4) on déduit par dérivation qu'à tout élément  $\lambda$  de  $\underline{g}$  correspond à l'aide de  $p$ , un élément  $\mu$  de  $\underline{L(4)}$  qui, si  $\mu^{\alpha\beta}$  est le tenseur antisymétrique contravariant correspondant, est tel que :

$$\lambda \gamma^\alpha - \gamma^\alpha \lambda = \mu^{\beta\alpha} \gamma_\beta \quad (\gamma^\alpha = \eta^{\alpha\beta} \gamma_\beta) \quad (1-5)$$

Pour que  $\lambda \in \underline{g}$ , il faut et il suffit que ce soit une solution de (1-5) pour  $\mu \in L(4)$  et que sa trace soit nulle ;  $\mu$  étant donné, cherchons les éléments  $\lambda$  correspondants par (1-5). Par produit à droite par  $\gamma_\alpha$ , on obtient l'équation équivalente :

$$4\lambda + \gamma^\alpha \lambda \gamma_\alpha = -\mu^{\alpha\beta} \gamma_\alpha \gamma_\beta \quad (1-6)$$

Or, de (1-2) on déduit aisément que  $\gamma^\rho \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\rho = 0$  si  $\alpha \neq \beta$ . Par suite :

$$\lambda = -\frac{1}{4} \mu^{\alpha\beta} \gamma_\alpha \gamma_\beta \quad (1-7)$$

vérifie (1-6) ou (1-5), et est la seule solution de trace nulle. Ainsi, l'homomorphisme  $p$  induit par  $p$  sur les algèbres de Lie est un *isomorphisme de  $\underline{g}$  sur  $\underline{L(4)}$  défini par (1-7)*.

d) Le groupe de Lorentz se compose de quatre composantes connexes. Si  $L_0(4)$  est la composante de l'identité de  $L(4)$ , les autres composantes peuvent être obtenues par produit de  $L_0(4)$  par la symétrie d'espace, par la symétrie de temps et par le produit des deux.

Soit  $G_0$  la composante connexe de l'identité de  $G$ . Du résultat concernant les algèbres de Lie, il résulte  $\dim. p(G_0) = \dim. L_0(4)$  et par suite :

$$p(G_0) = L_0(4)$$

D'autre part,  $\Lambda = \gamma_0 \in G$  fournit par (1-4) la symétrie d'espace et  $\Lambda = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \in G$  fournit de même la symétrie de temps. Il en résulte :

$$p(G) = L(4)$$

$p$  est donc un homomorphisme de  $G$  sur  $L(4)$  et son noyau est défini par les éléments commutant avec les  $\gamma_\alpha$  - donc de la forme  $a e$  ( $a$  réel) - de déterminant 1. Le noyau se compose donc des deux éléments  $\pm e$  qui appartiennent à  $G_0$ . Le groupe  $G$  sera appelé dans la suite  $\text{Spin}(4)$ . Nous énonçons :

**THEOREME** - Le groupe  $\text{Spin}(4)$ , (resp.  $\text{Spin}_0(4)$ ) est un revêtement d'ordre 2 du groupe de Lorentz  $L(4)$  (resp.  $L_0(4)$ ). La projection  $p$  de  $\text{Spin}(4)$  sur  $L(4)$  est telle que si  $A = (A_\alpha^{\lambda'}) = p\Lambda$  ( $A \in L(4)$ ,  $\Lambda \in \text{Spin}(4)$ ), on a :

$$\Lambda \gamma_\alpha \Lambda^{-1} = A_\alpha^{\lambda'} \gamma_\lambda, \quad (1-8)$$

$p^{-1}A$  se compose des deux matrices  $\pm \Lambda$  de déterminant 1 vérifiant (1-8); à  $p$  correspond un isomorphisme entre algèbres de Lie, défini par (1-5) & (1-7).  $\text{Spin}_0(4)$  est simplement connexe.

2 - ESPACE FIBRE DES REPERES SPINORIELS ET SPINEURS -

a) Soit  $V_4$  la variété espace-temps de la relativité générale. Elle est munie d'un tenseur métrique  $g$  de type hyperbolique normal et nous la rapportons exclusivement aux repères orthonormés éléments d'un fibré principal  $\mathcal{E}(V_4)$  de groupe structural  $L(4)$ . Pour de tels repères, la métrique s'écrit localement :

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} \vartheta^\alpha \vartheta^\beta$$

où les  $\vartheta^\alpha$  sont quatre formes de Pfaff définissant en chaque point  $x$  d'un ouvert  $U$  de  $V_4$  un corepère dual d'un repère orthonormé. Ainsi  $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ .

Si  $A \in L(4)$ , nous appelons *signature temporelle*  $\rho_A$  de  $A$  un nombre égal à  $\pm 1$  selon que  $A_0^0$  est positif ou négatif. Si  $\Lambda \in \text{Spin}(4)$ , sa signature temporelle  $\rho_\Lambda$  est la signature temporelle de  $A = p\Lambda$ . Une *orientation temporelle*  $\rho$  est définie sur  $V_4$  relativement aux repères  $y \in \mathcal{E}(V_4)$  par une composante  $\rho_y = \pm 1$  telle que si  $y' = yA$  on ait :

$$\rho_{y'} = \rho_y \rho_A$$

$V_4$  admet au plus deux orientations temporelles  $\rho$  et  $-\rho$ . Nous supposons dans la suite que  $V_4$  admet une *orientation ordinaire*  $\varepsilon$  et une *orientation temporelle*  $\rho$ .

b) Nous avons vu que  $\text{Spin}(4)$  est un revêtement d'ordre 2 de  $L(4)$ . Nous supposons  $V_4$  telle que de  $\mathcal{E}(V_4)$  on puisse déduire *par extension* un fibré principal  $\mathfrak{S}(V_4)$  de groupe structural  $\text{Spin}(4)$ . Lorsqu'il en est ainsi un point  $z$  de  $\mathfrak{S}(V_4)$  est dit un *repère spinoriel* et  $\mathfrak{S}(V_4)$  l'*espace fibré des repères spinoriels* ;  $\pi$  est la projection canonique de  $\mathfrak{S}(V_4)$  sur  $V_4$ ,  $p$  celle de  $\mathfrak{S}(V_4)$  sur  $\mathcal{E}(V_4)$ . Un tenseur de  $V_4$  est dit rapporté à un repère spinoriel  $z$  s'il est rapporté au repère orthonormé  $y = pz$ .

Un *1-spineur contravariant*  $\psi$  de  $V_4$  est une application  $z \rightarrow \psi(z)$  de  $\mathfrak{S}(V_4)$  dans un espace vectoriel  $M$  de matrices  $1 \times 4$  à éléments complexes, telle que :

$$\psi(z \Lambda^{-1}) = \Lambda \psi(z) \quad \Lambda \in \text{Spin}(4) \quad (2-1)$$

Si  $\psi(z) = (\psi^a)$ , les  $\psi^a$  sont les *composantes* de  $\psi$  par rapport au repère spinoriel  $z$  et (2-1) s'écrit :

$$\psi^{b'} = \Lambda_a^{b'} \psi^a \quad \Lambda = (\Lambda_a^{b'}) \quad (2-2)$$

Un *1-spineur covariant*  $\varphi$  de  $V_4$  est une application  $z \rightarrow \varphi(z)$  de  $\mathfrak{S}(V_4)$  dans l'espace  $M^*$  dual de  $M$  telle que :

$$\varphi(z \Lambda^{-1}) = \varphi(z) \Lambda^{-1} \quad \Lambda \in \text{Spin}(4) \quad (2-3)$$

Si  $\varphi(z) = (\varphi_a)$ , les  $\varphi_a$  sont les *composantes* de  $\varphi$  par rapport à  $z$  :

$$\varphi_b = \Lambda_b^a \varphi_a \quad \Lambda^{-1} = (\Lambda_b^a) \quad (2-4)$$

Les 1-spineurs contravariants engendrent un module sur l'anneau des fonctions à valeurs complexes, tandis que les 1-spineurs covariants engendrent le module dual, la forme bilinéaire fondamentale étant :

$$(\psi, \varphi) = \psi^a \varphi_a \quad (2-5)$$

c) Nous désignons par  $*$  le passage aux complexes conjugués, par  $T$  le passage d'une matrice à la matrice transposée, par  $\sim$  le passage d'une matrice à la matrice adjointe. En astreignant le système des matrices de Dirac à la condition :

$$\tilde{\gamma}_\alpha = -g_{\alpha\alpha} \gamma_\alpha \quad (2-6)$$

on démontre aisément qu'il existe une matrice  $\beta$  telle que pour tout  $\Lambda \in \text{Spin}(4)$  :

$$\tilde{\Lambda} = \rho_\Lambda \beta^{-1} \Lambda^{-1} \beta$$

où  $\rho_\Lambda$  est la signature temporelle de  $\Lambda$ . On en déduit que l'on peut définir une application antilinéaire  $\mathcal{A}$ , l'adjonction de Dirac, du module des 1-spineurs contravariants sur le module des 1-spineurs covariants par :

$$\mathcal{A} : \psi \longrightarrow \bar{\psi} = \rho \tilde{\psi} \beta \quad (2-7)$$

où  $\rho$  est l'orientation temporelle de  $V_4$ .

On démontre de même qu'il existe une matrice  $\alpha$  telle que pour tout  $\Lambda \in \text{Spin}(4)$  :

$$\Lambda^* = \alpha^{-1} \Lambda \alpha$$

Il en résulte qu'on peut définir une application antilinéaire régulière  $\mathcal{C}$ , de carré l'identité, la conjugaison de charge, du module des 1-spineurs contravariants sur lui-même par :

$$\mathcal{C} : \psi \longrightarrow \mathcal{C}\psi = \alpha \psi^* \quad (2-8)$$

d) Par produit tensoriel de la représentation triviale et de la représentation duale de  $\text{Spin}(4)$  introduites pour définir les 1-spineurs, on obtient la définition de spineurs de type  $(p, q)$ ,  $p$  fois covariants et  $q$  fois contravariants. L'adjonction de Dirac et la conjugaison de charge s'étendent de manière naturelle aux spineurs de type quelconque. Elles anticommulent.

Aux représentations précédentes, nous pouvons adjoindre les représentations définies à partir de l'homomorphisme canonique de  $\text{Spin}(4)$  sur  $L(4)$ . On obtient ainsi par produit tensoriel des tenseurs-spineurs de types variés. A l'aide de ces notions, on peut interpréter (1-8) qui peut s'écrire :

$$\gamma_{\lambda'} = A_{\lambda'}^\alpha \Lambda \gamma_\alpha \Lambda^{-1} \quad A^{-1} = (A_{\lambda'}^\alpha)$$

soit en explicitant :

$$\gamma_{\lambda' m'} = A_{\lambda'}^\alpha \Lambda_a^{l'} \Lambda_m^b \gamma_{\alpha b} \quad (\Lambda = (\Lambda_a^{l'}), \Lambda^{-1} = (\Lambda_m^b)) \quad (2-9)$$

(2-9) et par suite (1-8) expriment que les  $\gamma_{\alpha b}$  sont les composantes par rapport à un repère spinoriel d'un tenseur-spineur déterminé qui est tensoriel covariant et spinoriel de type  $(1, 1)$ . Au tenseur-spineur  $\gamma$  défini par les  $\gamma_\alpha$  nous donnons le nom de *tenseur-spineur fondamental* de  $V_4$ .

### 3 - CONNEXION SPINORIELLE ET COURBURE -

a) Par définition, une connexion spinorielle est une connexion infinitésimale sur le fibré principal  $\mathfrak{S}(V_4)$ . Une telle connexion est définie par une 1-forme  $\sigma$  sur  $\mathfrak{S}(V_4)$  à valeurs dans l'algèbre de Lie de  $\text{Spin}(4)$  satisfaisant les deux conditions suivantes :

1/ Si  $V_z$  est un vecteur vertical en  $z \in \mathfrak{S}(V_4)$ ,  $\sigma(V_z)$  est l'élément de  $\underline{\text{Spin}}(4)$  engendré par  $V_z$  quand on identifie la fibre avec le groupe  $\text{Spin}(4)$ .

2/ Si  $\Lambda \in \text{Spin}(4)$  et si  $V_z$  est un vecteur arbitraire en  $z$  :

$$\sigma(V_z \Lambda^{-1}) = \text{ad.}(\Lambda) \sigma(V_z)$$

Soit  $\omega$  la 1-forme de la connexion riemannienne de  $V_4$  qui est une connexion infinitésimale sur  $\mathfrak{S}(V_4)$ . A  $\omega$ , faisons correspondre la 1-forme  $\sigma$  de  $\mathfrak{S}(V_4)$  à valeurs dans  $\text{Spin}(4)$  définie par :

$$\sigma(V_z) = p'^{-1} \omega(pV_z) \quad (3-1)$$

où  $pV_z$  désigne la projection de  $V_z$  sur  $\mathfrak{S}(V_4)$  et  $p'$  l'isomorphisme de  $\underline{\text{Spin}}(4)$  sur  $L(4)$ . On vérifie immédiatement que  $\sigma$  définit une connexion spinorielle dite *induite* par la connexion riemannienne.

Au point  $y \in \mathfrak{S}(V_4)$ ,  $\omega$  peut être définie par une matrice  $(\omega_\beta^\alpha)$  (ou  $(\omega^{\alpha\beta})$ ) dont les éléments sont des formes linéaires ;  $\sigma$  peut être définie par la matrice :

$$\sigma = - \frac{1}{4} \omega_\beta^\alpha \gamma_\alpha \gamma^\beta \quad (3-2)$$

dont les éléments sont :

$$\sigma_b^a = -\frac{1}{4} \omega_\beta^\alpha \gamma_{\alpha r}^a \gamma^{\beta r}_b \quad (3-3)$$

Soit  $C_{\beta\rho}^\alpha$  les coefficients de la connexion  $\omega$  sur le voisinage  $U$  de  $V_4$  muni de repères spinoriels. Les coefficients correspondants de la connexion spinorielle peuvent s'écrire :

$$\sigma_{b\rho}^a = -\frac{1}{4} C_{\beta\rho}^\alpha \gamma_{\alpha r}^a \gamma^{\beta r}_b \quad (3-4)$$

b) D'après la théorie générale des connexions, un 1-spineur contravariant  $\psi$  admet par différentielle absolue dans la connexion  $\sigma$  une 1-forme  $\nabla\psi$  de type 1-spinoriel contravariant :

$$\nabla\psi = d\psi + \sigma\psi$$

De même un 1-spineur covariant admet par différentielle absolue :

$$\nabla\varphi = d\varphi - \varphi\sigma$$

Ces différentielles absolues définissent des tenseurs-spineurs, dérivées covariantes de composantes dans  $U$  :

$$\nabla_\rho \psi^a = \partial_\rho \psi^a + \sigma_{b\rho}^a \psi^b \quad \nabla_\rho \varphi_a = \partial_\rho \varphi_a - \sigma_{a\rho}^b \varphi_b$$

où  $\partial_\rho$  désigne la dérivation pfaffienne par rapport aux formes  $\{\vartheta^\rho\}$ . Par produit tensoriel, on obtient immédiatement l'expression des composantes de la dérivée covariante d'un tenseur-spineur arbitraire. On a le théorème suivant :

**THEOREME** - Dans la connexion spinorielle induite, la différentielle absolue du tenseur-spineur fondamental  $\gamma$  est nulle.

En effet :

$$\nabla\gamma^a = d\gamma^a + \omega_\beta^\alpha \gamma^{\beta a} + \sigma\gamma^a - \gamma^a\sigma$$

soit :

$$\nabla\gamma^a = \omega^{\alpha\beta} \gamma_\beta^a + \sigma\gamma^a - \gamma^a\sigma = -\omega^{\beta a} \gamma_\beta + \sigma\gamma^a - \gamma^a\sigma$$

qui est nul d'après (1-5) puisque  $\sigma$  est une solution de l'équation en  $\lambda$  lorsqu'on prend  $\omega$  pour  $\mu$ .

c) La courbure de la connexion spinorielle est définie par la 2-forme  $\Pi$  de  $\mathfrak{S}(V_4)$  de type  $(1,1)$  :

$$\Pi = d\sigma + \frac{1}{2} [\sigma, \sigma]$$

Sur  $U$ ;  $\Pi$  est donnée par la matrice d'éléments :

$$\Pi_b^a = d\sigma_b^a + \sigma_r^a \wedge \sigma_b^r \quad (3-5)$$

A  $\Pi$  est associé un tenseur-spineur de courbure  $P$  dont les composantes sur  $U$  sont définies par :

$$\Pi_b^a = \frac{1}{2} P_{b,\lambda\mu}^a \vartheta^\lambda \wedge \vartheta^\mu \quad (P_{b,\lambda\mu}^a = -P_{b,\mu\lambda}^a) \quad (3-6)$$

On vérifie aisément que si  $\Omega = (\Omega_\beta^\alpha)$  est la forme de courbure de la connexion riemannienne :

$$\Pi = -\frac{1}{4} \Omega_\beta^\alpha \gamma_\alpha \gamma^\beta \quad (3-7)$$

Il en résulte :

$$P_{b,\lambda\mu}^a = -\frac{1}{4} R_{\beta,\lambda\mu}^\alpha (\gamma_\alpha \gamma^\beta)_b^a$$

où  $R^{\alpha}_{\beta,\lambda\mu}$  est le tenseur de courbure. Pour le tenseur-spineur de courbure, on a l'identité de Bianchi :

$$\nabla_{\nu} P^{\alpha}_{b,\lambda\mu} + \nabla_{\lambda} P^{\alpha}_{b,\mu\nu} + \nabla_{\mu} P^{\alpha}_{b,\nu\lambda} = 0 \quad (3-9)$$

et l'identité de Ricci :

$$(\nabla_{\lambda} \nabla_{\mu} - \nabla_{\mu} \nabla_{\lambda}) \psi^{a_1 \dots a_p}_{b_1 \dots b_q} = \sum_{i=1}^p P^{\alpha_i}_{r,\lambda\mu} \psi^{a_1 \dots r \dots a_p}_{b_1 \dots b_q} - \sum_{j=1}^q P^{\alpha_j}_{b_j,\lambda\mu} \psi^{a_1 \dots a_p}_{b_1 \dots r \dots b_q} \quad (3-10)$$

où  $\psi$  est un spineur arbitraire.

A l'aide de propriétés du tenseur de courbure et de (1-2), on vérifie aisément les identités :

$$R^{\alpha}_{\beta,\lambda\mu} \gamma^{\beta} \gamma^{\lambda} \gamma^{\mu} = 2 R^{\alpha}_{\beta} \gamma^{\beta} \quad R_{\alpha\beta,\lambda\mu} \gamma^{\alpha} \gamma^{\beta} \gamma^{\lambda} \gamma^{\mu} = -2 R e \quad (3-11)$$

où  $R$  est la courbure riemannienne scalaire.

#### 4 - LE CHAMP DE DIRAC -

a) Soit  $\psi$  un 1-spineur contravariant,  $\varphi$  un 1-spineur covariant tels que l'intersection de leurs supports soit compacte. Nous posons :

$$\langle \psi, \varphi \rangle = \int_{V_q} (\psi, \varphi) \eta \quad (4-1)$$

où  $\eta$  est l'élément de volume riemannien. Nous appelons *bi-spineur de Dirac* le bi-1-spineur distribution  $\Sigma^{(\frac{1}{2})}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  contravariant en  $\mathbf{x}$ , covariant en  $\mathbf{x}'$ , défini par :

$$\langle \Sigma^{(\frac{1}{2})}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'), \psi(\mathbf{x}') \rangle = \psi(\mathbf{x}) \quad \langle \Sigma^{(\frac{1}{2})}(\mathbf{x}', \mathbf{x}), \varphi(\mathbf{x}') \rangle = \varphi(\mathbf{x})$$

où  $\varphi$  est un 1-spineur covariant,  $\psi$  un 1-spineur contravariant.

Nous appelons *laplacien* de  $\psi$  le 1-spineur contravariant :

$$\Delta \psi = \gamma^{\alpha} \gamma^{\beta} \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} \psi = -\nabla^{\rho} \nabla_{\rho} \psi + \frac{1}{4} R \psi \quad (4-2)$$

d'après (3-11). De même si  $\varphi$  est un 1-spineur covariant :

$$\Delta \varphi = \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} \varphi \gamma^{\beta} \gamma^{\alpha} = -\nabla^{\rho} \nabla_{\rho} \varphi + \frac{1}{4} R \varphi \quad (4-3)$$

On vérifie immédiatement que si l'intersection des supports de  $\psi$  et  $\varphi$  est compacte :

$$\langle \Delta \psi, \varphi \rangle = \langle \psi, \Delta \varphi \rangle$$

Nous appelons *noyaux élémentaires de l'opérateur de Klein-Gordon*  $(\Delta - \epsilon^2)$  ( $\epsilon^2 = \text{const.}$ ) les deux bi-1-spineurs distributions vérifiant :

$$(\Delta_{\mathbf{x}} - \epsilon^2) G^{(\frac{1}{2})\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \Sigma^{(\frac{1}{2})}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$$

et qui pour chaque  $\mathbf{x}'$  ont leurs supports respectivement dans le futur ou dans le passé de  $\mathbf{x}'$ . A la différence  $G^{(\frac{1}{2})} = G^{(\frac{1}{2})-} - G^{(\frac{1}{2})+}$ , je donne le nom de *propagateur spinoriel* relatif à  $(\Delta - \epsilon^2)$ .

b) Introduisons sur les 1-spineurs contravariants les deux opérateurs de Dirac du 1er ordre :

$$L\psi = \gamma^{\alpha} \nabla_{\alpha} \psi - \epsilon \psi \quad L'\psi = \gamma^{\beta} \nabla_{\beta} \psi + \epsilon \psi$$

et sur les 1-spineurs covariants les deux opérateurs :

$$\bar{L}\varphi = -(\nabla_{\alpha} \varphi \gamma^{\alpha} + \epsilon \varphi) \quad \bar{L}'\varphi = -(\nabla_{\beta} \varphi \gamma^{\beta} - \epsilon \varphi)$$

On a immédiatement :

$$LL' = L'L = \Delta - \varepsilon^2 \qquad \bar{L}\bar{L}' = \bar{L}'\bar{L} = \Delta - \varepsilon^2$$

De plus, si l'intersection des supports de  $\psi$  et  $\varphi$  est compacte :

$$\langle L\psi, \varphi \rangle = \langle \psi, \bar{L}'\varphi \rangle \qquad \langle L'\psi, \varphi \rangle = \langle \psi, \bar{L}\varphi \rangle$$

Considérons le champ de Dirac (spin  $\frac{1}{2}$ ) en relativité générale. Il est décrit par un 1-spineur contravariant  $\psi$  astreint à l'équation du champ :

$$L\psi = 0 \qquad (4-4)$$

Son adjoint de Dirac  $\bar{\psi}$  vérifie :

$$\bar{L}\bar{\psi} = 0 \qquad (4-5)$$

Si  $\psi$  est à valeurs dans un espace d'opérateurs d'un espace de Hilbert, nous sommes conduits à évaluer l'anticommutateur correspondant qui, d'après les résultats antérieurs, sera donné par la formule :

$$[\psi(x), \bar{\psi}(x')]_{+} = \frac{1}{i} S^{(\frac{1}{2})}(x, x') \qquad (4-6)$$

où :

$$S^{(\frac{1}{2})}(x, x') = L_x' G^{(\frac{1}{2})}(x, x')$$

vérifie (4-4) et (4-5). Notre anticommutateur est invariant par conjugaison de charge.

Des résultats analogues sont valables pour des champs spinoriels de spin plus grand (champ de Rarita-Schwinger par exemple).