ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

O. COSTA DE BEAUREGARD

Relation intime entre les trois principes de Bayes, de Carnot, et de la retardation des ondes quantifiées

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 8, série *Mathématiques*, n^{o} 2 (1962), p. 145-150

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1962__8_2_145_0>

RELATION INTIME ENTRE LES TROIS PRINCIPES DE BAYES, DE CARNOT, ET DE LA RETARDATION DES ONDES QUANTIFIÉES

O. COSTA DE BEAUREGARD
Institut Henri Poincaré (Paris)

J'ai pensé que pour honorer la mémoire du grand Pascal, la discussion d'un point d'épistémologie du Calcul des Probabilités était particulièrement indiquée.

1 - PRINCIPE DE BAYES -

En calcul élémentaire des Probabilités, où la transition élémentaire est très généralement prise symétrique entre avenir et passé (par exemple battage d'un jeu de cartes, tirage des boules qu'on remet dans une urne etc.), il est bien connu que l'irréversibilité de l'évolution des collectifs ne résulte aucunement du fonctionnement interne de la machinerie statistique, mais qu'elle est au contraire introduite extrinsèquement par un postulat spécial, le *principe de probabilité des causes* de Bayes.

Le principe de Bayes stipule que les probabilités intrinsèques de rétrodiction doivent être affectées de coefficients estimés extrinsèquement au mécanisme de l'évolution propre du système. Il ne dit rien quant aux valeurs de ces coefficients, sinon qu'ils ne peuvent être égaux (auquel cas le problème de rétrodiction deviendrait symétrique au problème de la prédiction statistique). Le principe de Bayes n'est donc pas autre chose qu'un *principe d'interdiction de la rétrodiction statistique aveugle*.

Du point de vue du physicien qui est le mien, je pense qu'au cours de la suite de l'exposé, il sera devenu largement évident que les coefficients extrinsèques de Bayes sont là pour représenter au mieux l'interaction du système objet d'étude avec le reste du cosmos, interaction qui est supposée cesser à l'instant zéro du problème.

2 - PRINCIPE DE CARNOT -

Les argumentations classiques de Loschmidt [1], de P. et T. Ehrenfest [2], de Smoluchowski [3], ont bien montré que, contrairement à un sentiment largement répandu, la combinaison du Calcul des Probabilités et de la Mécanique Rationnelle classique (c'est-à-dire la Mécanique statistique classique) n'est pas de soi dissymétrique entre avenir et passé. Tout ce qu'on peut dire est que, si l'on se donne à l'instant *zéro* une configuration hétérogène ou improbable du système étudié (supposé fort complexe) la probabilité est que cette hétérogénéité s'effacera rapidement aux instants succédant à l'instant initial. Mais, symétriquement, si l'on interroge *aveuglément* la Mécanique Statistique sur ce qui se passait juste avant l'instant initial, elle répondra automatiquement que l'hétérogénéité observée à l'instant zéro vient tout juste d'émerger d'une situation antérieure indifférenciée. C'est là le "paradoxe du retournement du théorème H" récemment discuté par plusieurs auteurs : nous même [4], Reichenbach [5], Bûchel [6], Mehlberg [7], Grünbaum [8].

Un exemple où n'interviennent que des mathématiques très simples fera bien voir la nature du problème. Voulant discuter le problème de l'étalement quasi-uniforme des petites planètes sur leur commune orbite, Poincaré [9] simplifie le problème en supposant la trajectoire circulaire, et les petites planètes sans interaction et en nombre infini. Soient alors a le "moyen mouvement" et b "la longitude initiale" d'une petite planète, f(a,b) la densité de distribution attachée au point a,b. Quelle que soit la fonction f supposée simplement continue en a, la fonction caractéristique :

$$C(t) = \iint e^{i(at+b)} \; f(a,b) \, da \, db$$

tend vers zéro quand le temps t tend vers plus l'infini. Si par exemple l'essaim des petites planètes est supposé engendré par l'éclatement d'une grosse planète, on comprend que la distribution finale soit homogène quelle qu'ait été la loi d'explosion (sous la condition qu'on a dite).

Mais, et voici le paradoxe, si t tend vers moins l'infini, C(t) tend vers zéro de la même manière que précédemment. Devrons nous conclure de là que la grosse planète observée à l'instant zéro est née du rassemblement d'un essaim homogène de petites planètes existant dans un lointain passé ? Evidemment non. Mais il n'y a nulle autre issue à ce paradoxe que l'énoncé de la règle d'application que voici : *la Mécanique Statistique est faite pour être appliquée en prédiction, et il est interdit de l'appliquer aveuglément en rétrodiction.*

Ceci nous ramène très exactement au statut du principe de Bayes. Du reste, puisque les équations de la Mécanique classique sont symétriques entre avenir et passé, il faut bien que l'irréversibilité (si bien décrite par la Mécanique Statistique classique) procède d'un postulat d'application contenant en lui-même cette irréversibilité. Notre thèse est donc qu'en fin de compte le *théorème de Carnot de la Mécanique statistique classique procède d'une spécification particulière du principe de Bayes.* Cette thèse a été indépendamment soutenue par E. Adams [10].

3 - PRINCIPE DE RETARDATION DES ONDES QUANTIFIEES -

Qu'une sorte d'harmonie préétablie existe entre le principe de l'entropie croissante et le principe des ondes retardées (ici ondes retardées signifie le contraire d'ondes avancées, ondes définies par leurs conditions aux limites initiales et non finales), se voit non seulement par l'air de famille de ces deux principes d'irréversibilité, mais aussi par leur coexistence effective. Une pierre jetée dans un étang calme y engendre un train d'ondes divergentes où se disperse son énergie ; une météorite traversant l'atmosphère terrestre s'y freine en émettant une onde balistique retardée. Jamais l'on ne voit une onde convergente s'effacer en éjectant une pierre sur la rive d'un étang, ou en accélérant une météorite. Sur ces deux exemples, l'équipartition de l'énergie cinétique, agent exécuteur de la croissance de l'entropie, se fait donc physiquement par le truchement d'ondes retardées.

Peut-on essayer d'établir une liaison entre la théorie classique des ondes continues et la Mécanique statistique ? Ce n'est pas absolument impossible, mais cela reste assez artificiel. La forme que Wheeler et Feynman [11] ont donnée à l'Electromagnétisme classique ne vise pas proprement à établir une telle connexion, mais à justifier la prééminence observée des ondes retardées sur la base d'arguments nettement apparentés à ceux de la Mécanique statistique. Récemment Penrose et Percival [12] ont produit un ingénieux petit calcul qui relie statistiquement le principe de l'entropie croissante au principe de la retardation des ondes continues.

Mais si, par contre, on considère des ondes quantifiées au lieu des ondes continues classiques (et toutes les ondes physiques sont quantifiées) alors, pensons nous, la connexion physique intime entre le principe de Carnot et le principe de retardation des ondes quantifiées saute aux yeux.

Ici, nous devons faire d'abord un pèlerinage aux sources. Planck a pu définir l'entropie d'un pinceau de lumière monochromatique, et montrer que l'entropie croit lors d'une diffusion de lumière, même sans changement de fréquence. Comme la théorie classique de la diffusion postule essentiellement l'emploi des ondes retardées, c'était là reconnaître implicitement la liaison du principe de Carnot avec celui de la retardation des ondes quantifiées, dans le cas particulier où joue la statistique de Bose.

En 1908 et 1909 une longue controverse "sans issue, mais très éclairante" [11] opposa Einstein et Ritz [13]. Ritz pensait que le principe de retardation des ondes est en fait postulé dans la déduction du théorème de Carnot, tandis qu'au contraire Einstein (en tant que père des Lichtquanten) affirmait que la loi des ondes retardées se justifie par des arguments statistiques. Je pense que l'unique raison ayant empêché Einstein et Ritz de tomber d'accord est que, au temps où ils écrivaient, la toute récente *quantification des ondes* attendait son symétrique, l'*ondulisation de la mécanique.* Si Einstein et Ritz avaient pu savoir que toute diffusion de particules lors d'un choc (au sens de la Mécanique statistique) a pour corollaire une diffusion d'ondes, alors bien certainement ils eussent reconnu que la thèse et l'antithèse qu'ils soutenaient respectivement avec tant d'acharnement sont finalement échangeables comme un théorème et sa réciproque...

Je vais rendre manifeste la liaison que je pense devoir établir entre le principe de l'entropie croissante et le principe de la retardation des ondes quantifiées d'abord sur un exemple, puis d'une manière abstraite au moyen d'un fameux théorème de J. von Neumann [14].

Soit d'abord une onde plane monochromatique qui tombe sur un réseau ; elle est définie à sa phase près, et elle est supposée porter des corpuscules physiquement identiques, fermions ou bosons ;

on peut considérer par exemple qu'il s'agit de l'expérience de diffraction des électrons de Davisson et Germer. Montrons d'abord que c'est la statistique classique de Boltzmann qui va jouer dans ce problème.

Prenons pour simplifier le cas d'un réseau plan linéaire normal à l'axe Oz. Les cellules d'extension en phase à considérer sont de la forme $\delta x\ \delta y\ \delta z$. $\delta p_x\ \delta p_y\ \delta W \simeq h^3$ (p_x, p_y composantes de l'impulsion d'un corpuscule suivant Ox, Oy ; W son énergie). Si nous supposons l'intervalle Δt séparant deux impacts grand devant $\delta W/h$, les statistiques quantiques n'auront rien à dire touchant l'occupation des cellules $\delta x\ \delta y\ \delta p_x\ \delta p_y \simeq h^2$; autrement dit, leurs effets seront statistiquement effacés si les corpuscules incidents n'appartiennent pas aux mêmes trains d'ondes.

Ceci étant, l'Optique classique associe à une onde plane incidente sur le réseau g ondes planes émergentes bien définies ; inversement, l'une quelconque des ondes planes émergentes est associée à une famille unique de g ondes planes incidentes bien définies (problème du retour optique inverse). Du point de vue quantique, le réseau produit donc une *transition* des corpuscules entre l'un des g états initiaux et l'un des g états finaux possibles. Les probabilités de transition ne sont autres que les intensités de transmission classiques ; nous ne perdrons pas de généralité en les supposant pour simplifier toutes égales.

Raisonnons d'abord en prédiction. Les corpuscules incidents arrivent par hypothèse sur l'une, bien déterminée, des g ondes incidentes, et ils se distribuent équitablement sur les g ondes planes émergentes. Les complexions les plus probables sont celles où tous les nombres d'occupation finaux sont égaux (à $\pm$ 1 près). En effet, la probabilité $P(n_i)$ du jeu des nombres d'occupation n_i des g cellules est :

$$P(n_i) = \frac{n!}{\Pi(n_i!)}$$

et elle augmente si l'on prend une "boule" dans une "case" pour la mettre dans une "case" plus occupée.

Ainsi, la prédiction statistique "aveugle" (qui conduit, comme d'habitude, à une loi de croissance de la probabilité ou de l'entropie) répète à sa manière la loi des ondes retardées ; en effet, le processus décrit est celui d'une *diffusion* en cohérence de phases.

Comment se présenterait maintenant le problème de la rétrodiction statistique aveugle ? Des corpuscules émergents sont reçus dans un collimateur sur une onde plane monochromatique ; tout ce que l'on sait est qu'un réseau plan linéaire est en place à l'abscisse z = 0, avec des caractéristiques connues. Que peut-on dire touchant l'arrivée des corpuscules sur le réseau ? Une seule chose est sûre : ils sont arrivés sur une ou plusieurs des g ondes planes incidentes, associées à l'onde émergente considérée dans un problème de retour optique inverse. Devrons nous alors les distribuer uniformément sur les g ondes planes incidentes, ce qui serait équitable puisque nous n'avons aucune raison de favoriser l'une de ces ondes plutôt qu'une autre ? Non, car le *principe de Bayes s'y oppose*. Et nous voyons que le principe de Bayes exclut à la fois les processus à entropie décroissante (ce qui n'est pas nouveau) et les *processus de con-fusion en cohérence de phases dont l'existence serait synonyme de celle d'ondes avancées.*

En bref, je pense que cet exemple illustre bien ma thèse, en *faisant apparaitre en un seul les trois principes de Bayes, de Carnot, et de la retardation des ondes quantifiées.*

Je vais maintenant établir cette même conclusion d'une manière abstraite et générale.

J. von Neumann [14] a défini des collectifs de systèmes quantifiés décrits par des systèmes orthogonaux complets d'ondes φ_i affectées de poids p_i, et a considéré le cas d'une même transition affectant à l'instant t_0 tous les systèmes d'un collectif. Soient alors ψ_i le système orthogonal complet consécutif à la transition, q_i les poids des ψ_i, P le plus grand des p_i, Q le plus grand des q_i. Le théorème de von Neumann prouve que :

$$Q \leqslant P$$

ce qui correspond bien à un phénomène de nivellement statistique (1).

---

(1) Il est du reste possible d'introduire explicitement l'expression de l'entropie (de von Neumann) et par conséquent celle du théorème de Carnot.

Le point important pour nous est que *la démonstration de von Neumann postule essentiellement l'emploi des ondes retardées.* Si l'on avait au contraire intégré par les ondes avancées, l'on aurait trouvé le paradoxal résultat anti-Carnot.

4 - LE PRINCIPE GENERAL DES ACTIONS RETARDEES (1) -

Revenons aux déductions traditionnelles du théorème H, ou plus simplement (ce qui pour nous revient au même) au problème des petites planètes de Poincaré. Nous avons vu que, pour adapter le formalisme aux phénomènes observés, il est nécessaire et suffisant de poser *un principe d'interdiction de la rétrodiction aveugle* substantiellement identique au *principe de probabilité des causes* de Bayes.

Quelle est l'interprétation physique de ce principe d'interdiction de la rétrodiction aveugle ? Manifestement, que l'état improbable du système observé à l'instant zéro (disons l'essaim des petites planètes rassemblé comme les morceaux d'une grosse planète) n'a pas émergé de lui-même de l'évolution antécédente du système ; ou encore, en d'autres mots, qu'il *a été donné au terme d'une interaction originelle de ce système avec un autre système.* Dans le cas des petites planètes, il s'agira par exemple d'une cause externe (passage d'un astre troublant) ou interne (volcanisme). Mais constater ceci ne change rien à l'essence du problème, car la question qui surgit alors est : Pourquoi l'interaction de la grosse planète avec des phénomènes externes ou internes développe-t-elle ses conséquences *après* qu'elle a eu lieu et pas avant ? Pourquoi se traduit-elle par une *explosion*, qui détruit la grosse planète et donne l'état initial improbable d'un système statistique, et non pas par une *implosion* qui cueillerait une grosse planète en effaçant l'état final improbable d'une évolution anti-Carnot ? D'autres exemples seraient trouvés à foison : nous avons déjà cité celui de la pierre qu'on jette dans un étang. Il y aurait encore celui de la goutte d'encre qui diffuse au sein d'un verre d'eau ; son état concentré a été produit par une pipette introduite par un physicien ; et c'est un fait qu'on ne voit jamais cette interaction de la pipette avec le verre d'eau cueillir une goutte concentrée en effaçant l'évolution anti-Carnot d'une goutte qui se serait spontanément concentrée.

Dans le cas des petites planètes, l'on peut aussi remarquer que, tout au long de leur existence, s'exercent des actions dissipatives qui tendent à augmenter la dispersion de l'essaim. Mais *constater* ceci ne change rien à l'essence du problème, car la question qui surgit alors est : Pourquoi précisément ces perturbations sont elles dissipatives et non pas sélectives ? Pourquoi tendent-elles à disperser et non pas à concentrer l'essaim ?

Prenons comme ultime exemple une *expérience de pensée* choisie volontairement très près du schéma de la Mécanique statistique classique. Soit un gaz en équilibre thermique enfermé dans une enceinte pourvue d'un piston. Supposons qu'entre les instants t_1 et t_2 un physicien déplace le piston en le ramenant au temps t_2 à la position qu'il occupait au temps t_1. C'est un fait qu'il aura fallu au total dépenser de l'énergie et qu'on n'en aura pas recueilli, mais ce n'est pas sur cet (important) aspect du problème que je veux insister. C'est un fait aussi que la distribution maxwellienne des vitesses est altérée après l'instant t_2 et pas avant l'instant t_1.

L'énoncé que nous cherchions pour traduire physiquement le principe de Bayes est donc finalement celui-ci : *lorsque deux systèmes antérieurement et postérieurement isolés entrent en interaction pendant un intervalle de temps fini t_2-t_1, c'est un fait que cette interaction fait sentir ses effets sur chacun des systèmes partiels après la fin et pas avant le début de l'interaction.*

C'est là, très exactement, l'énoncé du principe des actions retardées, mais notre analyse nous a appris au passage quelque chose d'important : *le principe des actions retardées est d'une nature essentiellement macroscopique et statistique ; au vrai, il n'est pas substantiellement distinct du principe de Carnot* Et en effet, y aurait-il le moindre sens à parler d'un principe des actions retardées au niveau du phénomène individuel, qui est décrit par toutes les mécaniques existantes comme fondamentalement symétrique entre avenir et passé ?

L'on peut donc conclure cette section en disant que, physiquement parlant, la déduction du théorème H (ou, ce qui revient au même, du théorème de Carnot) implique le postulat des actions retardées.

----

(1) Ici encore, le qualificatif de retardées s'oppose à celui d'avancées.

5 - RECIPROQUE : LA LOI DES ACTIONS RETARDEES DEDUITE EX ABSURDO DU PRINCIPE DE CARNOT -

Supposons qu'entre les instants t_1 et t_2 l'on couple deux systèmes antérieurement et postérieurement isolés. Le principe de l'équipartition des énergies cinétiques, conséquence directe du principe de Carnot, va jouer entre les instants t_1 et t_2 et livrer à l'instant t_2 chacun des deux sous-systèmes dans un état intrinsèquement improbable (par exemple, à la fin de son parcours dans l'atmosphère, une météorite est très chaude, et, corrélativement, l'atmosphère n'est pas du tout dans son état de repos).

Que si, au contraire, on faisait jouer à rebours le principe de Carnot, alors l'interaction cueillerait à l'instant t_1 chacun des deux sous-systèmes dans un état final improbable, et les livrerait à l'instant t_2 dans leur état de repos statistique.

Il y a donc bien relation biunivoque entre le théorème (ou le principe) de Carnot et le principe (ou le théorème) des actions retardées.

6 - PRINCIPE DE CAUSALITE ET PRINCIPE DE RAISON SUFFISANTE -

Les physiciens pensent très spontanément que, en ce qui les concerne, le principe de causalité n'est pas autre chose que le principe des actions retardées. Il résulte alors de ce qui précède que le principe de causalité des physiciens n'est au fond pas autre chose que le principe de Carnot. Cette idée a été proposée indépendamment de nous par Terletsky [15] (1).

Le principe de causalité a une doublure subjective, et c'est le *principe de raison suffisante*. Dire que l'improbable ne peut pas sortir sans raison du plus probable, ce n'est pas autre chose que dire que la rationnalité (comme la causalité) se comprend de manière retardée et non pas de manière avancée.

Le principe de raison suffisante est le leit-motiv du Traité de Calcul des Probabilités de P. Lévy, où il est le ressort du "passage de la probabilité subjective à la probabilité objective".

Du point de vue qui nous intéresse, l'application la plus caractéristique du principe de raison suffisante est celle que fait Poincaré [9] pour écarter une évolution anti-Carnot, sur l'exemple des petites planètes précisément. Poincaré remarque que si les moyens mouvements a et les longitudes initiales b des petites planètes se trouvaient liés par une loi de la forme $ap+b=q$ avec p et q constants et p positif alors, à l'instant futur $t = p$, toutes les petites planètes viendraient comme par enchantement se réunir à l'abscisse curviligne q. Sur quoi, selon Poincaré, nous fonderons nous pour écarter cette "hypothèse saugrenue" ? sur le principe de raison suffisante : "cette loi si régulière et pourtant si compliquée paraitrait avoir été choisie exprès".

Mais remarquons que l'hypothèse que veut exclure Poincaré a exactement le même degré de généralité que celle que l'on accepte comme décrivant l'explosion d'une grosse planète : b donné, a arbitraire. Dans les deux cas, il y a un paramètre arbitraire.

Qu'est-ce à dire, sinon simplement que la physique accepte les explications du type causal, où l'improbabilité est donnée au départ, et qu'elle refuse les explications du type final, où l'improbabilité serait cueillie au terme ?

7 - IRREVERSIBILITE ET COSMOLOGIE -

Une conclusion générale de cette étude est que la racine de l'irréversibilité physique est extrinsèque et non pas intrinsèque à l'évolution des systèmes d'objets d'étude. Elle ne résulte aucunement de quelque propriété des équations d'évolution de ces systèmes, mais bien des conditions aux limites des problèmes ; précisément, du fait que ces conditions aux limites doivent toujours être prises sous la forme de conditions initiales et jamais de conditions finales. Enfin, la racine de l'irréversibilité des systèmes physiques est à chercher non pas du côté des éléments, mais du côté du tout : de la manière dont les systèmes objets d'étude s'insèrent dans un contexte plus vaste.

----

(1) Il est à peine besoin de dire que le principe *macroscopique* de causalité dont il s'agit ici n'est pas identique au principe microscopique de causalité qu'on applique en théorie quantique des champs. Du point de vue relativiste, le second exclut tout l'extérieur du cône isotrope, tandis que le premier exclut en plus le demi-cône passé. Le principe microscopique de causalité est symétrique entre avenir et passé, tandis que le principe macroscopique de causalité est dissymétrique entre avenir et passé.

En bref, si toutes les évolutions statistiques partielles exhibent la même flèche, qui est la flèche même de l'évolution globale, c'est parce qu'elles sont toutes en interaction et qu'elles subissent toutes l'empreinte de l'évolution globale.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Wiener Sitz. 73, 139, (1876).

[2] Encycl. Math. Wiss. IV, 2, II (1914).

[3] Oeuvres II, 361 (1927).

[4] Rev. Quest. Sci. VIII, 171, (1952) ; Rev. de Synthèse n° 5-6, 7 (1957) ; Cah. de Phys. 96, 317 (1958).

[5] The direction of time, Univ. Calif. Press. 1956.

[6] Philos. Naturalis, 6, 167 (1960).

[7] Current issues in the philosophy of science 105, New-York (1961).

[8] Philosophy of Science 29, 146, (1962).

[9] *Le Calcul des probabilités* dans La Science et l'hypothèse Ch XI § III.

[10] Phys. Review 120, 675, (1960).

[11] Rev. Mod. Phys. 17, 157, (1945).

[12] Proc. Phys. Soc., 79, 605, (1962).

[13] Ann. Chimie et Phys. 14, 145 (1908) ; Phys. Zeits. 9, 903, (1908) ; 10, 185 et 323, (1909).

[14] Les fondements mathématiques de la mécanique quantique, ch. IV et V Paris, 1946.

[15] Journ. de Phys. 21, 681, (1960).