ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

PAUL LORENZEN

Pascals Kritik an der axiomatischen Methode

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 7, série *Mathématiques*, n° 1 (1962), p. 89-100
<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1962__7_1_89_0>

PASCALS KRITIK AN DER AXIOMATISCHEN METHODE

Paul LORENZEN
Kiel

Die drei Jahrhunderte, die seit dem Tode Pascals verstrichen sind, stellen sich uns gewöhnlich dar als beherrscht von der neuen Methode des naturwissenschaftlichen Denkens, d.h. von dem neuartigen Ineinandergreifen des Experiments und der mathematischen Deduktion.

Pascal gebührt in der Geschichte der neuzeitlichen Wissenschaff ein Ehrenplatz, allein schon wegen seiner einheitlichen Begründung der Aero-und Hydrodynamik. Aber auch für das logisch-mathematische Denken allein, jetzt einmal isoliert vom Experiment betrachtet, kommt Pascal - abgesehen von den Rechenmaschinen - das Verdienst zu, die methodologischen Einsichten der antiken Philosophie gegenüber dem traditionalistischen und mystischen Denken des Mittelalters und *auch noch* der Renaissance-Zeit für die Neuzeit gesichert zu haben.

Natürlich ist Pascal hierbei abhängig von Descartes, aber viele Formulierungen Pascals sind viel klarer als die cartesischen. Insbesondere hat Pascal die Rolle der Definitionen in den axiomatischen Theorien deutlich gemacht. Hier ist jede Definition - ich möchte sie genauer "analytische Definitionen" nennen-nur eine Ersetzung eines zusammengesetzten Ausdrucks durch einen anderen und muss daher grundsätzlich eliminierbar sein. Descartes und die, die ihm wie Pascal folgten, waren Kämpfer für die neue Wissenschaft, die Mechanik Galileis. Das bedeutete zugleich, dass sie Kämpfer gegen die alte Wissenschaft, die Logik und Physik des Aristoteles waren.

Wir können heute Aristoteles mehr Gerechtigkeit widerfahren lassen. Die axiomatische Methode, die im 17. Jahrhundert auf die Mechanik ausgedehnt wurde, war nämlich zum ersten Male gerade von Aristoteles klar formuliert worden :

1/ Unser Wissen baut auf gewissen undefinierten Grundbegriffen auf, alle weiteren Begriffe sind mit ihrer Hilfe zu definieren.

2/ Für die Grundbegriffe gelten gewisse unbewiesene Grundsätze, die Axiome, alle weiteren Sätze sind mit ihrer Hilfe zu beweisen.

Bei Descartes finden wir bezüglich der Methode im allgemeinen nichts anderes als bei Aristoteles. Die axiomatische Methode ist bei Descartes das einzige Mittel, um zur Gewissheit, zu unbezweifelbaren Wahrheiten zu gelangen.

Die bewundernswerte Grösse Pascals liegt nun meines Erachtens darin, dass er dieses Selbstvertrauen der neuzeitlichen Wissenschaft, im Besitz einer sicheren Methode zu sein, schon ganz am Anfang der Neuzeit als eine Illusion und Anmassung erkennt. Hierin ist Pascal verblüffend modern. Natürlich ist aber Pascal kein moderner Empirist, für den alle Axiome nur hypothetisch, als vorlaufig bewährt, gelten. Pascals Kritik kommt von anderen Quellen her. Pascal ist - wie man weiss - sehr von Montaigne beeindruckt gewesen, und d.h. also von der antiken Skepsis. Aber Pascal ist auch kein Skeptiker, seine Kritik an der cartesischen Selbstgewissheit gründet sich vielmehr auf eine neue Einsicht in die Endlichkeit des Menschen. Und gerade darin liegt das Moderne Pascals. Die Endlichkeit des Menschen ist ja das Hauptthema der modernen Existenzphilosophie.

Bei Pascal wird die Endlichkeit dadurch ausgedrückt, dass der Mensch ein Wesen zwischen zwei Unendlichkeiten ist. Im Fragment 72 der "Pensées" schreibt Pascal :

"Car enfin qu'est-ce que l'homme dans la nature ? Un néant à l'égard de l'infini, un tout à l'égard du néant, un milieu entre rien et tout. Infiniment éloigné de comprendre les extrêmes, la fin des choses et leur principe sont pour lui invinciblement cachés dans un secret impénétrable, également incapable de voir le néant d'où il est tiré, et l'infini où il est englouti.

Que fera-t-il donc, sinon d'apercevoir (quelque) apparence du milieu des choses, dans un désespoir éternel de connaître ni leur principe ni leur fin ? Toutes choses sont sorties du néant et portées jusqu'à l'infini".

"Quand on est instruit, on comprend que la nature ayant gravé son image et celle de son auteur dans toutes choses, elles tiennent presque toutes de *sa double infinité*. C'est ainsi que nous voyons que toutes les sciences sont infinies en l'étendue de leurs recherches, car qui doute que la géométrie, par exemple, a une infinité d'infinités de propositions à exposer ? Elles sont *aussi infinies* dans la multitude et la délicatesse de leurs principes ; car qui ne voit que ceux qu'on propose pour les derniers ne se soutiennent pas d'eux-mêmes, et qu'ils sont appuyés sur d'autres qui, en ayant d'autres pour appui, ne souffrent jamais de dernier ?"

Diese tiefe Einsicht Pascals in die *zweifache* Unendlichkeit des axiomatischen Denkens hat sich allerdings in der Neuzeit praktisch nicht ausgewirt. Die "Pensées" Pascals galten als ein theologisches Buch, das für die Wissenschaft irrelevant sei. Voltaire z.B. hielt Pascal in dessen letzten Lebensjahren, in denen die "Pensées" entstanden, für geistesgestört.

Erst von einer ganz anderen Seite her ist uns die Endlichkeit des Menschen wieder bewusst gemacht worden, so dass wir jetzt Pascal besser verstehen können. Die moderne Einsicht in die Endlichkeit des Menschen entstammt aus der Reflexion auf die Methode unseres geschichtlichen Verstehens, also aus den in Deutschland sogen. Geisteswissenschaften.

Die Reflexion auf die Hermeneutik, d.h. auf die Lehre vom Verstehen menschlicher Handlungen, insbesondere gesprochener und geschriebener Sätze, hat von Schleiermacher bis Dilthey bei diesem zu dem folgenden bemerkenswerten Sats geführt :

"Hinter das Leben kann die Erkenntnis nicht zurückgehen".

Im Anschluss an Dilthey und Husserl,haben Misch einerseits und Heidegger andererseits deutlich gemacht, was das heisst, dass das Denken vom Leben, von der praktischen Lebenssituation des Menschen, auszugehen hat. Alles Denken ist eine Hochstilisierung dessen, was man im praktischen Leben immer schon tut. Pascal formulierte diese Situation des Menschen folgendermassen (fr. 72) :

"Nous voguons sur un milieu vaste, toujours incertains et flottants, poussés d'un bout vers l'autre. Quelque terme où nous pensions nous attacher et nous affermir, il branle et nous quitte" ;

"Cela étant bien compris, je crois qu'on se tiendra en repos, chacun dans l'état où la nature l'a placé".

Der Philosoph, der diese von Pascal vorweggenommene moderne Einsicht in die Unhintergehbarkeit des Lebens besitzt, missversteht sich nicht mehr - wie es in der ganzen Neuzeit seit Descartes und Locke üblich war, - als ein Bewusstsein, das erst durch Empfindungen, Anschauungen und Verstandesschlüsse Kenntnis von der Welt nehmen muss. Die Welt ist ihm vielmehr das unmittelbar Zuhandene. Ich möchte das so ausdrücken : Die Philosophie hat eine neue Unmittelbarkeit gewonnen.

Das klingt sehr hoffnungsvoll, aber es wäre wohl verfrüht, diesen Neuansatz, der von den Geisteswissenschaften ausgeht, schon grosse Chancen zuzusprechen. Das an den Naturwissenschaften orientierte Denken übt gegenwärtig - gerade auch in den Wissenschaften, die sich mit den Menschen beschäftigen - einen starken, vielleicht sogar noch wachsenden Einfluss aus.

Und von dort wird man skeptisch fragen, wie denn nun die Philosophie von ihrer angeblichen Neuen Unmittelbarkeit aus vorgehen wolle, nach welcher Methode sie endlich einmal zu sicheren Resultaten gelangen wolle.

Es muss zugegeben werden, dass auch keine Hermeneutik als eine mitteilbare Lehre möglich ist, die nicht schon von logischem, allgemeiner von methodisch-geordnetem Denken Gebrauch macht. Bei Geisteswissenschaftlern ist es üblich, sich an dieser Stelle der Erörterung auf den hermeneutischen Zirkel, d.h. auf die notwendige Zirkelhaftigkeit unseres Verstehens zurückzuziehen. Die Suche nach einem methodischen Anfang unseres Denkens wird als eine rationalistische Illusion dargestellt, in der nur die - so betrachtet - naiven Positivisten mit ihrem Fortschrittglauben wohl noch befangen sein.

Merkwürdigerweise ist dies letztere gar nicht der Fall. Der logische Positivismus hat sich seit den 30erJahren, vor allem durch Tarski - aber auch Carnap und Quine haben diese Wendung mitgemacht - eine Auffassung unseres Denkens und Sprechens zu eigen gemacht, die ebenfalls auf eine unausweichliche Zirkelhaftigkeit hinausläuft.

Für fie logistische Philosophie stellt sich das Problem in der Form, dass nach einer Begründung der Wissenschaftssprache gefragt wurde. Speziell die Regeln der Logik werden dabei als syntaktische

Regeln dieser Sprache aufgefasst. Die Antwort wird an deutlichsten in einem Bilde gegeben, nach dem die Sprache mit ihren syntaktischen Regeln ein Schiff sei, auf dem wir uns befinden - unter der Bedingung, dass wir nie einen Hafen anlaufen können. Alle Reparaturen oder Umbauten des Schiffes sind auf hoher See auszuführen.

Natürlich trifft dieses Bild manches richtig, aber es wird von der logistischen Philosophie explizit dazu gebraucht, die Suche nach einem methodischen Anfang des Denkens zu unterbinden. Zu einer Wissenschaftssprache, die - um auch wirklich wissenschaftlich zu sein - als ein Kalkul darstellbar sein müsse, gehöre zwar eine Semantik, d.h. eine Interpretation der Kalkülsymbole, aber für diese Semantik müsse immer schon eine Sprache, genannt die Metasprache, zur Verfügung stehen. Praktisch fungiert als Metasprache dann eine der natürlichen Sprachen - aus diesem Boot könne eben niemand aussteigen.

Hier zeigt sich eine Koinzidenz zwischen Hermeneutik und Logistik. Beide Schulen verzichten darauf, unser Denken methodisch aufzubauen. Aus dieser Koinzidenz zu schliessen, dass der Verzicht daher wohl auch notwendig sei, hiesse aus einem blossen Faktum zu schliessen. Es erscheint mir hier vielmehr erforderlich, angesichts dieser Koinzidenz doppelt vorsichtig zu sein.

Der vorhin zitierte Diltheysche Satz, dass die Erkenntnis nicht hinter das Leben zurückgehen könne, darf jedenfalls - das möchte ich als erstes bemerken - nicht als Beweis für die Notwendigkeit des Verzichts auf einen methodischen Anfang unseres Denkens (oder Erkennens) in Anspruch genommen werden. Es wird ja nur gesagt, dass dieser Anfang nicht hinter dem Leben gesucht werden dürfe.

Man wird jedoch einwenden, dass das Leben, also die praktische Lebenssituation, in der wir uns immer schon befinden, ehe wir beginnen, Wissenschaft zu treiben oder zu philosophieren, auch einschliesst, dass wir schon eine natürliche Sprache mit all ihrer Syntax benutzen. Das ist zuzugeben, aber es bedeutet nicht, dass wir gezwungen wären, diese natürliche Sprache mit ihren Regeln an den Anfang eines *geplanten* methodischen Aufbaus zu setzen.

Betrachten wir die natürliche Sprache als ein auf See befindliches Schiff, so können wir unsere Situation vielmehr folgendermassen darstellen :

Wenn es kein erreichbares Festland gibt, muss das Schiff schon auf hoher See gebaut sein ; nicht von uns, aber von unseren Vorfahren. Diese konnten also schwimmen und haben sich - irgendwie aus etwa herumtreibendem Holz - wohl zunächst ein Floss gezimmert, dieses dann immer weiter verbessert, bis es heute ein so komfortables Schiff geworden ist, dass wir gar nicht mehr den Mut haben, ins Wasser zu springen und noch einmal von vorn anzufangen.

Für das Problem der Methode unseres Denkens müssen wir uns aber in einen Zustand ohne Schiff, d.h. ohne Sprache versetzen, und müssen versuchen, die Handlungen nachzuvollziehen, mit denen wir - mitten im Meer des Lebens schwimmend - uns ein Floss oder gar ein Schiff erbauen können.

Da dieser Versuch weder in die hermeneutische noch in die logistische Philosophie hineinpasst, kann ich mich im Folgenden auf keine Autorität mehr stützen, leider auch nicht auf Pascal. Es bleibt mir gar nichts anderes mehr übrig, als den Aufbau selbst hier und jetzt vorzuführen. Da dieses ein mathematisches Kolloquium ist, möchte ich hier den Weg zur Logik und Arithmetik skizzieren. Da ich keinerlei Kenntnis der logischen Partikeln oder der Zahlen voraussetzen will, muss ich dazu etwas weiter als üblich ausholen. Wir müssen zu den allerersten Möglichkeiten des. Denkens und Sprechens zurückgehen.

Eine letzte Vorbemerkung wird aber noch nötig sein. Es könnte nämlich jemand vermuten, ich wolle jetzt gleich aufhören, deutsch zu sprechen, weil ich für den methodischen Aufbau ja keine Metasprache voraussetzen wolle. So ist es nicht gemeint. Aber ich werde die deutsche Sprache im Folgenden nur dazu verwenden, zu beschreiben, was man zu tun hätte, wenn man eine Sprache methodisch konstruieren wollte. Diese Beschreibung liesse sich ersetzen durch einen praktischen Unterricht, wie ihn etwa Kinder bekommen, die noch nicht sprechen können. Umgekehrt kann hier das, was ich sage, einen praktischen Unterricht ersetzen.

Wenn ich dazu gelegentlich an Allbekanntes über natürliche Sprachen erinnere, dient das nur dazu, Sie, die ja solche Sprachen schon kennen, schneller ins Bild zu setzen.

Ausgehen möchte ich von der Feststellung, dass alle natürlichen Sprachen, etwa Chinesisch, Hopi, Ewe oder wovon immer die Linguisten uns berichten, die Möglichkeit bieten, Sätze syntaktisch zusammensusetzen. Ich nehme diese Feststellung nur zum Anlass, als erstes nach Sätzen zu fragen, die nicht syntaktisch zusammengesetzt sind. Diese Fragestellung ist - streng genommen - nur sinnvoll, wenn sie auf eine bestimmte Sprache bezogen ist, aber in jeder Sprache gibt es ein Aquivalent für die im Deutschen syntaktisch einfachsten Sätze der Form "dies ist so" bzw. "dies ist nicht so". Sätze dieser Form mögen Grundaussagen heissen. Schon solche Grundaussagen sind aus Subjekt und Prädikat zusammengesetzt. Methodisch gehen ihnen daher noch voran Einwortsätze, in denen das Subjekt durch die Situation, eine hinweisende Geste, oder ähnliches ersetzt ist, so dass also nur das Prädikat auszusprechen ist. Eine Neueinführung von Pradikaten ist jederzeit möglich durch hinreichend viele Beispiele und Gegenbeispiele. Ich möchte das die exemplatische Einfuhrung von Prädikaten nennen. Welche Dinge "Stuhl" genannt werden, welche nicht, wann etwas "sauber" genannt wird, wann nicht, das haben wir alle durch exemplarische Einführung gelernt. Ich rekurriere nicht auf eine kinderpsychologische Tatsache (-weder auf eine wissenschaftliche Feststellung der Ontogenese noch gar der Phylogenese des Sprechens kommt es hier an -) nur dass wir selbst die Möglichkeit haben, Prädikate exemplarisch einzuführen, möchte ich in Erinnerung bringen.

Dass der Gebrauch von Prädikaten auf Grund blosser exemplarischer Einführung noch sehr unbestimmt ist, ist selbstverständlich. Trotzdem ist dies ein möglicher Anfang des Sprechens.

Wird ein Prädikat gebraucht, so ist immer schon ein Einzelnes intendiert, dem dieses Prädikat zu - oder abgesprochen wird. Dieses Einzelne braccht deshalb noch keinen Eigennamen zu haben. Ein Kind lernt z.B. normalerweise erst das Prädikat "Puppe", ehe es seinen Puppen Eigennamen gibt.

Haben wir Eigennamen *und* Prädikate zur Verfügung, so können wir Grundaussagen zusammensetzen. Subjekte sind die Eigennamen für Einzelnes und das Prädikat wird dem Einzelnen durch die Kopula - im Deutschen sind das die Wörter "ist" bzw. "ist nicht" - zu-bzw. abgesprochen.

Nur Aussagen über Einzelnes, die zudem nur ein Prädikat haben, sollen Grundaussagen heissen. Es werde allerdings zugelassen, dass mehrere Subjekte vorkommen wie z.B. in dem Satz "Max und Moritz sind verwandt".

Die Formen der Grundaussagen sind also folgende :

affirmativ	$s_1, \ldots, s_n \ \varepsilon \ P$
negativ	$s_1, \ldots, s_n \ \varepsilon' \ P$

Jede natürliche Sprache enthält Möglichkeiten, auf diese Weise Einzelnes zu prädizieren. Ob das - wie im Deutschen - mit einer Kopula geschieht oder ohne, spielt für das methodische Denken keine Rolle. Mit jedem Prädikat der Sprache wird eine Unterscheidung getroffen : Das Einzelne, dem das Prädikat zugesprochen wird, wird unterschieden von dem Einzelnen, dem das Prädikat abgesprochen wird.

Die exemplatisch eingeführten Prädikate liefern ein System von Unterscheidungen, das jetzt als eine Basis für das Weitere dienen kann. Für diese Basen möchte ich den Terminus "Distiktionsbasen" verwenden.

Es entsteht so die Aufgabe, zu untersuchen, wie man von einer Distinktionsbasis aus, also mit Grundaussagen als einzigem sprachlichen Mittel, das Denken ausbauen kann. Die natürliche Sprache hält dafür eine reiche Syntax, z.B. die logischen Partikeln, Präfixe, Infixe und Suffixe zur Wortbildung u.ä. bereit.

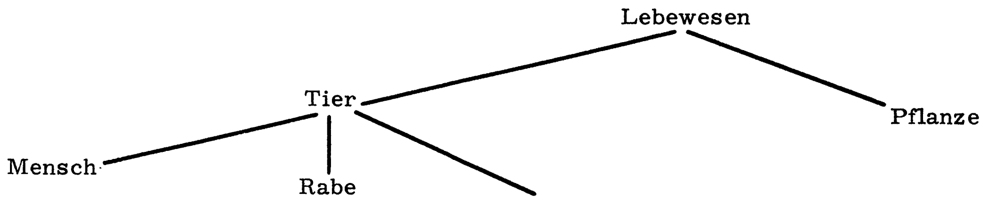
Wollen wir methodisch vorgehen, so müssen wir uns auch solche Hilfsmittel erst selbst erwerben. Wir müssen eine rationale Syntax konstruieren. Die Berufung auf eine natürliche Syntax soll dabei ausgeschlossen sein. Dadurch unterscheidet sich unser Vorhaben von der Semantik der Logistik, da diese letztlich auf die Syntax der natürlichen Sprachen zurückgreift.

Als ein erster Schritt, der über die Grundaussagen hinausführt, ist eine Einengung der Unbestimmtheit möglich, die den Prädikaten der Distinktionsbasis auf Grund ihrer bloss exemplarischen Einführung anhaftet.

Für diesen Schritt, der uns zu Begriffen führen wird, muss ich - der hier vorgeschlagenen Methode getreu - zunächst Beispiele geben. Nehmen wir also an, gewise Prädikate, die im Deutschen etwa durch

Lebewesen, Mensch, Tier, Pflanze, Rabe

wiederzugeben wären, seien bisher nur exemplarisch eingeführt. Der Gebrauch dieser Prädikate kann nun durch Regeln näher bestimmt werden. Sie werden ohne weiteres verstehen, welche Regeln gemeint sind, wenn ich die folgende Figur anzeichne.

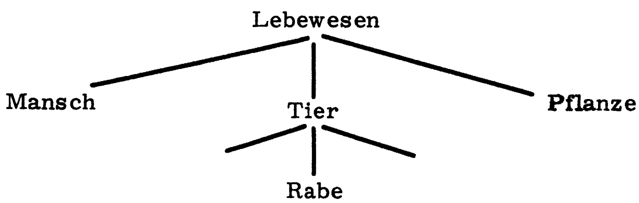


Explizit lassen sich die Regeln für die Prädikate : Lebewesen, Tier und Pflanze so anschreiben :

	$x \ \varepsilon\ \text{Tier} \Longrightarrow x \ \varepsilon\ \text{Lebewesen}$
	$x \ \varepsilon\ \text{Pflanze} \Longrightarrow x \ \varepsilon\ \text{Lebewesen}$
	$x \ \varepsilon\ \text{Tier} \Longrightarrow x \ \varepsilon'\ \text{Pflanze}$
	$x \ \varepsilon\ \text{Pflanze} \Longrightarrow x \ \varepsilon'\ \text{Tier}$
$x \ \varepsilon\ \text{Lebewesen}$,,	$x \ \varepsilon'\ \text{Tier} \Longrightarrow x \ \varepsilon\ \text{Pflanze}$
$x \ \varepsilon\ \text{Legewesen}$,,	$x \ \varepsilon'\ \text{Pflanze} \Longrightarrow x \ \varepsilon\ \text{Tier}$

Solche Regeln sind keine allgemeinen Sätze, deren Verständnis hier noch unerklärlich bleiben müsste. Es sind vielmehr praktische Anweisungen, die vorschreiben, von gewissen Sätzen zu anderen überzugehen. Das Zeichen $\Longrightarrow$ (Pfeil) wird *exemplarisch* eingeführt zur Mitteilung solcher Ubergänge. Das Handeln nach diesen Regeln kann *praktisch* eingeübt werden. Die Regeln sind keine Befehle oder Erlaubnisse, genau so wenig, wie es die Regeln eines Spieles sind. Diese Regeln sind vielmehr Bestandteile der zu erlernenden Sprache, des Sprachspiels, wie Wittgenstein sagt.

Man kann den Gebrauch der obigen Prädikate auch anders regeln, z.B. so, wie es die folgende Figur andeutet :



Hier nach dem "wahren" Regelsystem zu suchen, *ehe* man solche Regeln anwendet, ist vergeblich : man muss mit irgendwelchen Regeln anfangen, erst die spätere Reflexion kann zu Verbesserungsvorschlägen führen. Platon vergleicht die Situation treffend mit der Kochkunst : man muss lernen, das Wild in den Gelenken zu zerteilen.

Ehe man sich um solche Regelsysteme streitet, muss man erst einmal zur Kenntnis nehmen, dass es sich überhaupt um Regeln handelt.

Um solche Regeln wie etwa im einfachsten Falle :

$$x \ \varepsilon\ \text{Mensch} \Longrightarrow x \ \varepsilon'\ \text{Tier}$$

zu verstehen, genügt es, die gemeinte Handlung, nämlich die Bildung z.B. der Aussagen "Hans ε' Tier" *nach* der Aussage "Hans ε Mensch" an Beispielen wie diesem eingeübt zu haben. Die Regeln sind bedingte Handlungsanweisungen, genauso wie etwa die folgende : "Wenn Sie Herrn X. sehen, dann grüssen Sie ihn bitte von mir". Das hier auftretende "wenn - dann", das dem obigen Symbol $\Longrightarrow$ entspricht, ist keine logische Partikel, Ich greife hier nicht auf die in der natürlichen Sprache enthaltene Logik zurück, sondern nur auf unsere praktische Fähigkeit zum Handeln unter Bedingungen. Ich nenne dieses "wenn - dann" also dieses $\Longrightarrow$, daher kurz das praktische Wenn - Dann. Es gehört zu einer *praktischen* Sprache, die vor aller Theorie zu lernen ist.

Durch Regeln wird der Gebrauch von exemplarisch eingeführten Prädikaten näher bestimmt. Die Regeln betreffen immer mehrere Prädikate, die sich auf diese Weise gegenseitig näher bestimmen: sie bilden dann ein System von Prädikaten. Es bleibt aber jederzeit die Möglichkeit, auf Grund neuer Exempel das gebrauchte Regelsystem abzuändern.

Auf welche Weise nun aber auch immer Prädikate durch die Wahl von Regeln zu einem System verbunden werden, immer bekommt jedes Prädikat dadurch ausser seiner exemplarischen Einführung zusätzlich einen Stellenwert im System. Was dies bedeutet, muss ich methodisch sagen. In einem System ist es auf Grund der Regeln möglich, sogen. Ableitungen durchzuführen. Z.B. ist im oben angedeuteten System aus der Aussage "dies ist ein Rabe" die Aussage "dies ist ein Lebewesen" ableitbar :

1/ $s \varepsilon$ Rabe

2/ $s \varepsilon$ Tier

3/ $s \varepsilon$ Lebewesen

Ist in einem System aus $s \varepsilon P$ die Aussage $s \varepsilon Q$ ableitbar, so heisse kurz Q aus P ableitbar. Dies hängt nur von den Regeln des Systems ab, nicht von der exemplarischen Einführung der Prädikate. Von dem exemplarischen Gebrauch wird jetzt abstrahiert. In komplizierteren Systemen kann es vorkommen, dass Q sich als ableitbar aus P ergibt und auch umgekehrt P als ableitbar aus Q. P und Q heissen dann im System gleichwertig. Wir sagen dann auch, dass die Prädikate P und Q "denselben Begriff darstellen". Dadurch wird die Rede von Begriffen methodisch eingeführt. Man nennt das eine Abstraktion. Häufig werden die Begriffe als Bedeutungen der Prädikate eingeführt, wobei man die Bedeutung in Analogie zur Bedeutung von Eigennamen auffasst. Ein Eigenname bezeichnet oder bedeutet einen Gegenstand, hierin liegt nichts Problematisches, weil das gerade die Funktion der Eigennamen ist. Ob aber auch die Prädikate eine Bedeutung haben, wird in der Gegenwart noch viel diskutiert ; man hat sogar den alten Universalienstreit zwischen Realismus und Nominalismus dazu wieder ausgegraben. In der hier vorgetragenen methodischen Ordnung ist die Rede von Begriffen kein Problem. Wir haben bisher gesagt, was es heissen soll, dass zwei Prädikate denselben Begriff darstellen. Wir haben uns nun zu überlegen, wie wir von den Begriffen selber sinnvoll reden können. Dazu müssen wir festlegen, wie wir zu Prädikaten über Begriffen gelangen.

Das geschieht dadurch, dass wir zunächst Prädikate über Prädikate, also Prädikatenprädikate, einführen. Die Einteilung der Prädikate in kurze und lange z.B. erfolgt exemplarisch. Wir setzen das Prädikat, über das gesprochen werden soll, wie üblich, in Anführungsstriche und erhalten so etwa:

'lang' ε kurz

'Prädikatenprädikat' ε lang

'kurz' ε' lang

Wir betrachten nun Prädikatenpradikäte, die dann, wenn sie für ein Pradikat P gelten, auch fur jedes gleichwertige Prädikat Q gelten. Solche Prädikatenprädikate mögen "invariant" heissen. Ein Beispiel eines invarianten Prädikatenprädikats ist das zweistellige "ist ableitbar aus".

Von Begriffen zu sprechen, heisst nun, von allem zu abstrahieren, wodurch sich gleichwertige Prädikate unterscheiden, und das heisst also, sich auf invariante Prädikatenprädikate *zu beschränken*. Ist R ein invariantes Prädikatenprädikat, so schreiben wir statt $'P' \varepsilon R$ jetzt $|P| \varepsilon R$ und lesen dieses :

Der Begriff P ist R.

Das Wort "Begriff" deutet hier an, dass von P ein invariantes Prädikatenprädikat ausgesagt wird.

In dieser Beschränkung auf invariante Aussagen liegt das Wesen der Abstraktion.

Durch die Abstraktion wird das System von Prädikaten zu einem Begriffssystem. Die konstituierenden Regeln des Begriffssystems mögen daher "Begriffsbestimmungen" heissen.

Der Unterschied dieser Begriffslehre zur platonisch-aristotelischen Auffassung besteht hauptsächlich in zweierlei. Erstens handelt es sich bei den Begriffen nicht um eine Lehre vom Seienden, um eine Ontologie, sondern die Begriffe werden als etwas zu unserem Handeln Zugehöriges eingeführt : Sie werden nicht ontologisch, sondern operativ interpretiert. Zweitens ist die hier vorgetragene Begriffslehre nicht wie bei Aristoteles mit der Logik verschmolzen : Die Logik als Lehre von den logischen Partikeln ist vielmehr ein neuer Schritt, der jetzt erst noch zu vollziehen ist.

Wie können logische Partikeln methodisch in die bisher aufgebaute Sprache eingeführt werden ? Ausgangspunkt ist wieder ein Rückgriff auf die praktische Situation, in der wir sprechen. Wir denken uns zwei Personen, die beide dasselbe Begriffssystem, etwa das obige, verwenden und die einen Dialog miteinander führen. Was bedeutet es, wenn der eine z.B. behauptet : "Alle Raben sind Lebewesen" ? Eine solche Behauptung ist jedenfalls ganz etwas Anderes als eine zum Begriffssystem gehörige Regel.

In der natürlichen Sprache lässt sich der Unterschied allerdings nur schwer ausdrücken, solange man sich eben nicht bewusst geworden ist, was die logischen Partikeln der natürlichen Sprache sind. In der aristotelischen Logik wird unsere Behauptung : "alle Raben sind Lebewesen" als eine logische Beziehung zwischen den Begriffen Rabe und Lebewesen aufgefasst. So merkwürdig es klingt, ist es erst in der modernen Logik - und hier vor allem Dank der Untersuchungen von Frege in seiner "Begriffsschrift" von 1879 - deutlich geworden, dass eine solche Behauptung mit Hilfe von logischen Partikeln aus Grundaussagen zusammenzusetzen ist, und zwar auf eine Weise, die man im Deutschen etwa so formulieren kann :

Für alle x : Wenn x ε Rabe, dann x ε Lebewesen

$$\bigwedge_x . \; x \; \varepsilon \text{ Rabe} \longrightarrow x \; \varepsilon \text{ Lebewesen.}$$

Die Zusammensetzung geschieht hier mit zwei logischen Partikeln, dem Junktor "wenn - dann" und dem Quantifikator (oder Quantor) "für alle". Der Sinn dieser Partikeln muss aber noch festgelegt werden und dazu müssen wir eben die Verwendung solcher zusammengesetzten Behauptungen in Dialogen festlegen. Eine Aussage zu behaupten, heisst sich anheischig zu machen, sie gegen den Dialogpartner, den Opponenten, zu verteidigen. Damit solches Behaupten und Verteidigen überhaupt möglich ist, müssen wir festlegen, wie die logischen Partikeln dafür zu verwenden sind.

Der Gebrauch des Wortes "alle" im Deutschen legt nahe, für den Allquantor $\bigwedge$ die folgende Verwendung festzulegen : Der Opponent darf ein x wählen, etwa "Hans", und dann ist vom ersten Dialogpartner, dem Proponenten der Aussage, die neue Aussage.

$$\text{Hans } \varepsilon \text{ Rabe} \longrightarrow \text{Hans } \varepsilon \text{ Lebewesen}$$

zu verteidigen. Hierfür muss jetzt die Verwendung des logischen Junktors $\longrightarrow$ festgelegt werden. Dies geschieht mit Hilfe des praktischen Wenn - Dann folgendermassen :

Wenn der Opponent die Wenn-Aussage "Hans ε Rabe" behauptet - und diese Behauptung verteidigen kann -, dann hat der Proponent die Dann-Aussage "Hans ε Lebewesen" zu behaupten.

Dadurch, dass wir es einmal mit dem logischen Wenn - Dann und das andere Mal mit dem praktischen Wenn - Dann zu tun haben, wird hier ein Zirkel oder ein unendlicher Regress von Metasprache zu Metasprache vermieden.

Bei der Behauptung von primitiven Aussagen, wie den hier vorkommenden "Hans ε Rabe", "Hans ε Lebewesen" dürfen wir annehmen, dass die Dialogpartner sich darüber einigen werden ob die Behauptung zu Recht gemacht ist oder nicht, ob sie wahr ist oder nicht, wie man sagt.

In unserem Falle wird sogar der Proponent den Dialog gewinnen, also Recht behalten, ganz unabhängig davon, wer dieser Hans ist, d.h. unabhängig davon, welche Behauptungen über Hans zu Recht bestehen. Denn, wenn der Opponent behauptet hat, "Hans ε Rabe" dann kann der Proponent seine Behauptung "Hans ε Lebewesen" durch eine blosse Berufung auf die Begriffsbestimmungen verteidigen. Nach diesen Begriffsbestimmungen ist ja die Aussage "Hans ε Lebewesen" aus der Aussage "Hans ε Rabe" ableitbar. Diese Ableitung ist, so wollen wir sagen, ein Beweis der Behauptung. Der Beweis benutzt nur die Begriffsbestimmungen, dagegen keinerlei Kenntnisse von einzelnen Gegenständen wie Hans.

Manche Aussagen können sogar so verteidigt werden, dass man noch nicht einmal auf Begriffsbestimmungen zurückgreifen muss. Ein triviales Beispiel ist "alle Raben sind Raben", allgemeiner jede Aussage der Form :

$$\bigwedge_x . \; x \; \varepsilon \; P \longrightarrow x \; \varepsilon \; P .$$

Der Dialog spielt sich so ab :

Opponent	Proponent
	$\bigwedge_x . x \varepsilon P \rightarrow x \varepsilon P.$
? s	$s \varepsilon P \rightarrow s \varepsilon P$
$s \varepsilon P$	$s \varepsilon P$

Eine Aussage, die auf Grund ihrer Form allein verteidigt werden kann, heisst eine logisch-wahre Aussage. Unter der Form einer Aussage wird dabei die Art und Weise ihrer Zusammensetzung mit den logischen Partikeln verstanden. Ich möchte noch ein weiteres Beispiel geben, in dem gleichzeitig weitere logische Junktoren vorkommen. Jede Aussage der Form $a \vee b \dot{\wedge} \neg a \dot{\rightarrow} b$ ist logisch-wahr. Diese logische Wahrheit ergibt sich nicht daraus, dass Aussagen dieser From jedem, der Deutsch versteht, so selbstverständlich klingen, sondern ergibt sich daraus, dass diese Aussagen im Dialog in der Tat stets zu gewinnen sind. Der Dialog verläuft so.:

Opponent		Proponent	
		$a \vee b \dot{\wedge} \neg a \dot{\rightarrow} b$	
$a \vee b \dot{\wedge} \neg a$		L ?	
$a \vee b$		?	
a	b	R ?	b
$\neg a$		a	

Aussagen der Form $a \vee \neg a$ lassen sich nicht auf Grund ihrer Form allein gewinnen :

O		P	
		$a \vee \neg a$	
?		a	$\neg a$
?	a		

Natürlich hängt dieses Ergebnis daran, dass die Verwendung von $\vee$ so festgelegt wurde, dass man im Dialog effektiv eine Entscheidung, hier zwischen a und $\neg$ a zu treffen hat. Wer das tertium non datur für eine logische Wahrheit hält, muss dem $\vee$ einen anderen Sinn geben, aber auch dieser muss in einer dialogischen Verwendung bestehen - - oder jeder Dialog wird sinnlos werden.

Die logische Wahrheit beliebiger Aussagen ist bekanntlich nicht rekursiv entscheidbar. Aber die Klasse der logischwahren Aussageformen ist aufzählbar. Das ergibt sich leicht aus der Definition. Eine Aussageform heisst logisch-wahr, wenn es im Dialogspiel eine Gewinnstrategie für sie gibt. Man kann die Gewinnstrategien in geeigneter Notation aufschreiben. Liest man die Strategien dann in umgekehrter Reihenfolge, von den Endpositionen des Dialogs angefangen, so erhält man einen Logikkalkül - und zwar im wesentlichen den von Gentzen aufgestellten intuitionistischen Sequenzenkalkül ohne die Schnittregel.

Der Stand eines Dialogs lässt sich jederzeit dadurch fixieren, dass man alle vom Opponenten behaupteten Formeln aufschreibt, etwa in ihrer zeitlichen Reihenfolge, und dazu die letzte zu behauptende Formel des Proponenten. Man erhält so die Sequenzen :

$$A_1, \ldots, A_n \parallel B$$

Für das obige Beispiel des Dialogs um $a \vee b \dot{\wedge} \neg a \dot{\rightarrow} b$ sehen die Sequenzen folgendermassen aus :

$$\parallel a \vee b \dot{\wedge} \neg a \stackrel{\bullet}{\longrightarrow} b$$

$$a \vee b \dot{\wedge} \neg a \parallel b$$

$$a \vee b \dot{\wedge} \neg a, a \vee b \parallel b$$

$$a \vee b \dot{\wedge} \neg a, a \vee b, a \parallel b \qquad\qquad a \vee b \dot{\wedge} \neg a, a \vee b, b \parallel b$$

$$a \vee b \dot{\wedge} \neg a, a \vee b, a, \neg a \parallel b$$

$$a \vee b \dot{\wedge} \neg a, a \vee b, a, \neg a \parallel a$$

In beiden Teildialogen haben wir Endpositionen der folgenden Form erreicht :

$$\mathrm{F}(c) \parallel c$$

Aus diesen "Grundsequenzen" ergeben sich die darüberstehenden Sequenzen schrittweise nach gewissen Regeln. Die Begründung dieser Regeln liegt in der dialogischen Verwendung der logischen Partikeln.

Für den Dialogstand :

$$\mathrm{F} \parallel \mathrm{A} \wedge \mathrm{B}$$

ist z.B. festgelegt, dass der Opponent nach beiden Gliedern der Konjunktion fragen darf. Der Proponent muss also :

$$\mathrm{F} \parallel \mathrm{A} \qquad \text{und} \qquad \mathrm{F} \parallel \mathrm{B}$$

gewinnen können, um $\mathrm{F} \parallel \mathrm{A} \wedge \mathrm{B}$ gewinnen zu können, d.h. wir erhalten die Regel :

$$\mathrm{F} \parallel \mathrm{A},, \quad \mathrm{F} \parallel \mathrm{B} \Longrightarrow \mathrm{F} \parallel \mathrm{A} \wedge \mathrm{B}$$

Für den Dialogstand $\mathrm{F}(\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}) \parallel \mathrm{C}$ kann der Proponent nach beiden Gliedern fragen. Zum Gewinn genügt es also für ihn, eine der beiden Positionen :

$$\mathrm{F}(\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}),\ \mathrm{A} \parallel \mathrm{C} \qquad \text{oder} \qquad \mathrm{F}(\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}),\ \mathrm{B} \parallel \mathrm{C}$$

zu gewinnen. Das ergibt die folgenden Regeln

$$\mathrm{F}(\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}),\ \mathrm{A} \parallel \mathrm{C} \Longrightarrow \mathrm{F}(\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}) \parallel \mathrm{C}$$

$$\mathrm{F}(\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}),\ \mathrm{B} \parallel \mathrm{C} \Longrightarrow \mathrm{F}(\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}) \parallel \mathrm{C}$$

Entsprechend erhält man drei Regeln für die Adjunktion $\vee$ und je zwei Regeln - immer eine Regel für den Proponenten und eine für den Opponenten - für die weiteren logischen Partikeln $\longrightarrow$ und $\neg$.

Für die Quantoren ergeben sich die folgenden Regeln :

$$\mathrm{F} \parallel \mathrm{A}(y) \Longrightarrow \mathrm{F} \parallel \bigwedge_x \mathrm{A}(x),$$

y nicht frei in der Konklusion

$$\mathrm{F}(\bigwedge_x \mathrm{A}(x)),\ \mathrm{A}(t) \parallel \mathrm{B} \Longrightarrow \mathrm{F}(\bigwedge_x \mathrm{A}(x)) \parallel \mathrm{B} \qquad (t \text{ Term})$$

$$\mathrm{F} \parallel \mathrm{A}(t) \Longrightarrow \mathrm{F} \parallel \bigvee_x \mathrm{A}(x)$$

$$\mathrm{F}(\bigvee_x \mathrm{A}(x)),\ \mathrm{A}(y) \parallel \mathrm{B} \Longrightarrow \mathrm{F}(\bigvee_x \mathrm{A}(x)) \parallel \mathrm{B},$$

y nicht frei in der Konklusion.

Man kann gewiss versuchen, andere Partikeln mit anderer dialogischer Verwendung zu benutzen, aber diese sechs Partikeln $\wedge$, $\vee$, $\longrightarrow$, $\neg$, $\bigwedge$, $\bigvee$ mit der hier angegebenen dialogischen Verwendung, die man eine synthetische Definition dieser Partikeln nennen könnte, sind jedenfalls wichtig und brauchbar. Mir scheint die Situation vergleichbar mit der Verwendung der Addition und Multiplikation als elementarer Rechenoperationen. Auch hier gibt es andere, z.B. das Quadrieren oder die Fakultät - - aber Addition und Multiplikation sind jedenfalls brauchbar und wichtig. Mehr lässt sich darüber, ohne auf die Anwendungen einzugehen, nicht sagen.

Aus der Festlegung der dialogischen Verwendung der logischen Partikeln entsteht - wie wir gesehen haben - ein Sequenzenkalkül, der per definitionem alle logisch-gültigen Sequenzen aufzählt. Dieser Kalkül enthält *nicht* die Schnittregel :

$$F_1 \parallel A\,,, \quad F_2\,,\ A \parallel B \Longrightarrow F_1\,,\ F_2 \parallel B$$

also auch nicht den Spezialfall des modus ponens

$$\parallel A\,,, \quad \parallel A \longrightarrow B \Longrightarrow \parallel B$$

obwohl man diesem immer eine solche Natürlichkeit zuschreibt. Um die Rolle dieser Regel zu verstehen, möchte ich noch auf die Anwendung der Logik in mathematischen Theorien eingehen. Das wichtigste Beispiel liefert die Arithmetik.

Wie kommt man methodisch zu den Zahlen ? Man kann leicht einzelne Zahlwörter exemplarisch einführen und anschliessend also auch das Prädikat "Zahlwort" Man kann auch Begriffsbestimmungen hinzufügen, die dann die Rolle einer sich zu bewährenden Hypothese spielen. Speziell zu der Unendlichlichkeit der Zahlen kann man so immer nur hypothetisch gelangen.

Das ändert sich erst, wenn wir Zahlzeichen durch Konstruktion erzeugen, in der einfachsten Form nach den Regeln :

$$\Longrightarrow |$$
$$n \Longrightarrow n|$$

Es ist zwar nicht möglich, nach diesen Regeln beliebig viele Zeichen, etwa 10^{100} praktisch herzustellen, aber nur deshalb nicht, weil unser Leben zu kurz ist, der Kreidevorrat zu klein, oder ähnliches - - nach den Regeln allein sind beliebig viele Zeichen theoretisch möglich, wie man sagt. Den Sinn des Terminus "theoretisch möglich" muss man, falls man ihn noch nicht kennt, gerade an solchen Beispielen wie diesem lernen.

Die Konstruktionsvorschrift :

$$\Longrightarrow |$$
$$n \Longrightarrow n|$$

liefert, wie ich in freiem Anschluss an Kant sagen möchte, eine synthetische Definition des Zahlbegriffs. Hinzukommt allerdings noch eine Abstraktion, die von den Zahlzeichen zu den Zahlen selbst führt, aber das möchte ich hier übergehen, weil die Abstraktion genau wie bei den Begriffen durchzuführen ist. Durch synthetische Definitionen werden auch die Rechenoperationen eingeführt. Es wird definiert, wie man z.B. Additionen und Multiplikationen auszuführen hat, nämlich so :

$$\Longrightarrow \frac{m + |}{m|} \qquad\qquad \Longrightarrow \frac{| \,.\, n}{n}$$

$$\frac{m + n}{p} \Longrightarrow \frac{m + n|}{p|} \qquad\qquad \frac{m \,.\, n}{p}\,,, \ \frac{p + n}{q} \Longrightarrow \frac{m| \,.\, n}{q}$$

Die Sätze der Arithmetik werden anschliessend definiert als die logischen Folgerungen aus diesen Definitionen, d.h. als solche Aussagen, die sich auf Grund dieser Regeln - und auf Grund der festgelegten dialogischen Verwendung der logischen Partikeln - im Dialog gegen jedermann verteidigen lassen. Diese Aussagen mögen arithmetisch-wahr heissen, und zwar im Unterschied zu der später zu betrachtenden klassischen Arithmetik genauer "konstruktiv" arithmetiseh-wahr.

Die Sätze der konstruktiven Arithmetik sind noch nicht einmal mehr aufzählbar. Die konstruktive arithmetische Wahrheit ist zwar wieder durch die Existenz einer Gewinnstrategie definiert, aber wegen des Auftretens des Allquantors :

$$\begin{array}{r|l} & \wedge_x\ A(x) \\ ?\ n & A(n) \end{array}$$

bei dem der Opponent nach jedem beliebigen n (von unendlich vielen) fragen kann, tritt für die Gewinnbarkeit einer Formel die folgende unendliche Induktionsregel auf :

$$A(|),\ A(||),\ldots \Longrightarrow A(x)$$

d.h. eine Formel A(x) mit einer freien Variablen x ist arithmetisch-wahr. wenn A(n) für jedes n arithmetisch-wahr ist. Man erhält keinen Vollformalismus zur Ableitung der arithmetisch wahren Aussagen, sondern nur einen Halbformalismus.

Für Sequenzen sieht der Halbformalismus der konstruktiven Arithmatik folgendermassen aus : Grundsequenzen sind :

$$F(p) \parallel q$$

wobei p und q Primaussagen sind, für die p falsch oder q wahr ist.

Logische Regeln, wie bisher im intuitionistischen Sequenzenkalkül ohne die Schnittregel.

Dazu kommt die unendliche Induktion :

$$S(n) \text{ für alle } n \Longrightarrow S(x)$$

für beliebige Sequenzen.

Eine Aussage A, für die ∥ A nach diesen Regeln ableitbar ist, ist im Dialog gewinnbar - und umgekehrt.

Man muss allerdings fragen, was die Behauptung einer Ableitbarkeit in einem Halbformalismus bedeutet. Man kann die Ableitungen im allgemeinen ja nicht voll aufschreiben. Nun, die Behauptung einer Ableitbarkeit hat wieder einen dialogischen Sinn. Wer sie Ableitbarkeit einer Sequenz behauptet, muss - auf Verlangen des Opponenten - eine Regel angeben, nach der die ableitbar ist. Der Opponent darf dann eine der Prämissen dieser Regel wählen (das können unendlich viele sein), der Proponent hat diese Prämisse zu verteidigen, usw. bis er schliesslich bei einer Grundsequenz anlangt.

Die Formalisierung, die man auf diese Weise für die konstruktive Arithmetik erhält, unterscheidet sich wesentlich von den Formalisierungen der intuitionistischen Arithmetik, wie sie auf Grund der Arbeiten von Heyting üblich geworden sind.

Dort geht man zunächst von den Peano-Axiomen aus. Das sind konstruktiv arithmetisch-wahre Formeln. Ich will das hier nur am Beispiel des Induktionsschemas zeigen. Die Gewinnstrategie sieht folgendermassen aus :

	$A(\vert) \wedge \bigwedge_x .\ A(x) \longrightarrow A(x\vert).\ \longrightarrow \bigwedge_y A(y)$
$A(\vert) \wedge \bigwedge_x .\ A(x) \longrightarrow A(x\vert).$	$\bigwedge_y A(y)$
$?\ n$	$L\ ?$
$A(\vert)$	$R\ ?$
$\bigwedge_x .\ A(x) \longrightarrow A(x\vert).$	$?\vert$
$A(\vert) \longrightarrow A(\vert\vert)$	$A(\vert)$
$A(\vert\vert)$	$?\ \vert\vert$
$A(\vert\vert) \longrightarrow A(\vert\vert\vert)$	$A(\vert\vert)$
$A(\vert\vert\vert)$	$\vdots$
$\vdots$	
$A(n)$	$A(n)$

Auch für die übrigen Axiome sind die Gewinnstrategien leicht anzugeben. Anschliessend werden als Sätze der formalisierten intuitionistischen Arithmetik die logischen Implikate der Axiome definiert, d.h. diejenigen Aussagen B, für die eine Sequenz :

$$A_1,\ldots,A_n \parallel B$$

logisch-gültig ist, wenn darin $A_1,\ldots,A_n$ arithmetische Axiome sind. Beim Vergleich mit der konstruktiven Arithmetik stehen wir also vor der folgenden Frage :

Ist die Regel :

$$\|_{av}\ A_1 \ ,,\ldots,, \ \|_{av}\ A_n \ ,, \ A_1 \ ,\ldots, \ A_n \ \|_{log}\ B \Longrightarrow \|_{av}\ B$$

für den Halbformalismus der konstruktiven Arithmetik *zulässig* ? Da jede Sequenz, die logisch-gültig est, auch arithmetisch-gültig ist, wird diese Frage affirmativ beantwortet durch die Zulässigkeit der Schnittregel für den konstruktiv arithmetischen Halbformalismus. Das ist eine Erweiterung des Gentzenschen Hauptsatzes, der hierdurch in neuer Belechtung erscheint.

Er rechtfertigt erst die Axiomatisierung der Arithmetik. Wichtig ist mir daran, dass dabei deutlich wird, dass die Schnittelimination auch für den intuitionistischen Sequenzenkalkül bewiesen werden muss. Es genügt nicht, sich für diesen Logikkalkül auf Intuition zu berufen.

Für den klassischen Sequenzenkalkül (oder für einen gleichwertigen klassischen Logikkalkül) liegen die Probleme anders. Hier gibt es mehrere Möglichkeiten. Man kann z.B. die Widerspruchsfreiheit der intuitionistischen Arithmetik jetzt dazu benutzen, die Widerspruchsfreiheit der klassischen Arithmetik auf sie zurückzuführen.

Man kann aber auch den klassischen Sequenzenkalkül ohne Schnittregel dazu benutzen, um allererst zu definieren, was man unter einer klassisch arithmetisch-wahren Formel verstehen wolle und dann die Widerspruchsfreiheit direkt durch den Gentzenschen Hauptsatz für einen klassischen arithmetischen Halbformalismus beweisen.

Auch in diesem Falle - und sogar dann, wenn man eine Interpretation der klassischen arithmetischen Wahrheit etwa durch semantische Bestimmungen oder durch eine abgeänderte dialogische.

Verwendung der logischen Partikeln noch hinzufügt - bleibt für die klassische Logik die zusätzliche Aufgabe, das Verhältnis zur intuitionistischen Logik, die ja jedenfalls interpretierbar ist, genau zu bestimmen.

Ein Resultat in dieser Richtung ist der bekannte Satz, dass jede klassisch arithmetisch-wahre Formel, die weder $\vee$, $\bigvee$ noch $\longrightarrow$ enthält, auch konstruktiv arithmetisch wahr ist.

Ich habe damit, wie ich hoffe, einen Weg aufgezeigt, auf dem man schrittweise bis zu den arithmetischen Formalismen und den Logikkalkülen kommt, ohne - wie es die axiomatische Methode macht - gewisse Setzungen unverstanden an den Anfang zu stellen. Dazu war es notwendig, der Logik und Arithmetik allgemeinere Betrachtungen über das Denken, speziell über Prädikate, Regeln und Begriffe, vorauszuschicken, weil die synthetischen Definitionen der logischen Partikeln und der arithmetischen Grundbegriffe zu ihrer Formulierung schon Begriffe einer praktischen Sprache benutzen.

In einer praktischen Sprache hat die Wissenschaft ihren absoluten Anfang - - und dies ist, im Unterschied zur axiomatischen Methode, durchaus in Einklang mit der wirklichen Situation des Menschen, wie sie schon von Pascal gesehen wurde : "Nous voguons sur un milieu vaste, toujours incertains et flottants, poussés d'un bout vers l'autre".