ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

C. CATTANEO

Principe de mach et relativité générale

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 8, série *Mathématiques*, n° 2 (1962), p. 137-144

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1962__8_2_137_0>

PRINCIPE DE MACH ET RELATIVITÉ GÉNÉRALE

C. CATTANEO
(Rome)

J'ai lu quelque part qu'Albert Einstein, prié par des reporters de résumer en quelques mots le contenu de la relativité aurait dit : "Voulez-vous savoir quelle est la différence fondamentale entre physique classique et relativité ? En physique classique, si vous videz le monde de tout objet ayant une consistance physique, il reste encore l'espace et le temps. En relativité, si vous videz l'univers de toute chose sensible, il ne reste *rien*".

Ce n'était qu'une boutade qui ne prétendait guère à une complète rigueur scientifique mais qui revélait non seulement la complète adhésion d'Einstein aux idées et au programme de Ernst Mach, suivant lesquelles toutes les lois physiques et les notions mêmes d'espace et de temps doivent être complètement conditionnées par la matière présente dans l'univers, mais aussi sa profonde conviction que la relativité générale réalisait en effet ces idées et ce programme.

Evidemment la phrase d'Einstein ne devait pas être prise à la lettre, comme d'ailleurs lui-même avait préaverti. En effet, est-il vrai - au point de vue de la relativité générale - qu'en vidant l'univers de toute masse il n'y reste rien ? Envisageons les équations gravitationnelles, valables partout dans l'espace-temps, et réduisons partout à zéro leur deuxième membre. Un théorème bien connu, formulé la première fois par M. Sérini [14] et puis étendu sous des hypothèses de plus en plus générales par M. Lichnerovicz [11] et M. Avez [1], nous dit qu'un tel univers a partout la structure d'un espace-temps de Minkowski sans courbure. La coïncidence avec un espace-temps de Minkowski devient même globale si on ajoute une hypothèse très simple sur la topologie de notre univers. Eh bien ! Est-ce qu'un espace-temps plat est la même chose que "rien" ? Evidemment pas. Un espace-temps plat présente des repères privilégiés, les repères galiléens, qui, par principe, sont physiquement distinguables d'un repère tournant ou d'un repère accéléré. Et si dans notre univers "vide de matière" il y a le moyen de distinguer physiquement de différentes espèces de repères il y est bien resté quelque chose.

Je n'insiste pas sur ce point. J'ai voulu seulement souligner l'insatisfaction conceptuelle provoquée en celui qui accepte les idées de Mach, quand il doit envisager un espace-temps de Minkowski complètement vide. Mais l'espace vide n'est qu'une abstraction limite, qui d'ailleurs est loin de la réalité physique et la difficulté que je viens d'indiquer ne doit pas être imputée à la théorie de la relativité générale qui, au contraire, semble réaliser au maximum, dans le domaine qu'elle recouvre, le programme de Mach.

Tel est au moins mon avis et je voudrais arriver, par mon exposé, à donner une contribution modeste mais concrète à la clarification de ce point.

1 - RAPPEL D'UN RESULTAT DE H. THIRRING -

Dans une note de 1918 complétée en 1921 (cfr. [15] [16]) H. Thirring a montré que si un espace-temps plat de Minkowski est perturbé par une couche sphérique très mince en rotation uniforme par rapport à un repère galiléen S_G, à l'intérieur de la couche s'établit un champ gravitationnel qualitativement semblable au champ apparent qui est présent classiquement dans un repère tournant.

A bon droit ce résultat, obtenu sur la base des équations gravitationnelles dans l'approximation linéaire, a été considéré très important à un point de vue spéculatif, puisqu'on l'a interprété comme une preuve de l'effective réalisation en relativité générale du principe de Mach, suivant lequel l'inertie, comme la gravitation, est déterminée par les masses de l'univers. Des résultats de Thirring, on a même cru pouvoir déduire une suggestive relation entre le rayon de notre univers physique, sa masse totale, et la constante de gravitation universelle (cfr. Møller, [13], p. 321). Cette relation a été établie par une sorte d'identification du champ approché (dépendant explicitement de la masse et du rayon de la couche) au champ apparent classique, en considérant ce dernier comme une donnée directe de l'expérience.

Tout à fait d'accord sur l'importance conceptuelle du théorème de Thirring, je voudrais envisager ici le même problème en pleine rigueur et d'une façon plus étroitement adhérente à la théorie einsteinienne et discuter, d'après les résultats que nous obtiendrons, quelles sont, parmi les conséquences qu'on a tiré des résultats de Thirring, celles qui peuvent être confirmées.

2 - METHODE DES PROJECTIONS NATURELLES PAR RAPPORT A UN REPERE DONNE : RAPPEL DE QUELQUES APPLICATIONS -

Rapportons la variété espace-temps V_4 à un système quelconque de coordonnées locales x^i(1) physiquement admissibles, dont x^α coordonnées d'espace et $x^4 \equiv ct$ coordonnée temporelle. Nous supposerons que la métrique de V_4 - $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$ - a la signature + + + -, ce qui entraine, compte tenu du dit caractère des x^i, les inégalités (voir [13]) :

$$g_{44} < 0 \qquad\qquad g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta > 0 \tag{1}$$

(pour tout système de dx^α non simultanément nulles). Au système coordonné x^i correspond un *repère physique* S bien déterminé, constitué par les ∞^3 particules idéales ayant comme trajectoires d'univers les lignes x^4 = var. Le repère physique est donc déterminé uniquement par la congruence des lignes x^4 ou, ce qui revient au même, par le champ des vecteurs unitaires $\gamma(x)$ tangents aux lignes x^4 et orientés dans le futur, de composantes :

$$\gamma^\alpha = 0, \quad \gamma^4 = 1/\sqrt{-g_{44}} \quad ; \quad \gamma_i = g_{i4}/\sqrt{-g_{44}}. \tag{2}$$

Les coordonnées x^i, à leur tour, seront dites *adaptées* au repère physique S. Il existe une infinité de systèmes de coordonnées locales adaptées à un même repère physique S. Tous ces systèmes sont liés par le groupe des transformations *internes* :

$$x^{\alpha'} = x^{\alpha'}(x^1, x^2, x^3) \qquad\qquad x^{4'} = x^{4'}(x^1, x^2, x^3, x^4) \tag{3}$$

qui, ne changeant pas les lignes temporelles, ne changent non plus le repère physique.

Soit T_x l'espace vectoriel tangent à V_4 au point x. D'une façon très spontanée on est conduit à décomposer cet espace en la somme directe d'un espace unidimensionnel Θ_x parallèle à γ et d'un espace supplémentaire à trois dimensions, Σ_x, orthogonal à γ : on les appelle respectivement *temps* et *espace* localement associés (voir Lichnerowicz, [11]. De cette décomposition on tire toute une technique de projection naturelle sur Θ ou sur Σ applicable aux vecteurs aussi bien qu'aux tenseurs d'ordre quelconque ; et cette technique qui a été largement développée ([5]) mais dont on ne peut pas parler maintenant, permet de définir d'une façon systématique des grandeurs physiques et des opérations différentielles ayant une signification relative au repère physique S mais ayant en même temps un caractère invariant vis à vis des transformations internes (3). Par ces grandeurs et par ces opérations, on a pu arriver d'une façon correcte à la formulation relative des lois physiques en relativité générale (voir [2] [3] [4] [6] [7] [8] [9]).

Sans vous ennuyer par de longs rappels, je peux me borner à ne rappeler ici que quelques points, qui seront essentiels pour la suite.

A - On peut d'abord appliquer la dite technique pour déterminer les caractères intrinsèques du repère S lui-même et on trouve que ces caractères se résument dans les trois tenseurs d'espace suivants : a) le vecteur $C_i = \gamma^r \nabla_r \gamma_i$, qui est le vecteur de courbure des lignes x^4 , b) le tenseur symétrique $\widetilde{K}_{ij} = \gamma^4 \partial_4 \gamma_{ij}$, lié aux variations dans le temps du tenseur métrique d'espace ($\gamma_{ij} = g_{ij} + \gamma_i\gamma_j$), qu'on peut nommer *vitesse de déformation* du fluide de repère S ; c) le tenseur antisymétrique $\widetilde{\Omega}_{ij} = \gamma_4 \left(\widetilde{\partial}_i \frac{\gamma_j}{\gamma_4} - \widetilde{\partial}_j \frac{\gamma_i}{\gamma_4}\right)$ qui est lié au mouvement de rotation locale du fluide S et qu'on appelle le *tenseur tourbillon d'espace* ; dans son expression parait l'opération différentielle $\widetilde{\partial}_i \equiv \partial_i + \gamma_i \gamma^4 \partial_4$, dite *dérivation transverse* (voir [2] [5]).

----

(1) Les indices latins varient de 1 à 4, les indices grecs de 1 à 3.

L'annulation éventuelle du vecteur C_i est propre des repères dits *géodésiques* ; l'annulation de $\tilde{K}_{ij}$ caractérise les repères *rigides* (suivant la définition de Born) ; enfin l'annulation du tenseur $\tilde{\Omega}_{ij}$ caractérise les repères *irrotationnels* et entraine aussi, pour les lignes x^4, la propriété de constituer une *congruence normale*.

B - L'opération de projection naturelle, sur Θ ou sur Σ, peut s'appliquer au tenseur de courbure de la variété V_4. Les différentes projections d'un tenseur du quatrième ordre sont en nombre de 16 ; mais pour le tenseur de courbure, compte tenu de ses propriétés de symétrie, il y en a seulement 9 non identiquement nulles ; et celles ci se réduisent, au fond, aux trois suivantes (voir [10]).

$$\mathcal{P}_{\Theta\Sigma\Theta\Sigma}(R_{ijlm}) = \gamma_i\gamma_l\left[-\frac{1}{2}\gamma^4\partial_4(\tilde{K}_{mj}+\tilde{\Omega}_{mj})+\frac{1}{4}(\tilde{K}_m{}^r+\tilde{\Omega}_m{}^r)(\tilde{K}_{jr}+\tilde{\Omega}_{jr})+C_jC_m+\tilde{\nabla}_mC_j\right] \tag{4}$$

$$\mathcal{P}_{\Theta\Sigma\Sigma\Sigma}(R_{ijlm}) = -\gamma_i\left[\frac{1}{2}\tilde{\nabla}_m(\tilde{K}_{lj}+\tilde{\Omega}_{lj})-\frac{1}{2}\tilde{\nabla}_l(\tilde{K}_{mj}+\tilde{\Omega}_{mj})+C_i\tilde{\Omega}_{lm}\right] \tag{5}$$

$$\mathcal{P}_{\Sigma\Sigma\Sigma\Sigma}(R_{ijlm}) = \tilde{R}_{ijlm}+\frac{1}{4}(\tilde{K}_{li}+\tilde{\Omega}_{li})(\tilde{K}_{mj}+\tilde{\Omega}_{mj})-\frac{1}{4}(\tilde{K}_{mi}+\tilde{\Omega}_{mi})(\tilde{K}_{lj}+\tilde{\Omega}_{lj})+\frac{1}{2}\tilde{\Omega}_{ij}\tilde{\Omega}_{lm} \tag{6}$$

les 6 autres s'y ramenant immédiatement.

Si on donne un coup d'œil à ces projections on y voit paraître explicitement ce que nous avons nommé les caractères intrinsèques du repère, c'est-à-dire les tenseurs d'espace C_i, $\tilde{K}_{ij}$, $\tilde{\Omega}_{ij}$, ou directement ou assujettis à l'opération de *dérivation covariante transverse*, $\tilde{\nabla}_i$. Au sujet de cette opération, opérant sur des vecteurs ou tenseurs d'espace, je rappelle (cfr. [5], p. 371) qu'elle se construit formellement comme une dérivation covariante ordinaire en employant le tenseur métrique d'espace γ_{ij} au lieu du tenseur g_{ij} et la dérivée $\tilde{\partial}_r$ au lieu de la dérivée partielle ∂_r:

$$\tilde{\nabla}_i s_j = \tilde{\partial}_i s_j - \frac{1}{2}(\tilde{\partial}_i\gamma_{jr}+\tilde{\partial}_j\gamma_{ri}-\tilde{\partial}_r\gamma_{ij})\, s^r. \tag{7}$$

Dans la projection $\Sigma\Sigma\Sigma\Sigma$ du tenseur de courbure (voir [10]) on voit paraitre en plus, un tenseur d'espace du quatrième ordre, $\tilde{R}_{ijlm}$, qui semble bien avoir le droit au nom de *tenseur de courbure d'espace*, même dans le cas, pas du tout exceptionnel, où la distribution des 3-espaces Σ n'est pas holonome. En effet ce tenseur peut s'écrire d'une façon tout à fait identique à une expression bien connue du tenseur ordinaire de Riemann

$$\tilde{R}_{ijlm} = \frac{1}{2}[\tilde{\partial}_{lj}\gamma_{im}+\tilde{\partial}_{im}\gamma_{jl}-\tilde{\partial}_{li}\gamma_{jm}-\tilde{\partial}_{jm}\gamma_{il}]-\gamma^{rs}[\widetilde{(il,r)}\,\widetilde{(jm,s)}-\widetilde{(im,r)}\,\widetilde{(jl,s)}], \tag{8}$$

à ces différences près : l'emploi de la métrique d'espace au lieu de la métrique d'espace-temps et de la dérivation transverse au lieu de la dérivation ordinaire.

Des formules (4), (5), (6) on tire les quatre projections du tenseur de courbure contracté R_{ij} (tenseur de Ricci) (voir [10]):

$$\mathcal{P}_{\Sigma\Sigma}(R_{jm}) = \tilde{R}_{jm}+\frac{1}{4}\tilde{K}_i{}^i(\tilde{K}_{mj}+\tilde{\Omega}_{mj})-\frac{1}{4}\tilde{K}_{ij}(\tilde{K}_m{}^i+\tilde{\Omega}_m{}^i)+\frac{1}{2}\tilde{\Omega}_{mi}\tilde{\Omega}_j{}^i-\frac{1}{2}\gamma^4\partial_4(\tilde{K}_{mj}+\tilde{\Omega}_{mj})-C_jC_m-\tilde{\nabla}_mC_j \tag{9}$$

$$\mathcal{P}_{\Sigma\Theta}(R_{jm}) = \gamma_m\left[\frac{1}{2}\tilde{\nabla}_j\tilde{K}_i{}^i-\frac{1}{2}\tilde{\nabla}_i(\tilde{K}_j{}^i+\tilde{\Omega}_j{}^i)-\tilde{C}_i\tilde{\Omega}_j{}^i\right] \tag{10}$$

$$\mathcal{P}_{\Theta\Sigma}(R_{jm}) = \mathcal{P}_{\Sigma\Theta}(R_{mj}) \tag{11}$$

$$\mathcal{P}_{\Theta\Theta}(R_{jm}) = \gamma_j\gamma_m\left[-\frac{1}{2}\gamma^4\partial_4\tilde{K}_i{}^i+\frac{1}{4}(\tilde{K}^{ir}+\tilde{\Omega}^{ir})(\tilde{K}_{ir}+\tilde{\Omega}_{ir})+C_iC^i+\tilde{\nabla}_iC^i\right] \tag{12}$$

où l'on voit paraitre le tenseur d'espace de Ricci, $\tilde{R}_{jm}$, qu'on obtient de $\tilde{R}_{ijlm}$ en contractant le premier et le troisième de ses indices.

C - En procédant dans cette revue très rapide, je rappellerai qu'au moyen de la dite technique de projection on peut définir pour une particule matérielle quelconque, et même pour un photon, des *grandeurs standard*, relatives au repère envisagé, tel qu'un vecteur *vitesse*, un vecteur *impulsion*, une *masse* (relative), une *énergie*, un *champ gravitationnel*. En employant ces définitions on s'aperçoit qu'on peut donner aux lois du mouvement d'une particule librement gravitante une formulation relative ayant un caractère tout à fait newtonien (cfr. [2]) :

Dérivée temporelle de l'impulsion = masse x champ gravitationnel.

L'équation de l'énergie prend aussi une forme tout à fait classique (cfr. [3]). Sans m'arrêter sur ces points il nous suffira pour la suite de retenir ici l'expression explicite du champ gravitationnel standard. Le champ gravitationnel standard associé à un repère physique quelconque S est représenté par un vecteur d'espace G_i qui à son tour est décomposable en la somme des deux vecteurs d'espaces suivants :

a) Champ gravitationnel de repos (ou champ d'entrainement).

$$G_i^{!} = - c^2 C_i = - A_i = \tilde{\partial}_i U + \partial_4 \varphi_i \tag{13}$$

où on a posé :

$$U = - c^2 \log \sqrt{-g_{44}} \quad , \qquad \textit{potentiel scalaire} \tag{14}$$

$$\varphi_i = c^2 \gamma_i / \gamma_4 \qquad \textit{potentiel vecteur.} \tag{15}$$

Dans la première expression de $G_i^{!}$ on voit paraitre le vecteur C_i qu'on a rappelé auparavant. La deuxième expression montre l'identité du champ de repos, au signe près, avec l'accélération absolue de la particule du repère sur laquelle la particule d'épreuve se trouve juxtaposée à l'instant, ce qui justifie pour $G_i^{!}$ le nom de champ d'entrainement. La troisième expression met en évidence la dépendance de $G_i^{!}$ d'un potentiel scalaire U et d'un potentiel vecteur φ_i. La dépendance de $G_i^{!}$ du potentiel U se fait au moyen de l'opération $\tilde{\partial}_i$. (N. B. les deux termes dans lesquels $G_i^{!}$ a été décomposé dans la troisième expression ne sont pas séparément invariants vis à vis des changements (3), mais nous n'aurons pas occasion de les considérer séparément).

b) Champ de Coriolis.

$$G_i^{"} = c\, \tilde{\Omega}_{ij} v^j \tag{16}$$

dans lequel intervient le tenseur tourbillon d'espace et la vitesse standard de la particule d'épreuve.

Comme nous venons de dire, il y a plusieurs raisons qui justifient l'hypothèse que le vecteur $G_i = G_i^{!} + G_i^{"}$ représente le champ gravitationnel dans un repère donné, entre autre des propriétés différentielles ayant un caractère tout à fait newtonien, dont nous parlerons dans le paragraphe suivant. Mais d'abord voyons ce que devient le champ gravitationnel standard dans un univers plat de Minkowski quand on rapporte cet espace-temps à un repère tournant. On sait bien que si dans une région espace-temps plate, on envisage un repère rigide tournant d'une vitesse angulaire constante ω par rapport à un repère galiléen donné S_G et dans ce repère tournant on emploie des coordonnées d'espace cylindriques r, ϑ, z (qui représentent les véritables coordonnées cylindriques *initiales* en S_G d'une particule du repère S) la métrique de M_4 prend la forme (cfr. Møller, [13]).

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + dz^2 + 2\omega r^2 d\vartheta\, dt - (c^2 - \omega^2 r^2)\, dt^2. \tag{17}$$

On en déduit :

$$\tilde{K}_{ij} = 0 \ ; \ \tilde{\Omega}_{12} = \frac{2\omega r}{c\left(1 - \dfrac{\omega^2 r^2}{c^2}\right)^{3/2}} \ , \ \tilde{\Omega}_{23} = \tilde{\Omega}_{31} = 0 \ ; \tag{18}$$

$$G_i^{!} = \partial_i U = \frac{\omega^2 r}{1 - \dfrac{\omega^2 r^2}{c^2}} \delta_{i1} \ ; \ U = - c^2 \log \sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}} \ . \tag{19}$$

Le repère tournant S_ω est donc un repère rigide doué d'une vitesse de rotation (qui n'est pas la même en tous les points). Le champ de repos qui est présent dans ce repère est tout à fait analogue au champ centrifuge de la mécanique classique, avec lequel il se confond pour des petites valeurs de $\omega r/c$). Au contraire il en diffère de plus en plus, au fur et à mesure que r tend vers la valeur limite c/ω. Tout cela est au fond bien connu, sauf peut être l'expression exacte que nous avons attribuée au champ gravitationnel et à son potentiel, expression qui tient à la définition générale (13) (16) de champ gravitationnel standard.

3 - FONCTIONS STATIONNAIRES HARMONIQUES DANS UN UNIVERS STATIQUE -

Revenons maintenant à une V_4 courbe et particularisons sa structure locale en supposant que dans une région $\mathcal{D}$ elle soit statique, au sens de Levi-Civita. Cette hypothèse, en employant des coordonnées adaptées, se traduit par les conditions suivantes :

$$\begin{cases} g_{\alpha 4} = 0, \quad \partial_4 g_{ij} = 0, \quad \tilde{\partial}_i \equiv \partial_i \\ \tilde{\Omega}_{ij} = 0, \quad \tilde{K}_{ij} = 0. \end{cases} \tag{20}$$

Les deux dernières conditions entrainent l'existence d'une simple infinité de *sections* V_3, d'équation x^4 = const. , *normales* aux lignes x^4 et *isométriques* entre elles, aptes à définir, par passage au quotient, ce qu'on appelle d'habitude l'*espace physique* tridimensionnel.

L'hypothèse de staticité simplifie beaucoup, et d'une façon évidente, les formules de projection des tenseurs de courbure. En même temps les tenseurs d'espace $\tilde{R}_{\alpha\beta\rho\tau}$ et $\tilde{R}_{\alpha\beta}$ (voir (8) et (9)) se réduisent respectivement au tenseur de Riemann et au tenseur de Ricci de l'espace physique V_3. On peut encore ajouter que, dans les dites hypothèses, l'opération $\tilde{\nabla}_\alpha$, opérant sur des vecteurs ou tenseurs d'espace, se réduit à la dérivation covariante sur V_3.

Tout cela étant posé, soit $f(x^1, x^2, x^3)$ une fonction *stationnaire* (c'est-à-dire indépendante de x^4) ayant son support en $\mathcal{D}$. Une telle fonction peut être envisagée soit comme une fonction de trois variables définie sur chacune des sections V_3, soit comme une fonction de quatre variables définie en V_4. Dans les deux cas elle admet un même gradient - grad f - constituant un champ de vecteurs d'espace (c'est-à-dire normaux à γ), indépendant de x^4. Ce champ, à son tour, peut être envisagé ou bien comme un champ de vecteurs de V_3, ou bien comme un champ de V_4. Dans sa première acception il admet une *divergence tridimensionnelle* ainsi définie :

$$\text{div grad } f \equiv \tilde{\Delta} f \equiv g^{\alpha\beta}\tilde{\nabla}_\alpha \partial_\beta f \tag{21}$$

(dans le cas actuel la dérivation covariante transverse $\tilde{\nabla}_\alpha$ n'est pas autre chose que la dérivation covariante en V_3).

Si par contre on considère grad f comme un champ de vecteurs de V_4, il admet une *divergence quadridimensionnelle* :

$$\text{Div grad } f \equiv \Delta f \equiv g^{ij}\nabla_i \partial_j f \tag{22}$$

définie au moyen de la dérivation covariante en V_4.

Les deux divergences définissent respectivement le *laplacien d'espace*, $\tilde{\Delta} f$, de la fonction f et son *laplacien spatio-temporel* Δf. La dernière définition est d'ailleurs indépendante du caractère stationnaire de f.

Il est facile de constater qu'entre les deux divergences qu'on vient d'envisager existe la relation :

$$\text{Div grad } f = \text{div grad } f + C^i \partial_i f \tag{23}$$

de sorte qu'elles coïncident seulement si le repère physique de staticité est géodésique ($C_i = 0$).

Suivant la définition courante, une fonction stationnaire $f(x^1, x^2, x^3)$, de classe C^2, sera dite *harmonique au sens quadridimensionnel* dans le domaine $\mathcal{D}$ si en $\mathcal{D}$ elle satisfait à l'équation :

$$\Delta f = 0. \tag{24}$$

Pour cette classe de fonctions, qui en général ne coincident pas avec les fonctions stationnaires *harmoniques au sens spatial* ($\tilde{\Delta} f = 0$), nous allons établir un théorème d'unicité qu'on utilisera un peu plus tard (n. 4).

Soient V_3, V_3' deux sections normales d'espace, d'équation respective $x^4 = c$, $x^4 = c'$ ($c < c'$, constantes) ; w un domaine régulier de V_3, σ sa frontière (bidimensionnelle) ; w' le domaine de V_3 correspondant à w dans la translation définie par les lignes x^4, σ' sa frontière, correspondante à σ dans la même translation. Soit encore W le domaine à quatre dimensions engendré par w lors de sa translation de V_3 à V_3' et Σ sa surface latérale, engendrée à son tour par σ, dans la dite translation. La frontière, tridimensionnelle, de W est formée évidemment par Σ, w, w'.

Dans le domaine envisagé W, soit une fonction régulière f stationnaire et harmonique, au sens quadridimensionnel. A cause de son harmonicité elle satisfait partout à l'identité différentielle :

$$\mathrm{Div}\,(f\ \mathrm{grad}\ f) = \mathrm{grad}^2 f. \tag{25}$$

Si on intègre cette identité sur W, en appliquant le théorème de Green à la première intégrale, compte tenu que le flux de grad f à travers w et w' est nul, à cause du caractère spatial de grad f, on déduit :

$$\int_\Sigma f\ \mathrm{grad}\ f \,.\, n\, d\Sigma = \int_W \mathrm{grad}^2 f\, dW \tag{26}$$

où on a indiqué par n le vecteur unitaire orienté comme la normale extérieure à Σ. *Il en suit que si f est nulle sur σ, et partant sur Σ, elle est identiquement nulle en* W. Cette remarque est applicable en particulier à la différence entre deux fonctions stationnaires, harmoniques en W au sens quadridimensionnel, et prenant les mêmes valeurs sur σ, ce qui permet de formuler, dans notre espace-temps statique, les théorèmes suivants :

THEOREME D'UNICITE - *L'équation différentielle* $\Delta f = 0$ *ne peut pas admettre deux solutions stationnaires prenant les mêmes valeurs sur σ.*

COROLLAIRE - *Si une fonction stationnaire harmonique, au sens quadridimensionnel, est constante sur σ elle est constante en* w.

Comme on va le voir dans un instant, ce corollaire trouve une application intéressante à l'étude de la variété V_4 elle même.

4 - UN CRITERE SUFFISANT POUR RECONNAITRE LE CARACTERE MINKOWSKIEN D'UNE REGION VIDE D'UN ESPACE-TEMPS STATIQUE -

Dans une région statique de V_4, rapportée à son repère de staticité, le champ de Coriolis (16) est absent ($\widetilde{\Omega}_{ij} = 0$) ; en même temps le champ de repos $G_i^!$ (cfr. (13)) se réduit au gradient ordinaire d'une fonction potentielle, $U = -c^2 \log \sqrt{-g_{44}}$ indépendante de x^4 ($\gamma_\alpha = 0$, $\widetilde{\partial}_i \equiv \partial_i$, $\partial_4 g_{ij} = 0$).

Mais on peut dire davantage. Comme j'ai montré dans une note récente des *Comptes Rendus* (cfr. [7]), dans un espace-temps statique le potentiel U satisfait à une équation, parfaitement semblable à l'équation de Poisson, qui dans les régions vides se réduit à la forme de Laplace :

$$\Delta U = 0. \tag{27}$$

Cela étant rappelé, supposons savoir que le potentiel $U(x^1, x^2, x^3)$ prend une même valeur sur une surface fermée renfermant une région vide simplement connexe de l'espace physique V_3. Du corollaire du n. 3 il résulte immédiatement que U est constant à l'intérieur de σ, ce qui entraine $C_i \equiv -\frac{1}{c^2}\partial_i U = 0$. Si on tient compte de cette circonstance, ainsi que des conditions locales de rigidité et d'irrotationalité implicites dans l'hypothèse de staticité, dans l'équation de champ $\mathscr{R}_{\Sigma\Sigma}(R_{jm}) = 0$, en ayant égard à la formule (9), on déduit :

$$\widetilde{R}_{\alpha\beta} = 0. \tag{28}$$

Cela correspond, dans notre cas, à l'annulation du tenseur de courbure contracté de V_3. Mais pour une variété riemannienne à trois dimensions l'annulation du tenseur de Ricci entraine l'annulation du tenseur de Riemann, donc de $\widetilde{R}_{\alpha\beta\rho\tau}$. On en déduit, au moyen des formules générales (9) (10) (11), l'annulation du tenseur de courbure de V_4. On arrive à l'énoncé suivant :

Si dans une région vide simplement connexe d'un espace-temps statique V_4 *le potentiel scalaire* U *prend une meme valeur sur une surface fermée* σ *de* V_3 *(espace physique) renfermant un volume* w, V_4 *est minkowskien dans tout le domaine quadridimensionnel* W *engendré par* w.

5 - CHAMP GRAVITATIONNEL A L'INTERIEUR D'UNE COUCHE SPHERIQUE RIGIDE -

Envisageons maintenant un univers stationnaire V_4, spatialement sphérique, engendré par une couche sphérique et rigide de matière. La variété V_4 reste divisée, d'une façon naturelle, en trois parties : la région directement recouverte par la couche, où sont valables les équations intérieures du champ ; la partie au dehors de la couche, ayant la structure d'un espace-temps extérieur de Schwarzschild ; enfin la partie interne à la couche, régie elle même par les équations gravitationnelles du vide. Sur les frontières de séparation entre les trois domaines les conditions de raccordement de M. Lichnerowicz [11] sont valables.

Même si on laisse imprécisées la nature physique de la couche matérielle et ses dimensions, la condition de stationnarité suffit pour assurer que la région intérieure à la couche a une structure minkowskienne. On le reconnait aisément en observant d'un côté que la région en question est certainement statique (un repère adapté au caractère sphérique de V_4 est sûrement irrotationnel) et que d'autre part le potentiel U, stationnaire par hypothèse en V_4, prend sûrement la même valeur sur le bord interne de la couche. Toutes les conditions d'applicabilité du critère démontré plus haut étant vérifiées dans la cavité, la région de V_4 recouverte par la cavité même est nécessairement plate.

Ce résultat étend à la relativité le théorème célèbre de la théorie classique qui établit l'absence de champ newtonien à l'intérieur d'une couche sphérique.

Une fois reconnu le caractère minkowskien de la région de V_4 engendrée par la cavité sphérique, ce qui nous intéresse surtout est le fait que dans cette région, à la différence de ce qui arrive dans un espace-temps de Minkowski complètement vide, les repères galiléens sont physiquement repérables, devant être au repos, ou en mouvement de translation uniforme, par rapport à la matière constituant la couche.

Naturellement si dans la cavité on adopte un repère tournant S_ω (dont la vitesse de rotation ω est bornée par la limitation $\omega R < c$, R étant le rayon de la cavité) on voit naître les champs gravitationnels centrifuge et centrifuge-composé, qu'on a illustré auparavant (cfr. n. 2). Mais maintenant on comprend bien que ces champs prennent origine du mouvement particulier du repère par rapport à la matière présente dans l'univers, ce qui est bien en accord avec le principe de Mach.

Si en outre on observe que dans le repère S_ω, dans lequel le champ gravitationnel est rigoureusement connu, comme nous venons de rappeler, la couche de matière apparaît se mouvoir avec une vitesse de rotation constante, on voit que le problème de Thirring, de la détermination du champ gravitationnel à l'intérieur d'une couche sphérique tournante est résolu rigoureusement.

Il est significatif que quand on passe de la solution approchée de Thirring à la solution rigoureuse disparaisse toute dépendance du champ gravitationnel présent en S_ω du rayon R et de la masse M de la couche ainsi que de la constante universelle de gravitation. En même temps il semble venir à manquer un important appui à la relation entre la constante gravitationnelle, le rayon et la masse de l'univers qu'on avait cru pouvoir déduire des résultats approximés de Thirring.

Je terminerai par une remarque très simple. On dit souvent, et l'affirmation est très raisonnable, que si le principe de Mach est valable, tout effet d'inertie doit augmenter avec les masses qui le provoquent, exactement comme il arrive pour les actions gravitationnelles newtoniennes. A cette optique il pourrait paraître singulier que le champ gravitationnel à l'intérieur de la couche tournante soit indépendant de la masse de la couche.

Mais la difficulté n'est qu'apparente. On peut se convaincre facilement que si par hasard on modifiait la masse de la couche il y aurait évidemment un changement des potentiels gravitationnels et du champ à l'extérieur de la couche et même dans son épaisseur. Dans la cavité il y aurait bien des changements pour les valeurs des potentiels, qui doivent se raccorder aux potentiels du bord intérieur de la couche, mais le caractère minkowskien de la variété spatio-temporelle n'y serait pas troublé. La situation physique à l'intérieur de la couche resterait la même qu'auparavant : on comprend bien alors pourquoi le champ gravitationnel à l'intérieur de la couche, dans n'importe quel repère, ne dépend pas de la masse et des dimensions de la couche ni de la constante universelle de gravitation.

Si de tout cela on veut tirer une conclusion, on peut dire qu'en relativité la dépendence des forces d'inertie des masses de l'univers est réalisée d'une façon automatique, étant donné qu'inertie et gravitation ne sont plus distinguables. Si dans l'exemple que nous avons traité en détail le champ gravitationnel (à l'intérieur de la couche) ne semble pas dépendre des masses de l'univers (voir, masse de la couche) cela dépend d'un fait accidentel : l'annulation, dans la cavité, de la courbure spatio-temporelle.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AVEZ A. - C.R. Acad. Sc., 250, 1960.

[2] CATTANEO C. - Nuovo Cimento, 10, 1958 ; [3] N.C., 11, 1959 ; [4] N.C., 13, 1959 ; [5] Annali di Matematica, 48, 1959 ; [6] Rend. Accad. dei Lincei, 27, 1959 ; [7] C.R. Acad. Sc., 252, 1961 ; [8] C.R. Acad. Sc., 253, 1961 ; [9] Rend. Accad. dei Lincei, 32, 1962.

[10] CATTANEO-GASPARINI I. - C.R. Acad. Sc., 252, 1961.

[11] LICHNEROWICZ A. - Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme, Masson, Paris, 1955.

[12] MACH E. - Die Mechanik, F.A. Brockhaus, Leipzig, 1901.

[13] MØLLER C. - The theory of relativity, Oxford, Clarendon Press, 1952.

[14] SERINI R. - Rend. Accad. dei Lincei, 27, 1918.

[15] THIRRING H. - Phis. ZS., 19, 33, 1918 ; [16] Phis. ZS., 22, 29, 1921.

DISCUSSION

Mme TONNELAT - Le potentiel est représenté par U et le champ par $G^{!}_{i}$. Si la masse croit, on ne constate pas, d'après le ds^2, la modification de U (terme en ω) ? Ce terme en ω n'est-il pas modifié par un coefficient ?

M. CATTANEO - Effectivement tous les termes du ds^2 seraient modifiés par un même coefficient, mais la situation physique à l'intérieur de la couche resterait la même, car deux ds^2 ne différant que par un même coefficient constant sont physiquement indistinguables dans le cadre purement gravitationnel (le mouvement d'une particule d'épreuve gravitante ne change pas, étant donné que la présence du coefficient ne change pas les géodésiques espace-temporelles).

M. SOURIAU - Si l'on se donne le rayon de la sphère, la modification de la masse totale change-t-elle les champs intérieurs ?

M. CATTANEO - Il est difficile, à mon avis, de concevoir un changement de la masse totale sans aucune modification du rayon de la couche, masses et longueurs étant liées par les équations gravitationnelles. Je pense d'ailleurs que tous ces changements ne pourraient être observés directement car l'altération éventuelle des longueurs, des temps etc., affecterait aussi les étalons de mesure. Mais dans le cas présent même une expérience gravitationnelle, au moyen d'une particule d'épreuve, ne pourraient non plus révéler de tels changements car les géodésiques espace-temporelles ne seraient pas modifiées.

M. SOURIAU - Il serait intéressant de savoir s'il est possible de résoudre, simultanément au problème gravitationnel, le problème de l'équilibre et des contraintes dans la matière.

M. CATTANEO - Il s'agirait sans doute d'un problème fort intéressant mais, je pense, pas simple. Il faudrait d'abord choisir un schéma convenable pour la couche, par exemple un schéma solide élastique, ce qui ne semble pas très commode à manier. Mes considérations renoncent à toute hypothèse sur la constitution physique de la couche en ne supposant que l'équilibre, de quelque façon qu'il soit réalisé.