Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2
Série Mathématiques

René de Possel

Présentation du colloque

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 7, série *Mathématiques*, n° 1 (1962), p. 9-17
<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1962__7_1_9_0>

PRÉSENTATION DU COLLOQUE

René de POSSEL
Professeur et Directeur de l'Institut de programmation
à la Faculté des Sciences de Paris,
Directeur du Laboratoire de Calcul Numérique
du Centre National de la Recherche Scientifique

I - Aider l'effort intellectuel au moyen de la machine, telle était l'idée de Blaise Pascal quand il imagina sa calculatrice, tel est encore aujourd'hui le but poursuivi par tous ceux qui projettent, construisent des machines à traiter l'information, en imaginant des emplois de plus en plus divers et nombreux, ou en perfectionnent ces emplois. L'expression "traiter l'information", due, je crois bien, à Pierre Auger, demande quelques explications. Il s'est en effet développé une théorie de l'information qui intervient essentiellement dans le domaine des télécommunications ; ce n'est pas notre but d'en parler ici ; nous prenons le mot "information" dans un sens beaucoup plus général : une machine reçoit des données, un programme de travail qu'elle effectue, et produit des résultats ; les données, le programme constituent de l'information, les résultats également, mais il convient de "traiter" les uns pour obtenir les autres. Les données et le programme peuvent être numériques, mais ce n'est nullement une obligation ; il en est de même pour les résultats. Nous aurons l'occasion dans un moment de préciser dans quelques cas quelle est la nature de ces données et de ces résultats.

Mais arrivons-en au sujet pour lequel nous sommes réunis, le "Colloque de Mathématiques". Je remercie les organisateurs du Colloque de m'avoir choisi pour le présenter ; je ne sais pas très bien ce que ces organisateurs avaient en vue sous le titre "présentation de Colloque", je ne sais pas non plus ce que vous attendez sous ce titre. Essayer de donner une idée générale sur le contenu des exposés qui vont etre faits par de très éminents spécialistes, dont beaucoup sont pour moi des amis, j'en serais d'autant plus incapable que, pour la plupart de ces exposés, je n'ai pas reçu de résumé. D'autre part, ces spécialistes sont trop connus, et même trop nombreux pour que je vous les présente individuellement. Je me bornerai à indiquer quelques uns des liens qui existent entre les disciplines qui font l'objet du Colloque et les grandes machines électroniques.

J'ouvre ici une parenthèse : je reprends la parole dans cette ville de Clermont après une interruption de vingt-et-un ans. J'ai en effet enseigné ici la mécanique rationnelle puis le calcul différentiel durant quatre années. Au cours de la dernière de ces années, en 1940-41, la Faculté des Sciences de Strasbourg se trouvait repliée à Clermont. Ce rapprochement a eu un avantage : il a permis, grâce au concours de mes collègues de Strasbourg, d'organiser pour la première fois un enseignement des mathématiques qui donnait les grandes théories indispensables et qui les exposait avec un degré de généralité bien supérieur à celui qu'imposait jusque là la tradition. Outre la nouveauté de la matière enseignée et les résultats obtenus, il a été ainsi prouvé par l'expérience qu'un enseignement des mathématiques doit être suffisamment étoffé et nécessite la concentration d'un assez grand nombre de maîtres. Plusieurs de nos élèves de cette année là sont maintenant professeurs dans diverses Facultés.

Revenons au Colloque et examinons les titres de ses différentes sections. Ces titres correspondent à des domaines divers des mathématiques ; ils semblent avoir été choisis tout d'abord parce qu'ils correspondent à des parties de l'œuvre qui avait été entamée par Blaise Pascal, constituant des sujets qu'il avait attaqués ou dont il avait posé les bases. Une autre raison de ce choix est peut-être parce que les spécialistes de l'un de ces domaines s'intéressent presque toujours aux autres ; mais la liaison qui nous intéresse aujourd'hui, et qui est sans doute une conséquence de la première, est que tous ces sujets touchent plus ou moins au traitement de l'information par les machines. C'est à ce point que, pour quatre d'entre eux tout au moins, il est maintenant question de créer une Commission spéciale au sein du Centre National de la Recherche Scientifique qui les réunirait, car certains ne sont pas représentés du tout actuellement au Centre, alors que d'autres sont plus au moins rattachés à d'autres disciplines.

Je m'excuse d'avance auprès des spécialistes de chacune des sections du Colloque de dire des choses qui leur sont parfaitement connues quand je parlerai de leur section.

II - Le premier sujet du Colloque est la Logique mathématique. A quoi peut-elle bien servir ? C'est une question qu'ont posée pendant longtemps la plupart des mathématiciens. A cette question s'en ajoute aujourd'hui une autre : quels sont les liens qui existent entre la logique mathématique et le traitement de l'information ?

Un lien d'ordre expérimental apparaît tout d'abord. C'est une simple constatation : les bons spécialistes en matière de machines à calculer, en particulier ceux dont les travaux ont amené des progrès importants pour ces machines, sont aussi des spécialistes de la logique mathématique. Au haut de l'échelle je citerai Von Neumann, dont les travaux sur l'axiomatique de la théorie des ensembles sont bien connus, et qui est l'un des principaux promoteurs de la construction des grandes calculatrices aux Etats-Unis. A l'opposé, je citerai ce jeune programmeur sur machine qui me disait récemment (à mon grand étonnement) : "depuis que j'ai suivi un cours de logique mathématique, je programme avec beaucoup plus de facilité et mes progrès sont rapides".

Ces faits sont en contradiction avec la tradition bien établie, d'après laquelle la logique mathématique, science abstraite par excellence, ne peut être d'aucun secours à la mathématique véritable, et a fortiori, croyait-on, d'aucun secours à toute autre discipline, à plus forte raison si celle-ci présentait un caractère pratique. Cette tradition est, fort heureusement, en train de disparaître. On avait bien remarqué, tout au début de l'avènement de la logique mathématique, que le simple "calcul des propositions", ou la "simple algèbre Booléenne", permettait de tirer sans peine des conclusions précises d'une suite de phrases où se retrouvaient plusieurs fois les mêmes substantifs, verbes et adjectifs. Ce n'était là qu'un simple jeu dont des exemples furent donnés par l'un des premiers logiciens mathématiciens, Dodgson, plus connu sous le pseudonyme de Lewis Caroll, comme auteur d'"Alice au pays des merveilles".

Beaucoup plus tard, ce même calcul, cette même algèbre de Boole, commencèrent à être utilisés, pour réaliser commodément des circuits électriques à commutations multiples, comme on en rencontrait dans les téléphones, ou dans les premières installations plus ou moins automatisées. Il est vite apparu que l'on pouvait ainsi économiser l'effort de pensée, et parvenir à de meilleures solutions.

Entre temps, les paradoxes de la théorie des ensembles avaient amené plusieurs mathématiciens à axiomatiser cette théorie, de plusieurs façons plus ou moins différentes. Les systèmes d'axiomes proposés diffèrent parfois très peu sans qu'on puisse les ramener l'un à l'autre. Ces axiomatisations mirent en évidence le fait que certains problèmes, tels par exemple que "le problème du continu" posé déjà par Cantor et qui consiste, rappelons-le, à savoir s'il existe des ensembles de puissance comprise entre le dénombrable et le continu, ne pouvaient avoir de sens précis que lorsque le système des axiomes de départ était exactement précisé. Les travaux de Gödel furent fondamentaux dans cette voie : Gödel montra en particulier que si une contradiction apparaissait en adjoignant à un certain système d'axiomes l'énoncé affirmatif du problème du continu, cette contradiction existait déjà avant l'adjonction (*).

Pendant ce temps, le plus célèbre des axiomes de la théorie des ensembles, l'axiome du choix ou de Zermelo faisait son apparition explicite tant en algèbre, dans la théorie des corps, avec Steinitz, qu'en analyse notamment en "théorie des fonctions d'une variable complexe" dans l'étude du prolongement des surfaces de Riemann, et aussi dans la théorie de la mesure.

Dès lors il devenait impossible au mathématicien de laisser délibérément de côté la logique. Une démonstration ne pouvait plus être considérée comme rigoureuse, dans les cas compliqués tout au moins, que lorsqu'il avait été possible de la formaliser dans l'un des langages de la logique mathématique.

D'un autre côté, les machines à calculer avaient fait l'objet de quelques études isolées au siècle dernier. Citons la machine de Babbage qui ne fut jamais achevée ; les difficultés d'ordre mécanique étaient grandes pour réaliser une machine seulement capable de calculer les valeurs d'un polynôme. Cependant des essais furent couronnés de succès : citons une machine à résoudre les équations algébriques dont un périodique du milieu du siècle dernier, le "Magasin Pittoresque", nous donne une gravure, et, à une date beaucoup plus récente, les "analyseurs différentiels" qui permettent de résoudre certaines équations différentielles. Seule l'électronique devait permettre de réaliser la machine universelle convoitée.

Il apparut que les opérations logiques les plus simples devaient tout d'abord être effectuées dans une machine, afin de réaliser, à partir de celles-ci, en les combinant en nombre suffisant, des opérations de plus en plus compliquées, en passant par les opérations arithmétiques. C'était

----

(*) Cohen a démontré en 1963 qu'il en était de même pour l'énoncé négatif du problème.

une première apparition de la logique dans les machines. En même temps se développait, avec Von Neumann, avec Türing, une "théorie générale des machines" touchant à la fois à la logique mathématique et à l'algèbre.

Ce dernier point nous amène à faire une remarque : si l'algèbre peut être axiomatisée et décrite au moyen de la logique, inversement, les systèmes formels utilisés en logique, ou même les systèmes formels en général qui font aujourd'hui l'objet d'études poussées, rentrent dans le cadre des structures algébriques. On tourne en rond mais le cercle décrit ne paraît pas être vicieux. Simplement, on ne peut pas dire quelle est la notion première : logique ou structure algébrique, chacune des deux notions pouvant être décrite au moyen de l'autre. On constate d'ailleurs souvent qu'une étude élaborée dans le cadre de la logique peut être transposée dans celui des mathématiques pures, devenant ainsi de l'algèbre ou de la théorie des ensembles, et qu'inversement certains travaux de théorie des ensembles, paraissant a priori fort compliqués, admettent une interprétation très simple en logique. On en trouvera des exemples dans les travaux de R. Fraïssé.

Actuellement la logique mathématique est de plus en plus utilisée, tant par les spécialistes des projets de machines que par leurs utilisateurs, à tel point que des enseignements spéciaux de logique doivent être créés dans ce but.

Donnons des précisions sur quelques développements récents qui sont liés à la logique mathématique et au Calcul automatique.

Citons d'abord la "linguistique mathématique", science en cours de développement, qui étudie avec rigueur les rapports entre la structure d'une phrase et sa signification ; c'est, si l'on veut, la mathématisation de la grammaire et de la syntaxe. Un des buts auxquels elle doit parvenir est d'analyser complètement un texte par des procédés entièrement mécaniques; elle devrait pouvoir aussi reconstituer la grammaire et la syntaxe d'une langue inconnue, dont on connaîtrait des textes sans rien savoir de leur signification.

Une des applications de la linguistique mathématique, aussi appelée "linguistique quantitative" bien que ce dernier terme ait souvent un sens plus restreint, est constituée par les études poursuivies en vue de la traduction automatique. A ce propos une question est souvent posée : la traduction automatique parviendra-t-elle à rendre les finesses d'un texte littéraire ? Nous n'avons pas le temps d'y répondre ici, même partiellement. La réponse dépendrait d'ailleurs des développements futurs des machines. Mais nous pouvons affirmer qu'une étude préliminaire de la logique mathématique élémentaire est indispensable pour aborder la linguistique mathématique.

Ces questions de langages se rattachent plus ou moins à une vaste discipline, elle aussi en cours de développement. Il s'agit des "langages symboliques". On entend par là un langage suffisamment débarassé des incertitudes et des variations du langage courant. De tels langages ont été créés dans des buts très variés, mais plusieurs d'entre eux l'ont été spécialement pour "converser" avec les machines. Nous allons expliciter ce point.

Etant donnée une machine à calculer, elle est susceptible d'effectuer certaines opérations selon des "ordres" ou "instructions" prévus. Le nombre des opérations différant entre elles par leur nature est très variable : pour certaines machines, la gamme des instructions ne dépasse pas cinq ou six, pour d'autres elle est de plusieurs centaines. Pour que la machine exécute un travail donné, il faut préciser la suite des ordres qu'elle doit exécuter, dont chacun est une opération portant sur certaines données contenues à cet instant dans la machine. La suite de ces ordres, ou tout au moins certaine suite restreinte d'entre eux dont la suite tout entière se déduit par répétition de cycles ou boucles, constitue le "programme". En élaborant ce programme, le "programmeur" est tenu de respecter de très nombreuses contraintes, dont les principales ont pour but de ne pas surcharger un emplacement de mémoire, l'introduction d'une information dans un tel emplacement effaçant l'ancienne.

La réalisation d'un programme dans de telles conditions est fort longue, et sujette à beaucoup d'erreurs, qui doivent être corrigées une à une. Un bon programmeur, dans certains cas, parvient difficilement à éviter une faute sur dix ordres, en moyenne, tant les contraintes à observer sont multiples. Il est apparu très vite dans l'emploi des machines qu'il y avait intérêt à utiliser non pas directement le code-machine, c'est-à-dire le "langage machine" de la machine utilisée, mais un "langage symbolique", aussi proche que possible du langage algébrique ou logique usuel, et susceptible d'être transformé mécaniquement, sans intervention humaine, en langage machine, cette transformation étant effectuée par la machine elle-même, au moyen d'un programme spécial écrit, lui, une fois pour toutes, en langage machine ; c'est un tel programme que l'on nomme "compilateur".

Un langage symbolique destiné à des machines n'est jamais d'un emploi universel ; d'une part il peut s'appliquer à des ensembles de machines plus ou moins vastes, d'autre part, il est susceptible d'additions et de perfectionnements. Ces modifications se font plus ou moins aisément selon les cas, et il y a grand avantage à prévoir dès le début les possibilités de modifications. Le compilateur, lui aussi, sera susceptible de perfectionnements ; il peut réaliser à partir du programme écrit un langage symbolique, un programme en langage machine, plus ou moins "optimisé", c'est-à-dire plus ou moins proche de celui qui résoudrait le problème dans le temps minimum ; mais, si perfectionné que soit le compilateur, il parviendra à un programme en langage machine moins optimisé que celui qu'aurait réalisé un bon programmeur.

Un autre type de langage symbolique est constitué par une "langue intermédiaire" dans le problème de la traduction automatique, langue telle qu'il soit plus simple de traduire d'abord de la langue de départ vers la langue intermédiaire, puis de cette dernière vers la langue d'arrivée. Des chercheurs ont étudié ces problèmes de la construction d'une langue intermédiaire convenant à la traduction les unes dans les autres de toutes les langues d'un groupe pouvant en contenir de dix à vingt.

Le travail ne paraît pas sensiblement plus difficile que dans le cas de deux langues et il semble que ce soit là la solution d'avenir.

Pour donner une idée du développement actuel des langages symboliques, je citerai le nombre de plus de deux-cent-soixante participants, dont quatre-vingt français environ, au "Symposium sur les langages symboliques "organisé à Rome il y a deux ou trois mois par le "Centre International de Calcul".

Citons encore deux domaines où se rencontrent la logique mathématique et le calcul automatique. Ce sont les "problèmes de tris" et l'"automatique documentaire".

Dans les problèmes de tris, il s'agit de classer des éléments en ensembles partiels totalement ordonnés, suivant des directives qui peuvent être compliquées. La logique mathématique permet de trouver une solution simple, sinon la plus simple, d'après les possibilités des machines dont on dispose. Citons les études concernant le vocabulaire et la syntaxe d'une œuvre ou d'un auteur déterminé, qui se rattachent aux questions de tris.

L'"automatique documentaire" consiste à extraire d'un ensemble de documents bibliographiques, ou même d'un ensemble de textes pris dans leur intégralité, ceux qui sont nécessaires pour une étude déterminée : les combinaisons des conditions auxquelles doivent satisfaire ces documents sont du ressort de la logique mathématique ; il en est de même de la recherche de ceux de ces documents qui vérifient les conditions exigées.

Dans plusieurs des applications que nous venons d'envisager, linguistique mathématique, tris, automatique documentaire, etc., le travail de la machine doit porter sur des données constituées par des textes dont le volume peut être considérable. Ces textes doivent se trouver sous une forme directement utilisable par la machine, par exemple sous forme de rubans magnétiques sur lesquels ils sont "codés", chaque caractère d'imprimerie étant désigné par une combinaison déterminée de signaux élémentaires. Pour réaliser ce codage, il est nécessaire jusqu'ici de taper les textes sur un clavier, caractère après caractère, puis de vérifier cette frappe. Il est difficile de dépasser la cadence d'une page à l'heure par personne. Ce travail nécessite un très grand nombre de clavistes et de vérificateurs, ce qui limite beaucoup le nombre des études de ce genre. Il paraît indispensable de créer un moyen automatique de transformer l'information imprimée, quelle qu'elle soit, en information codée, et cela à une cadence d'au plus quelques secondes par page. Ces réalisations n'existent pas encore, mais je crois pouvoir affirmer qu'elles existeront bientôt, sous la forme d'un "lecteur automatique extensif", c'est-à-dire susceptible de lire tous les textes usuels d'imprimerie.

Des problèmes qui semblaient insolubles pourront ainsi devenir faciles. Supposons, par exemple, que le "Bulletin signalétique du CNRS", paraissant depuis un peu plus de vingt ans, ait été codé sur une bande magnétique. Il pourrait être exploré en totalité durant quelques heures seulement, permettant de répondre ainsi à une centaine, un millier de questions bibliographiques diverses, les "extraits" utiles étant réimprimés en quelques minutes, grâce à une "imprimante" rapide.

Enfin des essais ont été tentés pour exécuter des raisonnements au moyen de machines. Seuls des cas très simples du "problème de la décision" ont pu être traités jusqu'ici, le nombre des combinaisons à effectuer dans des cas plus compliqués dépassant de beaucoup la capacité des machines actuelles.

III - Passons à la deuxième section du Colloque, le calcul des probabilités.

Bien entendu, dans une application quelconque du calcul des probabilités, il s'agit toujours, à partir d'une certaine "information" sur la question, de calculer les probabilités pour que tel ou tel évènement se produise ; c'est là une façon particulière de "traiter" cette information. Mais toute application des mathématiques à une science, quelle qu'elle soit, permettrait d'arriver à la même conclusion. C'est ailleurs qu'il faut chercher la liaison entre "calcul des probabilités" et "Traitement de l'information". Cette liaison apparaît plus aisément si on considère, non pas le calcul des probabilités en lui-même, mais certaines de ses applications ; il s'agit de la "statistique" et de la "recherche opérationnelle".

La statistique accumule des données provenant d'un grand nombre d'observations. Pour pouvoir tirer de ces données des conclusions intéressantes, que ces conclusions soient de nature théorique ou qu'elles soient des applications, il faut effectuer des calculs d'une ampleur souvent immense à l'échelle du calculateur manuel. L'avènement des grandes machines a permis d'obtenir de telles conclusions dans des cas beaucoup plus nombreux qu'auparavant. Il a été possible de tirer des conclusions précises des résultats de grands recensements. Citons aussi des applications à l'élevage et à l'agriculture qui furent poursuivies en Grande-Bretagne dès l'apparition des premières machines électroniques. Il en est de même dans tous les domaines qui touchent à la biologie ; seule l'utilisation des machines permet en général d'utiliser les résultats statistiques d'observations.

Quant à la recherche opérationnelle, sa création est beaucoup plus récente, bien que certains des problèmes qu'elle étudie aient été considérés isolément depuis longtemps, en particulier par Monge, je crois bien pour des questions de terrassements. La recherche opérationnelle revêt des aspects très variés, bien qu'elle traite du problème général suivant : quelles sont les décisions à prendre dans une entreprise pour assurer sa marche et son développement dans les meilleures conditions possibles ? Il s'agit avant tout de savoir ce qu'on entend par "les meilleures conditions possibles" ; sans doute faut-il minimiser une certaine fonction des "variables" , celles-ci étant soumises à certaines contraintes. Sans insister sur le fait que le choix de cette fonction peut présenter des difficultés, et que dans le cas d'une entreprise industrielle et commerciale, les différents services d'études, de fabrication, d'achats, de ventes, etc., ne seront pas d'accord sur le choix de la fonction à minimiser ou à maximiser, qui pourra être le gain, la production, le chiffre d'affaires, l'extension de l'entreprise, etc..., bornons-nous à indiquer que cette fonction peut avoir un caractère bien défini, comme pour un problème de transport de marchandises en quantités déterminées, ou au contraire un caractère aléatoire, si la marchandise à transporter dépend des achats des clients, achats qu'on ne peut prévoir à l'avance qu'avec certaine probabilité. Le caractère aléatoire se rencontre aussi, par exemple, dans le cas où il s'agit de prévoir des achats ou des commandes afin de renouveler des stocks.

Comme problème de recherche opérationnelle important, citons celui des files d'attente, dont Emile Borel avait autrefois entrepris l'étude; depuis, les résultats nouveaux ont été nombreux, et les travaux abondants ; la question se rattache à d'importants domaines du calcul des probabilités.

Un cas particulier important est celui où une question de recherche opérationnelle se ramène à minimiser une fonction de plusieurs variables, lorsque celles-ci sont assujetties à vérifier des égalités et des inégalités. Si ces contraintes sont linéaires, et si la fonction à minimiser l'est aussi, on est ramené à un problème linéaire dans un espace dont la dimension peut être très grande ; par exemple peut atteindre plusieurs centaines. C'est la programmation linéaire, pour laquelle de nombreuses méthodes d'approche ont été proposées. Le problème est résoluble sur grande machine électronique, à condition de ne pas chercher la meilleure solution possible, mais une solution qui donne à la fonction à minimiser une valeur assez voisine de son minimum.

La recherche opérationnelle a surtout été développée à l'étranger, mais il en existe depuis peu un enseignement à l'"Institut de Statistique de l'Université de Paris", qui sert en même temps d'option pour le "Doctorat de 3ème Cycle d'Analyse Numérique". Quelques spécialistes ont obtenu en France d'importants résultats nouveaux.

Un type de recherche opérationnelle qui se développe rapidement est le "travail en temps réel". Il s'agit, par exemple, d'une centrale électrique où des décisions peuvent devoir être prises à chaque instant en fonction des indications d'un certain nombre d'appareils de mesure : mise en route ou arrêt de certaines unités, calculs de rendements pendant une période donnée, et décisions propres à améliorer ces rendements ; recherche des causes de certaines pannes, et décisions permettant de supprimer ces pannes : une calculatrice électronique exécute en permanence ce programme ; une machine de secours prête à fonctionner est nécessaire et sera utilisée lors de l'entretien de la première. Ici encore, le calcul des probabilités jouera souvent pour établir le programme d'action de la calculatrice.

IV - La troisième section du Colloque est intitulée "Géométrie et Physique mathématique". Il s'agit essentiellement, du moins je le suppose, n'ayant pas en main les résumés des exposés de cette section, de tout un ensemble de recherches qui tirent leur origine de l'étude des principes de la mécanique. C'est la théorie de la relativité qui a établi un lien profond entre la géométrie, au sens général qui a été donné au mot par Riemann, et les phénomènes physiques, le but poursuivi pouvant, en un certain sens, s'énoncer ainsi : considérer tous les phénomènes physiques comme des propriétés géométriques de l'espace.

Alors que la gravitation est entrée aisément dans ce cadre, il n'en a pas été de même des autres phénomènes électromagnétiques, quantiques, nucléaires. De très nombreux travaux sont poursuivis depuis 1920, peu après les premiers mémoires d'Einstein sur la relativité générale.

Après une accalmie, ces théories reprennent un essor aujourd'hui. Mais il paraît indispensable de pouvoir les soumettre à l'épreuve de l'expérience. Les équations auxquelles elles donnent lieu sont en général très compliquées, et ce n'est que dans des cas extrêmement particuliers qu'il a été possible jusqu'ici d'en tirer des conclusions. Pour pouvoir pousser plus loin cette confrontation, il sera nécessaire de résoudre de très importants systèmes d'équations aux dérivées partielles. Or, nous y reviendrons plus loin, seules les machines les plus puissantes actuelles, ayant une capacité de mémoire rapide d'au moins 4 millions d'éléments binaires, et effectuant, par exemple, un nombre de multiplications "en flottant" par seconde de l'ordre de 300 000, semblent permettre d'attaquer des opérations à quatre variables. Les techniques futures, qui permettront vraisemblablement, d'ici quelques années, de multiplier ces vitesses et ces capacités par un facteur de l'ordre de 50, donneraient des possibilités d'un ordre de grandeur nettement supérieur : par exemple quatre variables dans d'assez nombreux cas, et cinq variables dans des cas particuliers.

V - Une autre section du Colloque est l'"analyse numérique". On entend par là la partie de l'analyse mathématique susceptible d'être utilisée dans le calcul numérique.

On peut considérer que, dans leurs débuts, les mathématiques ont été créées en vue du calcul numérique. Dans leurs développements successifs, elles s'en sont souvent de plus en plus écartées ; mais la raison principale de ces écarts a été que ces théories, si on avait voulu les appliquer, auraient donné lieu à des calculs irréalisables à la main. Avec les machines électroniques, la situation s'est renversée ; chaque jour de nouvelles branches de l'analyse mathématique donnent accès au calcul numérique. Les développements auxquels elles avaient donné lieu jusque là sont repris, étoffés en vue du calcul numérique, si bien que la théorie initiale n'en apparaît plus que comme le squelette.

Citons les diverses démonstrations de théorèmes d'existence d'équations différentielles et aux dérivées partielles, y compris les méthodes de minimum ; ces démonstrations sont presque toutes devenues aujourd'hui les schémas des puissantes méthodes de calcul numérique.

D'autre part des théories anciennes, telles que l'approximation de Tchebycheff, passent au premier rang de l'actualité. Il en est de même des fractions continues, qui constituent une excellente méthode de calcul, comme nous le verrons dans l'un des exposés du Colloque.

Les notions qui paraissaient les plus éloignées des applications jouent également leur rôle. Par exemple, il serait aussi absurde aujourd'hui, pour le mathématicien qui prépare des problèmes en vue de les confier à une machine, de vouloir éviter l'intégrale de Lebesgue qu'il n'était absurde hier de vouloir éviter le nombre irrationnel ; les deux choses sont du même ordre, comme on s'en convaincra aisément en y réfléchissant quelque peu.

La topologie joue également un rôle essentiel dans les différentes sortes d'approximation d'une fonction, sortes entre lesquelles il faut choisir selon les besoins et les nécessités auxquelles répond le calcul à effectuer. Dans chaque cas, c'est une topologie bien déterminée qu'il convient de choisir dans l'espace fonctionnel envisagé.

En dehors des développements qui se rattachent à l'analyse classique, le calcul numérique est sur le point de donner naissance à des théories nouvelles d'analyse. C'est tout un aspect de l'analyse mathématique qui est ainsi appelé maintenant à se développer, et sur lequel nous ne savons encore à peu près rien. Citons un exemple simple : la notion de "racines égales" d'une équation algébrique, ou même transcendante, doit être remplacée la plupart du temps en analyse numérique par une notion nouvelle : celle de racines indiscernables quand les coefficients de l'équation varient dans des domaines fixés.

VI - Nous parvenons à la dernière section du Colloque : "le traitement automatique de l'information et les machines". Mettons d'abord à part les "machines analogiques" dont il convient de rappeler brièvement le principe : un phénomène physique est régi par le système d'équations qu'on se propose de résoudre ; les données, les paramètres et les résultats correspondant à des grandeurs physiques qui sont inscrites ou qui sont lues sur des cadrans, ou encore qui sont utilisées directement; ce peuvent être, par exemple, des tensions ou des intensités de courant, continus ou alternatifs.

Les autres machines à traiter l'information sont appelées "digitales" ou "numériques". Rappelons qu'elles n'effectuent en principe que les opérations logiques "ET" et "OU", ainsi que la "négation", portant sur un ou sur deux symboles binaires ou "bits", auxquels on peut attribuer par convention les valeurs "zéro" et "un" (figure 1):

NÉGATION	OPÉRATION "ET"			OPÉRATION "OU"		
		0	1		0	1
0 devient 1	0	0	0	0	0	1
1 devient 0	1	0	1	1	1	1

Figure 1

Toute autre opération effectuée sur ces machines se ramène à ces trois opérations élémentaires ; on peut même supprimer l'une des deux opérations "ET" et "OU", en la ramenant aux deux autres ; il en est ainsi, en particulier, des opérations arithmétiques qui, selon les machines, peuvent s'effectuer en décimal ou en binaire, ou encore autrement.

Essayons de donner une idée de la puissance actuelle de ces machines, ainsi que de l'augmentation progressive de cette puissance. Prenons, par exemple, la résolution d'un système différentiel courant, tel que celui du problème des trois corps, en mécanique classique, problème dont la difficulté était célèbre avant l'avènement des machines ; c'est un système d'ordre 18. Supposons qu'il s'agisse d'effectuer cent pas d'intégration, selon une méthode classique, par exemple "Runge-Kutta" ou "Adams".

Une calculatrice du type I B M 704, conçue il y a environ sept ans, mettrait par exemple 10 secondes.

Une calculatrice I B M 7090, conçue à peu près trois ans plus tard, mettrait environ sept fois moins de temps, soit une durée de l'ordre de 1,4 seconde.

Une calculatrice du type I B M 7094, conçue récemment, pourrait mettre 0,4 seconde, et une machine de rapidité extrême, telle que l'"ATLAS" de l'Université de Manchester, construite par la maison "Ferranti", mettrait peut-être 1/10 de seconde. Il ne s'agit là que d'ordres de grandeur, et les représentants des constructeurs ici présents, pourraient certainement indiquer des nombres plus précis.

Supposons qu'il s'agisse d'une équation aux dérivées partielles à deux variables indépendantes ; pour un problème moyen, les temps nécessaires sur les quatre machines que nous venons de citer pourraient s'étager entre 15 minutes et 13 secondes. S'il s'agissait d'une équation aux dérivées partielles à trois variables, avec des conditions aux limites un peu compliquées, les temps pourraient aller de 14 heures sur la machine I B M 704, à condition qu'elle soit munie d'une mémoire à 32 000 mots de chacun 40 symboles binaires environ, à 5 minutes sur la machine "ATLAS".

Si enfin il s'agissait d'une équation aux dérivées partielles à quatre variables indépendantes, les machines I B M 704, I B M 7090 et I B M 7094 seraient impuissantes à la résoudre, à moins que les conditions aux limites ne soient particulièrement simples. Il faudrait une machine ayant une mémoire rapide beaucoup plus vaste, telle, par exemple, que la machine "ATLAS" ou les très grands ensembles I B M ; le problème pourrait alors, par exemple, être résolu en un temps de l'ordre d'une heure.

Il se présente, bien entendu, des problèmes à trois, quatre variables et plus qui sont trop vastes pour pouvoir être traités sur les machines actuellement existantes ; les développements dans le sens des applications de la physique mathématique restent souvent dans ce cas, comme nous y avons fait allusion il y a quelques instants. Il est nécessaire, pour ces problèmes, d'attendre l'avènement de machines utilisant des techniques toutes différentes, telles que la supraconductivité, ou, dans un avenir plus éloigné, les structures intégrées périodiques aussi désignées sous le nom d'"électronique moléculaire".

Dans cette dernière technique, les organes des machines seront construits directement à partir d'une base semi-conductrice, plaquette de silicium par exemple, sur laquelle seront obtenues des structures diverses périodiques, à raison d'un grand nombre d'éléments microscopiques réalisés simultanément. La réalisation pourra se faire par enlèvement de matière, micro-usinage ou microphotogravure, par exemple, et par apport de matière, au moyen d'une projection sous vide, ou d'une croissance de cristaux déjà existants (épitaxie).

On peut ranger parmi les machines à traiter l'information des réalisations un peu différentes de celles dont nous venons de parler, et qui étaient des machines à usage universel, ou presque. Il s'agit de machines conçues en vue de problèmes particuliers. Citons les "lecteurs automatiques", dont nous avons indiqué l'utilité.

Un des problèmes qui s'y pose est celui de la séparation des "composantes connexes "du texte, au sens de la topologie. Plaçons-nous dans le cas où le texte est transformé en information discontinue, l'aire de lecture étant divisée en points, blancs ou noirs ; la notion de composante connexe fait ici intervenir une définition que les mathématiciens avaient déjà rencontrée : celle d'ensemble connexe à ε près, dans un espace métrique aussi appelé "bien enchaîné à ε près" entre deux quelconques de ses points.

D'autres machines à l'étude sont celles qui permettront à un engin spatial d'envoyer à chaque instant ses coordonnées rapportées au système solaire ou, si l'engin est à une distance du soleil comparable à celles des autres étoiles, ses coordonnées rapportées à un système d'étoiles convenable. Ces machines feront appel à des dispositifs photoélectriques, de grande sensibilité, suivis de petites calculatrices.

VII - Avant de terminer, donnons un aperçu général sur le développement en France de l'analyse numérique, du calcul automatique et de la conception des machines à calculer, au point de vue de l'enseignement et de la recherche.

Il a été créé des enseignements d'analyse numérique dans plusieurs Facultés des Sciences ; il conviendra d'en créer dans chacune d'elles. La structure de ces enseignements est la suivante :

Un certificat de deuxième cycle, pouvant être une option de la licence de mathématiques appliquées, et comprenant de l'algèbre numérique, du calcul matriciel des notions sur le calcul des quadratures et sur l'intégration des équations différentielles ordinaires, enfin des éléments de programmation.

Un certificat de troisième cycle, s'adressant à des licenciés ou à des agrégés, et comprenant des notions sur la théorie générale de l'approximation, sur les transformations de Fourier et de Laplace, ainsi que les notions élémentaires sur les équations aux dérivées partielles.

Enfin un doctorat de troisième cycle, auquel sont rattachés des cours sur la logique mathématique, la statistique, la recherche opérationnelle, les fonctions spéciales, les équations fonctionnelles de diverses sortes.

En ce qui concerne l'enseignement de la programmation aux différents niveaux, on étudie en ce moment la création d'un certificat de technologie de programmation, dans le cadre de la "licence technique" ainsi que la création d'un "Institut de programmation",(*) formant à la fois des techniciens et des ingénieurs dans cette branche.

Pour l'enseignement de la technologie des machines, un cours rattaché à l'électronique supérieure a été créé, mais une étude destinée à étoffer cet enseignement sera entreprise très prochainement afin d'avoir effet à partir de la rentrée prochaine.

De nombreuses thèses de troisième cycle, portant sur l'analyse numérique et la programmation, ont été soutenues ou sont en préparation. Plusieurs thèses d'Etat importantes ont également été soutenues, sur le calcul matriciel, l'algèbre booléenne, en particulier.

Souhaitons que l'aide de la "Délégation générale à la Recherche" soutienne dans ces domaines des groupes de recherche, sur des sujets importants peu étudiés en France jusqu'ici. En effet, dans une spécialité où la concurrence de l'industrie privée est plus grande que partout ailleurs, l'insuffisance notoire de la rémunération des chercheurs aux taux du C. N. R. S. risque de tarir entièrement la recherche.

(*) L'Institut de programmation de la Faculté des Sciences de Paris a été créé en 1963.

Parmi les sujets dont l'étude a été entreprise ou doit l'être prochainement, du moins nous l'espérons si nous obtenons les moyens de retenir des chercheurs, citons :

la "cristallographie", où des calculs importants doivent être poursuivis pour déterminer les structures cristallines à partir des observations,

l'"électrocardiographie" et l'"électroencéphalographie", où des moyens automatiques doivent être mis en œuvre pour rendre comparables au moyen de transformations appropriées les diagrammes obtenus,

l'étude des langages symboliques de programmation qui satisfont à des conditions particulières,

l'étude de critères simples permettant d'identifier les caractères d'imprimerie en vue de la lecture automatique,

la comparaison de différentes méthodes de calcul matriciel,

la résolution d'équations intégro-différentielles,

la construction d'un lecteur automatique extensif, c'est-à-dire susceptible de lire les textes imprimés usuels à raison d'une ligne en un dixième de seconde au plus,

la réalisation de mémoires photoscopiques fixes et de réseaux photoconducteurs à très haute définition,

la réalisation de très petits amplificateurs en structure intégrée dans du silicium, en vue d'obtenir des unités de calcul fonctionnant plus largement en parallèle que les unités actuelles,

la réalisation de mémoires à semi-conducteurs en structures intégrées périodiques,

etc.

Certains de ces points ont fait l'objet d'études à l'étranger, d'autres n'ont jamais été abordés à notre connaissance.

VIII - Le Colloque réunit d'éminents spécialistes dans chacune de ses sections, je ne les présenterai pas maintenant, ce sera la tâche des présidents de chacune des séances.

Je dois transmettre les regrets de deux personnalités que nous avions pressenties, et que leurs obligations retiennent loin de nous. Ce sont M. Richard Courant, que j'ai bien connu autrefois quand il était professeur à Göttingun, spécialiste de représentation conforme, et alors mathématicien pur.

Depuis il s'est fixé aux Etats Unis et a été l'un des premiers utilisateurs des grandes machines pour des problèmes d'équations aux dérivées partielles, relatifs, en particulier, aux crues des cours d'eau.

La deuxième de ces personnalités est M. Dorodnitzin, membre de l'Académie des Sciences de Moscou, spécialiste de mécanique des fluides, et qui a été, lui aussi, l'un des premiers utilisateurs des grandes calculatrices électroniques.

Je regrette que le peu de temps dont nous disposons nous oblige à nous séparer en sections fonctionnant simultanément, ce qui est assez regrettable étant donné l'intérêt que la plupart d'entre nous portent à plusieurs de ces sections, sinon à toutes.