ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

MARC KRASNER

Le définitionnisme

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 7, série *Mathématiques*, nº 1 (1962), p. 55-81

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1962__7_1_55_0>

LE DÉFINITIONNISME

Marc KRASNER
Clermont-Ferrand

La présente conférence est une présentation d'un nouveau point de vue sur les fondements des mathématiques - Le définitionnisme. Cette manière de les fonder est formaliste (bien que le mot "formalisme" soit compris dans un sens plus large que ce n'est habituellement le cas), mais les formalismes auxquels il conduit ne sont pas les formalismes du calcul propositionnel (comme c'est habituel en Logique mathématique) ou leurs modifications. Les formules de ces formalismes, dites *définitions*, sont destinées à décrire des objets individuels et bien déterminés, et non les propositions sur les relations indéterminées entre les objets non-qualifiés. Dans un formalisme définitionniste, toute proposition est l'affirmation de la correction d'une définition, et les objets sont introduits à posteriori comme classes de définitions correctes par rapport à une certaine relation d'équivalence convenable. Ce sont les seuls objets d'un système définitionniste, qui est, ainsi, libre de paradoxe Skolem (bien que la situation, qui y conduit, se manifeste, d'une manière non-paradoxale, par la pluralité des systèmes définitionnistes possibles) et satisfait à l'exigence de Lebesgue : seuls existent les objets ayant une définition.

Mais le définitionnisme diffère des autres écoles de Logique mathématique non seulement parce qu'il conduit aux formalismes différents, mais aussi parce qu'il n'admet pas un certain nombre de principes, admis, souvent sans formulation explicite, par toutes ou presque toutes ces écoles. Ces principes concernent non seulement les fondements des mathématiques et de la métamathématique, mais aussi la philosophie en général. Pour éviter les erreurs d'interprétation, (dont l'analyse de mon travail "Théorie de la définition", Journ. de math. p. et appl. 1957, p. 325-357 et 1958, p. 55-101 fait par G. Kreisel dans Journ. of Symb. Log., p. 230-231 fournit plusieurs exemples), il est utile de les énumérer et d'indiquer ce qui est admis à leur place (et pourquoi). J'indique les idées admises dans une suite d'alinéas numérotés 1, 2,... etc., chacun d'eux étant suivi d'un alinéa numéroté par le même nombre accompagné de ' : 1', 2',... etc., indiquant quelles sont les idées que j'admets à leur place.

I - PHILOSOPHIE.

1 - On part, habituellement, du point de vue de sens commun, dont on admet la certitude (sans, d'ailleurs, le mentionner). Ainsi, on admet que l'Univers est formé de "choses" distinctes et susceptibles d'être "perçues" par nous telles quelles, simultanément et en existence séparée. Que par conséquent c'est l'expérience, qui nous fournit la preuve de l'existence de la pluralité finie et de la validité de l'intuition de cette pluralité, dont la possession est nécessaire pour percevoir cette expérience de cette manière.

1' - Je considère que ce point de vue est vague et plein de confusions et que l'"expérience" selon ce point de vue n'est, généralement, expérience que pour une toute petite partie, noyée dans un tissu d'interprétations et de misinterprétations. En effet, ce point de vue identifie une entité extérieure (par exemple une chaise) et son effet sur une conscience (que la philosophie classique appelle, d'une manière simpliste, l'"image" de cette entité). Mais, tandis que les entités extérieures peuvent, a priori, exister "chacune pour soi" d'une manière séparée, d'"être plusieurs", leurs effets sur une conscience ne sont que des caractères de son état présent, qui constitue, tel quel, l'unique expérience immédiate possible de son porteur et est, à chaque instant, la seule certitude, qui lui soit accessible. Et ce présent n'est pas une pluralité de "choses", mais une unité syncrétique de ses caractères. Si, même, le porteur de la conscience a le sentiment de l'extériorité et de la séparation de ces effets (qui est une illusion misinterprétant son expérience, mais lui permettant, par contre, de saisir, dans des cas normaux, quelque reflet du monde extérieur), ce sentiment n'est qu'un caractère de plus du présent de sa conscience. C'est ce sentiment de substantification de certains caractères de conscience et de leur coexistence séparée qui est (ou comporte) l'intuition de pluralité. En réalité (et c'est là la base du point de vue de Parménide et des Védantins) l'expérience accessible ne confirme pas une telle intuition, mais le porteur de conscience a l'illusion d'une telle confirmation dans la mesure, où il est dominé par son sentiment d'extérioté et de séparation, c'est-à-dire croit posséder l'intuition dont il s'agit. Ainsi, l'expérience ne peut être interprétée (ou, plutôt, misinterprétée) de manière à confirmer l'intuition de pluralité finie que si, au préalable, on croit cette intuition valide. Mais si la seule expérience accessible au sujet ne confirme pas (sauf misinterprétation) la validité de quelque intuition de pluralité, il n'en résulte nullement que cette intuition soit fausse. Ainsi, si nos idées sur l'Univers sont, dans quelque mesure, exactes, elles présupposent, tout au moins, la validité des intuitions de pluralité finie et dénombrable. Mais les théories au sujet du monde extérieur ne peuvent pas confirmer la validité de ces intuitions de pluralité, car ce sont des théories élaborées et extrêmement indirectes par rapport à l'interprétation (illusoire) "naïve" de l'expérience, et dont tous les stades d'élaboration présupposent la validité de ces intuitions.

Ainsi, un porteur de conscience à l'illusion (ou croit) posséder (et possède peut-être à un certain degré et avec plus ou moins de clarté) certaines intuitions de pluralité, qui peuvent être communes à plusieurs porteurs. Rien ne garantit la validité d'une telle intuition de pluralité : on peut y croire (comme celui, qui croit la posséder) ou ne pas y croire, et, en particulier, la validité de l'intuition de la pluralité finie n'est ni plus ni moins certaine que celle de toute autre. J'admets qu'il est légitime de considérer une intuition de pluralité indépendemment de ceux, qui la possèdent (ou croient posséder), et qu'on peut parler d'entités "intuitions de pluralité" (sans, bien entendu, postuler leur validité).

2 - La logique classique est applicable à toute collection finie de "choses" (Les "physicalistes" disent qu'elle est la "physique de l'objet quelconque" ; pour d'autres, il s'agit de normes intuitives confirmées par l'expérience).

2' - Même dans le cas des collections finies (en supposant l'intuition du fini valable), la logique classique ne s'applique d'une manière manifeste qu'au cas des objets et des prédicats donnés directement (comme, par exemple, "cette chaise", "ce chat", "cette boîte" - objets, "être bleu", "être en bois", "être dans cette pièce" - prédicats). Par contre, s'il s'agit de certains objets et prédicats à caractérisation indirecte, comme, par exemple, "le barbier du village, qui rase tous ceux (et ceux-là seulement), qui ne se rasent pas eux-mêmes", elle peut ne pas s'appliquer, mais ceci seulement parce qu'un tel barbier n'existe pas, la description précédente comportant un cercle vicieux (il en est de même pour "le plus petit entier non-définissable avec moins de $\underline{N}$ mots de la langue française" - paradoxe de Berry). Mais cette logique reste applicable aux collections d'objets directement donnés si les prédicats, qui interviennent, sont définis à partir d'autres, directement donnés, d'une manière excluant toute circularité. Il existe un cas, où une telle absence de circularité est visible - ce sont les prédicats prédicativement définis, qui seront décrits à propos de la Métamathématique.

La pluralité finie ne jouant aucun rôle privilégié, il n'y a aucune raison pour que la logique classique ne soit pas applicable, d'une manière analogue, aux collections de toute autre pluralité, quand on suppose la validité de l'intuition de cette pluralité. Autrement dit, elle devrait être applicable aux collections, achevées au sens de cette pluralité, d'objets directement donnés, munies de prédicats soit directement donnés, soit définis à partir de tels prédicats d'une manière prédicative, le mot "prédicatif" ayant un sens adéquat à la pluralité considérée (et qui sera précisé plus loin).

La logique classique, appliquée d'une manière concrète, n'est ni la "physique de l'objet quelconque", ni une norme intuitive. En effet, dans le cas d'une collection finie, la valeur "vrai" ou "faux" d'un énoncé du calcul des prédicats formé à partir des prédicats, s'appliquant aux valeurs de leurs variables prises dans la collection considérée, est définie d'une manière finie à partir des valeurs que ces prédicats prennent pour des valeurs fixées quelconques de leurs variables prises dans la collection, et comme les règles de la logique classique concernent uniquement les valeurs des énoncés ou prédicats, dont les variables libres sont considérés comme paramètres, elles découlent, dans ce cas particulier, du sens, ainsi attribué, aux constantes logiques : "et", "ou", "implique", "non", "il existe ... tel que" etc. Leur applicabilité ne suppose (en plus de la validité de l'intuition de la pluralité finie) que la possibilité d'attribuer une des valeurs "vrai" ou "faux" à tous les prédicats primitifs dont on parle pour toutes les valeurs de leurs variables dans la collection, mais, ceci étant, elle n'a aucun caractère expérimental ou normatif (la même applicabilité aurait, par contre, un caractère normatif s'il s'agissait de collections non-achevées, c'est-à-dire infinies dans le cas présent). Si l'on admet la validité de quelque autre intuition de pluralité I, la situation est la même quand il s'agit de prédicats dont les variables prennent leurs valeurs dans une collection achevée au sens de I. En effet, la valeur de $(\forall x)P(x)$ ou $(\exists x)P(x)$ peut se définir, comme dans le cas fini, à partir des valeurs de tous les $P(a)$, où a est un objet arbitraire de la collection considérée. Ces valeurs forment donc une collection actuelle (c'est dire achevée) au sens de I, et celui qui possèderait cette intuition peut, par simple inspection de cette collection de valeurs, décider de celle de $(\forall x)P(x)$ ou de $(\exists x)P(x)$. Comme, pour les autres constantes propositionnelles ($\neg$, , $\vee$, $\longrightarrow$ ...etc), il en est de même (y compris quand on applique $\forall$ et $\exists$ aux collections de formules, qui ne sont pas forcément finies, mais seulement achevées au sens de I), on voit qu'on peut donner, dans le cas considéré, aux constantes logiques une signification telle que non seulement la logique classique, mais une logique plus générale (de type analogue, mais à formules "actuelles" au sens de I, et pas forcément finies) devienne applicable aux collections achevées au sens de I pourvu que les prédicats primitifs des formules considérées aient une valeur bien déterminée pour tout système de valeurs de leurs variables dans la collection.

II - METAMATHEMATIQUE.

3 - Un *formalisme* est un langage, considéré en faisant abstraction de sa signification, dont les mots, dits *formules*, forcément finis et auxquels on n'attribue aucune signification *à priori*, sont formés selon certaines règles récursives de construction, à partir d'un alphabet, dont les lettres sont dites ses *signes simples*. En plus, un formalisme comporte des règles de construction (formulables en termes finis) de mots à partir d'un ou plusieurs autres mots, dites *règles de déduction*.

Considérer un *système axiomatique* dans un formalisme c'est appeler *axiomes* certaines de ses formules. Alors, on appelle *théorèmes* les formules constructibles à partir des axiomes par les successions (finies) de règles de déduction. Du point de vue de sens commun, si l'on se donne un exemplaire d'alphabet, et des axiomes, le système axiomatique est à considérer comme existant objectivement, même s'il n'existe aucune conscience pouvant le saisir. Certains l'assimilent à une machine munie d'un programme, qui fabriquerait automatiquement, à partir des axiomes, les théorèmes, et de manière que chaque théorème soit fabriqué à quelque moment de son travail .

3' - En partant de ce qui est certain, c'est-à-dire du point de vue parménidien, on doit y ajouter un certain nombre d'intuitions "préformalistes" avant de pouvoir envisager l'entité "langage" (sans signification *à priori*) et, en particulier, "formalisme". En effet, pour envisager les lettres d'un alphabet, il faut posséder (ou avoir l'illusion de posséder) non seulement les intuitions, qui permettent d'envisager les objets du monde extérieur, mais, également, celle, qui permet d'envisager deux objets de cette sorte comme étant ou n'étant pas, dans des circonstances données, exemplaires d'un même signe, c'est-à-dire une sorte d'intuition d'"archétype" d'une lettre. Ensuite, pour envisager les mots d'un langage (en particulier, d'un formalisme) non comme des signes tout court, mais comme configurations de lettres, il faut avoir l'intuition de leur "schéma de structure", qui comporte, tout au moins, celle de pluralité de leur signes simples. Dans les formalismes au sens ordinaire cette intuition est celle de pluralité finie. Mais, la pluralité finie ne jouant, de notre point de vue, aucun rôle privilégié, il sera permis de mettre à la base d'un langage une intuition arbitraire de pluralité. Bien entendu, si cette intuition (ou toute autre intuition préformaliste que le langage considéré requiert) n'est pas valable, le langage est illusoire, mais rien ne garantit avec certitude que les langages, basés sur la pluralité finie ne le sont pas. Il n'y a, non plus, aucune raison de penser que les autres langages doivent forcément l'être.

Ainsi, un *formalisme* est donné quand on a :

1) Une *intuition de pluralité*. Les collections (en particulier, celles de signes), qui peuvent être saisi à l'aide de cette intuition, seront dites *actuelles* ; on dira encore qu'elles sont *achevées* ou ont une *extension achevée*. Si l'on envisage les entités structurées, caractérisées par quelque caractère de leur structure, il se peut qu'ils ne forment pas une collection actuelle, autrement dit que, quelque soit la collection actuelle de telles entités, on puisse en trouver une entité en dehors de cette collection. On parlera encore, d'une manière impropre, de "collection" de telles entités, mais on dira qu'elle est *virtuelle*, ou *non achevée* (au sens de la pluralité considérée) ou n'a pas d'extension achevée ;

2) Un *alphabet*, qui est une collection actuelle ou virtuelle de signes simples ;

3) Les *schémas de structure* des mots de langage, qui doivent être descriptibles de telle manière

qu'un porteur de conscience possédant l'intuition de pluralité considérée puisse décider, par une simple inspection d'une configuration d'exemplaires de lettres d'alphabet, si cette configuration est une formule du formalisme, c'est-à-dire une réalisation d'un de ses schémas de structure (cela présuppose en particulier, qu'il n'y ait qu'une collection actuelle de schémas de structure et que la collection de signes simples de chacun de ces schémas est actuelle) ;

Remarque.

On dit communément que les schémas de structure finis sont réalisables à l'aide des signes concrets, c'est-à-dire à l'aide des objets convenables du monde matériel, et on en tire argument pour affirmer la certitude de la pluralité finie et l'incertitude de toutes les autres. Or, de telles réalisations, tout doute métaphysique à leur sujet mis à part, ne nous sont accessibles que par l'intermédiaire de leurs effets sur notre conscience (leurs "images"), auxquels on attribue la pluralité d'une manière plus ou moins illusoire (pour s'en convaincre, il suffit de considérer le degré de clarté avec lequel on voit qu'un troupeau de mille moutons en a précisément mille et non, par exemple, mille et un). Quant aux "vérifications" indirectes de cette réalisabilité par une suite de vérifications partielles, elle est sujette aux mêmes pétitions de principe, mais, en plus, présuppose d'autres hypothèses, comme la permanence des signes concrets et la fidélité de la mémoire durant la vérification. D'ailleurs, on peut éprouver le sentiment de séparation et de pluralité très net en l'absence de tout support matériel adéquat, par exemple en souvenir, en imagination, en rêve, en hallucination etc., et même avoir une vision aussi claire des mots de langage que s'ils sont réellement écrits. Je tiens la réalisabilité matérielle des schémas de structure de certaines pluralités pour une circonstance secondaire et ne contribuant aucunement à la validité de ces pluralités, et, vice versa, l'absence de telles réalisations comme n'empêchant en rien cette validité.

4) *Les règles de déduction* (dont la collection est actuelle) chaque règle $\underline{R}$ de déduction étant le passage d'une collection actuelle de formules, satisfaisant à certaines "condition d'applicabilité", à une formule complètement déterminée par la collection de départ, l'inspection d'une collection actuelle donnée $\underline{\Phi}$ de formules et d'une formule donnée F étant suffisante à un sujet possédant l'intuition de pluralité considérée pour décider si $\underline{R}$ est applicable à $\underline{\Phi}$ et si F est le résultat de l'application de $\underline{R}$ à $\underline{\Phi}$.

Du point de vue humain, les seules règles de déductions éventuellement intéressantes sont celles, dites *restreintes*, dont l'applicabilité à un système fini de formules finies peut, en principe, se vérifier par moyens humains en temps fini et dont l'application, dans de tels cas, conduit aux formules finies.

4 - On ne doit pas employer en métamathématique l'infinité actuelle. Si les formules d'un formalisme forment une collection infinie, on doit la considérer, en métamathématique, comme n'ayant pas d'extention achevée, et si l'on raisonne sur cette collection, on doit le faire en accord avec les exigences intuitionnistes (seuls les prédicats constructifs sont à considérer, défense d'employer la règle du tiers exclu), car, selon l'opinion admise, l'intuitionnisme est la vraie logique pour les infinités non-achevées.

Quand, par les raisonnements de ce type seulement, on prouve la consistance d'un système axiomatique, cela démontre, avec une certitude inconditionnelle, que l'application des règles de la logique classique ne permet jamais de déduire des axiomes du système un théorème contradictoire.

4' - Un formalisme $\mathfrak{F}$ ne peut être envisagé (et un quelconque raisonnement à son sujet ne peut avoir un sens) que d'une manière conditionnelle, à savoir sous l'hypothèse de la validité de l'intuition de pluralité $\underline{I}$, qui est à sa base (et qui n'est pas forcément celle de pluralité finie). A fortiori, l'applicabilité de telles ou telles méthodes de raisonnement à $\mathfrak{F}$ n'est jamais certaine, et les résultats de leur application ne sont valables que sous condition de cette applicabilité. Il y a certaines méthodes, qui sont à rejeter à priori- ce sont celles, qui conduisent aux antinomies. Par contre, s'il n'y a aucune raison de penser que certaines méthodes, couramment employés en mathématique classique, et appliqués d'une certaine manière en métamathématique, puissent conduire aux situations antinomiques, un mathématicien a une forte tendance de croire à leur applicabilité dans ces conditions. Bien entendu, la validité des résultats obtenus est subordonnée à la croyance en cette applicabilité (impossible à prouver ni, en général, à refuter).

La prohibition d'appliquer les raisonnements non-intuitionnistes aux collections infinies vient de la conviction, largement répandue, que l'origine des paradoxes est dans l'emploi de l'infini actuel. Or, rien ne confirme un tel point de vue, car chacun des paradoxes connus comporte un prédicat défini d'une manière circulaire (et, en tout cas, non-prédicative) et une application, plus ou moins déguisée, de l'axiome d'abstraction à ce prédicat, et il existe, également, des paradoxes concernant les collections finies ("Barbier", "Menteur", paradoxe de Berry sur le plus petit entier n'ayant aucune définition de longueur $< n$). Dans certains paradoxes d'apparence finie, il est très facile de mettre la main sur l'entité définie circulairement et de les traiter comme énoncés défectueux. Mais, ne sachant pas le faire dans tous les cas, les logiciens ont attribué aux autres paradoxes une origine plus profonde, due, soi-disant, à l'emploi de l'infini actuel. Ainsi, pour le paradoxe de Berry, on a dit que la réponse à la question : une phrase donnée est-elle une définition d'un entier naturel ? peut dépendre de la solution de problèmes infinitaires. Une analyse des paradoxes faite dans la 2ème partie de mon travail "Théorie de la définition" (Journ. d. math. p. et appl., 1958, p. 91-95) montre qu'il n'en est rien et qu'on peut, pour tous les paradoxes connus, mettre la main sur le "barbier" ou sur la manière défectueuse d'en parler. Certes, indépendamment des antinomies, il peut exister des doutes sur la légitimité de considérer telle ou telle infinité (ou quelque infinité) comme actuelle. Autrement dit, si certains objets existent, il n'est pas sûr qu'il soit légitime de les considérer comme formant une collection achevée, c'est-à-dire les imaginer en coexistence simultanée et séparée. Mais ce doute, qui n'est autre que celui de la validité de telle ou telle intuition de pluralité, est purement métaphysique et s'applique également à la validité de l'intuition de pluralité finie. Et on ne connait aucun cas, où la simple considération de quelque pluralité comme pluralité achevée, sans que les définitions circulaires interviennent, ait jamais conduit aux antinomies.

Les raisonnements qu'on fait habituellement en métamathématique quand on cherche à prouver la consistance d'un axiomatisme sont de type suivant : on considère un domaine de formules, qui sont ou bien les formules du formalisme considéré, ou bien certaines formules auxiliaires dérivées des précédentes par certains procédés de construction explicitement indiqués. On considère un certain nombre de prédicats, dont les arguments ont, comme domaine de variation, le domaine précédent de formules, et dont la valeur est déterminée sans ambiguïté par quelque caractère de la structure formelle des valeurs de leurs arguments (prédicats non-ambigüs), par exemple $D(x)$: "x est une démonstration". Ces prédicats, par leur nature ou leur mode de formation, satisfont à certains axiomes, et la consistance du formalisme considéré équivaut à la déduction, à partir de ces axiomes et en se servant uniquement de règles de déduction du calcul des prédicats du premier ordre de la logique qu'on admet, la vérité d'un certain énoncé formé à partir des prédicats considérés. Le sens de cet énoncé est qu'il est impossible de déduire à la fois quelque formule f du formalisme et une autre formule $\neg f$, dite *opposée* de f(et constante à partir de f) en partant des axiomes.

Caractérisé de cette manière très générale, ce type de raisonnement semble, en effet, le seul possible en métamathématique. Mais rien n'oblige de donner aux mots "formule", "formalisme", "construction", "prédicat non-ambigü", "logique" le sens restrictif que leur donne la métamathématique habituelle d'inspiration intuitionniste et finitiste.

On a déjà vu ce qu'il en est pour "formule, "formalisme" et "construction". En ce qui concerne les "prédicats non ambigüs", plaçons-nous, d'abord, dans le cas, où l'intuition de pluralité $\underline{I}$, qui est à la base du formalisme, est celle de pluralité finie. Soit $\underline{U}$ un univers (en principe, infini) de formules finies, qui est bien délimité par la condition de conformité à certains schémas de bonne construction. La structure formelle de ces formules fournit d'emblée un certain nombre de prédicats inspectifs(*), dont la collection sera notée $\underline{J}$. Si l'on veut utiliser d'autres prédicats, dont la collection sera notée $\underline{\Pi}$ et dont les variables d'objet parcourent U, il faut les introduire par une collection $\underline{\Sigma}$ d'énoncés du calcul des prédicats de premier ordre formés à partir des prédicats de la collection $\underline{J} \cup \underline{\Pi}$; le système Π de prédicats sera dit *non ambigü* s'il existe une et une seule manière d'attribuer une des valeurs "vrai" ou "faux" à chacun des prédicats $P_i(x_1, x_2, \ldots, x_{s_i})$ de Π pour chaque système $x_1 = u_1$, $x_2 = u_2$, ..., $x_{s_i} = u_{s_i}$ des valeurs de leurs arguments prises dans $\underline{U}$ sans entrer en contradiction avec les conséquences de Σ et les valeurs des prédicats inspectifs faisant partie de J, qui résultent de l'inspection des valeurs de leurs arguments. Ce système sera dit *ambigü par contradiction* (ou antinomique) quand il n'y a aucune manière de le faire, et sera dit *ambigu par indétermination* quand il y en a plusieurs. Il est à remarquer que la notion de non ambiguïté (et celle de sorte d'ambigüité) dépend du sens du mot "conséquence de ...", c'est-à-dire de la logique qu'on se permet d'employer. Ainsi, si Π se réduit à un seul prédicat $P(x, y)$ et si $\underline{J}$ contient un prédicat $A(x, y, z)$, considérons deux cas suivants pour $\underline{\Sigma}$: $\underline{\text{a}}$) u étant une formule particulière de U, Σ se réduit à l'énoncé $(\forall x)(\forall y)[(y \neq u \sim P(x, y)) \,\&\, (P(x, u) \sim \neg P(x, x))]$; b) $(\forall x)(\forall y)[P(x, y) \sim (\exists z) A(x, y, z)]$. Pour un logicien classique, Σ est antinomique dans le cas $\underline{\text{a}}$) et non-ambigü dans le cas $\underline{\text{b}}$), et pour un logicien intuitionniste $\underline{\Sigma}$ est ambigü par indétermination dans le cas $\underline{\text{a}}$) et, en général (c'est-à-dire sauf si $A(x, y, z)$ satisfait à des conditions très restrictives) dans le cas $\underline{\text{b}}$).

(*) c'est-à-dire tels que leur valeur, pour un système donné de valeurs de leurs variables, puisse être déterminée sans ambigüité par une simple inspection de ce système de valeurs

Ainsi, les systèmes de prédicats ainsi introduits ne sont pas forcément non ambigüs (et peuvent, même être antinomiques). Mais il existe un cas, celui des systèmes *prédicativement caractérisés* quand $\underline{\Sigma}$ est certainement non ambigü du point de vue de la logique classique, et en voici la description. En gros, une caractérisation de $\underline{\Pi}$ est prédicative quand elle consiste en :

a) la subdivision de $\underline{U}$ en couches $\underline{U}_{n_1, n_2, \ldots, n_p}$ pouvant être paramétrisées par les p-uples $(n_1, n_2, \ldots, n_p)$ d'entiers non négatifs, l'appartenance d'une formule u à une couche donnée U_{n_i} étant complètement déterminée par les valeurs pour $x = u$, de certains prédicats à une seule variable libre x et sans variables liées, formés par les opérations du calcul de propositions (c'est-à-dire sans employer les quantificateurs) à partir du système J des prédicats inspectifs. On ordonnera la collection de ces couches (dont certains peuvent être vides) selon l'ordre lexicographique de leurs indices et l'indice de la couche, où se trouve une formule u sera dit sa *caractéristique* et sera noté $\chi(u)$. La partition précédente de U définit celle, analogue de toute sa puissance cartésienne $\underline{U}^q$, en prenant comme caractéristique d'un vecteur $(u_1, u_2, \ldots, u_q)$ à coordonnées dans U le maximum des caractéristiques de ses coordonnées. D'ailleurs, seule la partition de $\underline{U}$ (et des $\underline{U}^q$) en couches et l'ordre de ces couches nous importent, et non leur paramétrisation effective, autrement dit, il suffit que $\underline{\Pi}$ comporte un prédicat inspectif $A(x, y)$ formé, sans emploi de quantificateurs, à partir du système $\underline{J}$, dont la valeur, pour tout système de valeurs $x = u$, $y = v$ des x, y dans $\underline{U}$ soit la même que celle de relation $\chi(u) < \chi(v)$ pour une caractéristique $\chi(..)$ de la forme précédente ;

b) la donnée, pour tout prédicat $P_i(x_1, \ldots, x_{s_i})$ de $\underline{\Pi}$, d'une règle de construction $R(P_i)$, qui fait correspondre à tout vecteur $(u_1, u_2, \ldots, u_{s_i}) \in \underline{U}^{s_i}$ un énoncé $E_{P_i}^{u_1, u_2, \ldots, u_{s_i}}$, formé par les opérations du calcul des prédicats de premier ordre à partir de $\underline{J} \cup \underline{\Pi}$, la marche de cette construction ne dépendant que des valeurs des prédicats du système $\underline{J}$ quand on donne à leurs arguments les valeurs prises parmi les coordonnées de $(u_1, u_2, \ldots, u_{s_i})$;

c) les affirmations, $\underline{S}_i$, où $\underline{S}_i$ dit que la valeur de $P_i(u_1, u_2, \ldots, u_{s_i})$, pour tout $(u_1, u_2, \ldots, u_{s_i}) \in \underline{U}^{s_i}$, est la même que celle de $E_{P_i}^{u_1, u_2, \ldots, u_{s_i}}$ quand tous ses quantificateurs sont étendus aux formules de $\underline{U}$ de caractéristique strictement inférieure à celle du vecteur $(u_1, u_2, \ldots, u_{s_i})$ et à celles-là seulement. Grâce à $A(x, y)$, tous ces $\underline{S}_i$ peuvent être exprimés facilement par les énoncés convenables, $T(P_i)$, formés à partir de $\underline{J} \cup \underline{\Pi}$, et dont les quantificateurs sont étendus à $\underline{U}$ tout entier.

d) $\underline{\Sigma}$ ne comporte aucun énoncé autre que $A(x, y) \sim \chi(x) \sim \chi(y)$ et les $T(P_i)$.

Montrons qu'un tel système $\underline{\Pi}$ est effectivement non ambigü du point de vue de la logique classique.

Soit $\underline{U}_\chi$ la partie de $\underline{U}$ formée de ses couches de caractéristique $< \chi$. Une application $\underline{w}$ resp. $w_\chi = [\{(P, u_1, u_2, \ldots, u_{s(P)})\} \longrightarrow \{v, f\}]$ (où $P = P(x_1, x_2, \ldots, x_{s(P)})$ est un prédicat de $\underline{\Pi}$ de dimension $s(P)$ et où f, v sont les abbréviations pour "vrai" et "faux"), étendue à tous les $P \in \underline{\Pi}$ et à tous les $(u_1, u_2, \ldots, u_{s(P)}) \in \underline{U}^{s(P)}$ resp. $\underline{U}_\chi^{s(P)}$ sera dite une *valuation permise* de $\underline{\Pi}$ sur $\underline{U}$ resp. sur $\underline{U}_\chi$ si elle ne contredit aucune conséquence des conditions $\underline{\Sigma}$, considérée sur l'univers de formules correspondant. $\underline{\Pi}$ sera dit non-ambigü sur $\underline{U}$ ou sur $\underline{U}_\chi$ s'il existe une et une seule valuation permise de $\underline{\Pi}$ sur cet univers de formules. Une caractéristique sera dite *limite* (ou *de 2ème espèce*) si parmi les caractéristiques, qui lui sont inférieures (au sens strict) il n'y a pas de plus grande, autrement dit si sa dernière coordonnée est 0. Supposons que $\underline{\Pi}$ soit non-ambigü sur tout $\underline{U}_\chi$ resp., χ^* étant une caractéristique limite, sur tout $\underline{U}_\chi$, $\chi < \chi^*$. Donc, pour tout χ de la forme considérée, il existe une et une seule valuation permise w_χ de $\underline{\Pi}$ sur $\underline{U}_\chi$, et comme la restriction $(w_\chi)_{\bar{\chi}}$ de w_χ à $\underline{U}_{\bar{\chi}}$, où $\bar{\chi} < \chi$, est visiblement une valuation permise de $\underline{\Pi}$ sur $\underline{U}_{\bar{\chi}}$, elle doit coïncider avec $w_{\bar{\chi}}$. Posons, pour tout $(u_1, u_2, \ldots, u_{s(P)}) \in \underline{U}^{s(P)}$ resp. $\underline{U}_\chi^{s(P)}$, $\tilde{w}.(P, u_1, u_2, \ldots, u_{s(P)}) = w_{\chi(u_1, u_2, \ldots, u_{s(P)})+1}.(P, u_1, u_2, \ldots, u_{s(P)})$, où, si $\chi = (n_1, n_2, \ldots, n_p)$, $\chi + 1$ signifie $(n_1, n_2, \ldots, n_p + 1)$. Il est clair que tout w_χ précédent coïncide avec la restriction de $\tilde{w}$ à $\underline{U}_\chi$ correspondant. Par suite, si w resp. w_{χ^*} est une valuation permise de $\underline{\Pi}$ sur $\underline{U}$ resp. $\underline{U}_{\chi^*}$, elle doit coïncider avec $\tilde{w}$, car sa restriction à tout $\underline{U}_\chi$ resp. à tout $\underline{U}_\chi$ tel que $\chi < \chi^*$ est w_χ. Ainsi, il existe au plus une valuation de cette sorte, et si $\tilde{w}$ en est une, $\underline{\Pi}$ est non ambigu sur $\underline{U}$ resp. sur $\underline{U}_{\chi^*}$. Or le système de conditions $\underline{\Sigma}$ est la collection des $T(P) = (\forall x_1)(\forall x_2)..(\forall x_{s(P)})[P(x_1, x_2, \ldots, x_{s(P)}) \sim E_P^{x_1, x_2, \ldots, x_{s(P)}}]$, où les quantificateurs $\forall x_i$ sont tous étendus sur l'univers des formules, où $\underline{\Pi}$ est considéré. En vertu de la logique classique, si $u_1, u_2, \ldots, u_{s(P)}$ sont dans le même univers de formules, $T^{u_1, u_2, \ldots, u_{s(P)}} = \{P(u_1, u_2, \ldots, u_{s(P)}) \sim E_P^{u_1, u_2, \ldots, u_{s(P)}}\}$ est une conséquence de $T(P)$. Si l'on attribue, de quelque manière, à tout $P(u_1, u_2, \ldots, u_{s(P)})$, où $P \in \underline{\Pi}$ et où $u_1, u_2, \ldots, u_{s(P)}$ sont dans l'univers considéré de formules, une valeur $w.P(u_1, u_2, \ldots, u_{s(P)})$, les énoncés $T_P^{u_1, u_2, \ldots, u_{s(P)}}$ (pour tous P et u_j de cette sorte) et $T(P)$ reçoivent, en vertu de la logique classique, des valeurs bien déterminées (bien que non déterminables par un procédé fini) et si celles de toutes les $T^{u_1, u_2, \ldots, u_{s(P)}}$, pour un P fixé sont "vrai", celle de $T(P)$ est la même. D'autre part, $T_P^{u_1, u_2, \ldots, u_{s(P)}}$ est, pour tous $u_1, u_2, \ldots u_{s(P)}$, qui sont dans l'univers considéré de formules, une conséquence de $T(P)$. Si la valuation $\tilde{w}$ contredit les conditions $\underline{\Sigma}$ sur $\underline{U}$ resp. $\underline{U}_{\chi^*}$, un au moins des énoncés $T(P)$ prend, pour cette valuation, la valeur "faux" sur l'univers considéré de formules. Il existe donc un vecteur $(u_1, u_2, \dots, u_{s(P)}) \in \underline{U}^{s(P)}$ resp. $\underline{U}^{s(P)}_{\chi^*}$ tel que $T_P^{u_1, u_2, \dots, u_{s(P)}}$ soit fausse. Mais alors si $\chi = \chi(u_1, u_2, \dots, u_{s(P)})$ donc, dans le cas de $\underline{U}_{\chi^*}$, χ est $< \chi^*$], w_χ, qui est la restriction de $\tilde{w}$ à $\underline{U}_\chi$, rend aussi fausse $T_p^{u_1 u_2, \dots, u_{s(P)}}$, car la valeur de cet énoncé est déterminée par celles des prédicats de $\underline{J} \cup \Pi$ pour les valeurs de leurs arguments de caractéristique $\chi < \chi = \chi(u_1, u_2, \dots, u_{s(P)})$). Mais alors, puisque $T_p^{u_1, u_2, \dots, u_{s(P)}}$ est une conséquence de $T(P)$ sur $\underline{U}_\chi$, w_χ contredit une telle conséquence et n'est pas, contre l'hypothèse, une valuation permise de $\underline{\Pi}$ sur $\underline{U}_\chi$.

Ainsi, si $\underline{\Pi}$ est ambigü sur $\underline{U}$, il doit exister des caractéristiques $\chi = (n_1, n_2, \dots, n_p)$ telles que $\underline{\Pi}$ soit déjà ambigü sur $\underline{U}_\chi$, et parmi ces χ il y en a une, la plus petite $\chi^\circ = (n_1^\circ, n_2^\circ, \dots, n_p^\circ)$, qui se détermine par le procédé évident suivant : n_1° est la plus petite valeur prise par n_1 dans les caractéristiques $\chi = (n_1, n_2, \dots, n_p)$ telles que $\underline{\Pi}$ soit ambigü sur $\underline{U}_\chi$, n_2° est la plus petite valeur prise par n_2 dans les χ de même type telles que $n_1^\circ = n_1^\circ, \dots, n_3^\circ$ est la plus petite valeur de n_3, prise dans de telles χ, où $n_1 = n_1^\circ$ et $n_2 = n_2^\circ$, etc. Ce χ° ne peut pas être une caractéristique limite, autrement dit $n_p^\circ \neq 0$, car $\underline{\Pi}$ est non-ambigü sur tout $\underline{U}_\chi$, $\chi < \chi^\circ$. Il existe donc $\chi^\circ - 1 = (n_1^\circ, n_2^\circ, \dots, n_{p-1}^\circ, n_p^\circ - 1)$ et $\underline{\Pi}$ est non-ambigu sur $\underline{U}_{\chi^\circ - 1}$. Si $\chi(u_1, u_2, \dots, u_{s(P)}) = \chi^\circ - 1$, ce qui a lieu si et seulement si ce vecteur est dans $\underline{U}^{s(P)}_{\chi^\circ}$ sans être dans $\underline{U}^{s(P)}_{\chi^\circ}$, $E_p^{u_1, u_2, \dots, u_{s(P)}}$ est un énoncé, dont la valeur est déterminée par celles des prédicats de $\underline{J} \cup \underline{\Pi}$ sur $\underline{U}_{\chi^\circ - 1}$, donc est déterminée quand on impose aux $P \in \underline{\Pi}$ la valuation $w_{\chi^\circ - 1}$ sur $\underline{U}_{\chi^\circ - 1}$, et soit $w_{\chi^\circ}.E_p^{u_1, u_2, \dots, u_{s(P)}}$ cette valeur. La seule valeur de $P(u_1, u_2, \dots, u_{s(P)})$, qui rend $T_p^{u_1, u_2, \dots, u_{s(P)}}$ vrai est, évidemment, la même. Ainsi, si l'on pose, pour $P \in \underline{\Pi}$ et pour $(u_1, u_2, \dots, u_{s(P)}) \in \underline{U}^{s(P)}_{\chi^\circ}$; $w_{\chi^\circ}.(P, u_1, u_2, \dots, u_{s(P)}) = \tilde{w}_{\chi^\circ}.E_p^{u_1, u_2, \dots, u_{s(P)}}$ ou $= w_{\chi^\circ - 1}.(P, u_1, u_2, \dots, u_{s(P)})$, selon que $\chi(u_1, u_2, \dots, u_{s(P)})$ est $=$ ou $< \chi^\circ - 1$, on voit que w_{χ° est la seule valuation de $\underline{\Pi}$ sur $\underline{U}_{\chi^\circ}$, qui rend tous les $T^{u_1, u_2, \dots, u_{s(P)}} (P \in \underline{\Pi}, (u_1, u_2, \dots, u_{s(P)}) \in \underline{U}^{s(P)}_{\chi^\circ})$ vrais. C'est donc la seule valuation de $\underline{\Pi}$ sur $\underline{U}_{\chi^\circ}$, qui donne à toutes les $T(P)$ la valeur "vrai", ce qui montre que, contre l'hypothèse, $\underline{\Pi}$ est non-ambigü sur $\underline{U}_{\chi^\circ}$ et entraîne sa non-ambigüité sur $\underline{U}$.

La non-ambiguité des prédicats ainsi définis (quand on emploie la logique classique) devient encore plus claire pour certains logiciens si l'on fait une traduction "gödelienne" de $\underline{U}$ et de tout ce qu'on y considère (une telle traduction est possible si l'alphabet est fini ou énumérable de quelque manière emplicite). Alors, les formules se traduisent par des entiers naturels, la propriété d'un entier d'être la traduction d'une formule devenant un prédicat algorithmique $F(x)$ (autrement dit, la valeur de $F(x)$ pour une valeur donnée de son argument x peut s'obtenir en appliquant à cette valeur de l'argument un certain algorithme). Les prédicats inspectifs de $\underline{J}$ et le prédicat "ordinateur" $A(x,y)$ se traduisent, également, par des prédicats algorithmiques (les algorithmes s'appliquant aux systèmes de valeurs de tous leurs arguments quand ces valeurs satisfont à $F(x)$) respectivement de $\underline{J}'$ et $A'(x, y)$. Evidemment, $A'(x, y)$ induit la partition et l'ordre de classes des entiers satisfaisant à $F(x)$ semblables à ceux des formules de $\underline{U}$ définies par $A(x, y)$. Les $P(x_1, x_2, \dots, x_{s(p)}) \in \underline{\Pi}$ se traduisent par les prédicats $p(x'_1, x'_2, \dots, x'_{s(P)}) \in \underline{\Pi}'$ de même forme (c'est-à-dire prédicativement définis) portant sur les entiers et impliquant $F(x'_1)$ & $F(x'_2)$&...& $F(x'_{s(P)})$, et où $E_p^{u_1, u_2, \dots, u_{s(p)}}$ est remplacé par sa traduction $E_p'^{u'_1, u'_2, \dots, u'_{s(P)}}$, où u'_j est la traduction de u_j et où $E_p'^{u'_1, u'_2, \dots, u'_{s(P)}}$ est un énoncé, dont les quantificateurs sont étendus aux entiers x'_j satisfaisant au prédicat $F(x'_j)$ & $[\bigvee_q A'(x'_j, u'_q)]$ et qui, en tant que formule du calcul des prédicats, avec les prédicats primitifs de $\underline{J}' \cup \underline{\Pi}'$ et, éventuellement, les constantes entiers positifs, est construit, à partir des entiers $u'_1, u'_2, \dots, u'_{s(P)}$ à l'aide d'un algorithme, $\underline{R}'(P')$, dans le domaine considéré de formules, attaché à $P'(x'_1, x'_2, \dots, x'_{s(P)})$.

La définition de la caractérisation prédicative des prédicats métamathématiques des formalismes basés sur l'intuition de pluralité finie emploie, à similitude près, les entiers intuitifs et leur comparabilité, et le raisonnement précédent, prouvant la non-ambigüité de ces prédicats, est basé, en plus de l'hypothèse de l'applicabilité de la logique classique, sur certaines propriétés de ces entiers, à savoir :

1) la collection des entiers est bien ordonnée, ce qui équivant à : 1) la comparabilité des entiers et 1α) la bonne ordination de la collection (actuelle des entiers inférieurs à un entier donné ;

2) la notion de sous-ensemble d'un ensemble (fini) est assez générale pour permettre la démonstration de la comparabilité des collections actuelles (finies dans le cas considéré) bien ordonnées et celle de l'existence de la caractéristique minimale χ° telle que $\underline{\Pi}$ soit ambigü sur $\underline{U}_{\chi^\circ}$ (ce dernier raisonnement exige essentiellement que les $n < \nu$ tels qu'il existe une caractéristique χ de la forme $(n_1^\circ, n_2^\circ, \dots, n_{i_1}^\circ, n, *, *, \dots)$ de manière que $\underline{\Pi}$ soit ambigü sur $\underline{U}_\chi$, forment une collection actuelle d'entiers)). S'il s'agit d'un formalisme basé sur une autre intuition de pluralité $\underline{I}$, on peut définir les caractérisations prédicatives à l'aide des "collections actuelles bien ordonnées au sens de pourvu que $\underline{I}$ soit suffisamment régulière pour permettre la caractérisation de bon ordre au sens de $\underline{I}$. Il suffit pour celà que :

1) le carré cartésien d'une collection actuelle (ce qui équivaut presque à la réunion d'une famille actuelle de collections actuelles) au sens de $\underline{\ }$ le soit, ce qui permet de définir l'ordre d'une collection actuelle comme une sous-collection actuelle de son carré cartésien, satisfaisant aux conditions habituelles ;

1') $\underline{I}$ doit permettre de distinguer si une collection actuelle ordonnée a d'autres lacunes que celles (formant une collection actuelle) dont la classe supérieure possède le plus petit élément.

Si $C(x, y)$ est un prédicat transitif et réflexif sur $\underline{U}$, $C(x, y)$ & $C(y, x)$ est une relation d'équivalence $E(C)$ sur $\underline{U}$ et le prédicat $C^*(x^*, y^*)$ induit par $C(x, y)$ sur $\underline{U}/\underline{E}(C)$ est un ordre large. On exigera du prédicat ordinateur $A(x, y)$ que cet ordre soit total et qu'il existe une suite finie

$$A_1(x, y),\ A_2(x, y), \ldots,\ A_m(x, y) = A(x, y)$$

de m prédicats transitifs et réflexifs sur $\underline{U}$ tels que : a) $A_i(x, y) \longrightarrow A_{i-1}(x, y)$; b) Si $x^*_{i-1} \in \underline{U}/\underline{E}(A_{i-1})$ et si $z_i \in \underline{U}/\underline{E}(A_i)$ est $\subset x_{i-1}$, la collection des $x^*_i \in \underline{U}/\underline{E}(A_i)$ tels que $A^*(z^*_i, x^*_i)$ (c'est-à-dire $(x^*_i < z^*_i)$ est actuelle et $A^*_i(x^*, y^*)$ induit un bon ordre. Alors, si une condition analogue à 2), mais autrement formulée, est remplie, on prouve, comme prédécemment, la non-ambiguité des $P \in \underline{\Pi}$.

Nous ne pouvons pas examiner ici en détail la question de l'applicabilité, dans la métamathématique "prédicative" sur $\underline{U}$, de telle ou telle logique. Remarquons seulement que l'applicabilité de la logique classique signifie qu'on croit pouvoir attribuer aux quantificateurs étendus à l'univers de formules $\underline{U}$, non achevé au sens de l'intuition de pluralité qui est à sa base (et sert, en particulier, à le délimiter), la même signification que pour les collections achevées, tandis que l'applicabilité de la logique intuitionniste (et des règles intuitionnistes de non-ambiguïté) signifie qu'on donne au quantificateur existentiel $\exists x$ le sens "il existe un exemple constructible ... satisfaisant à..", qu'on nie la possibilité de sa signification habituelle, et qu'on donne au quantificateur universel $\forall x$ la signification "... est démontrable, pour un x arbitraire, à l'aide de la logique intuitionniste", ce qui constitue une manière un peu circulaire de donner une signification à cette logique et semble rendre cette signification incompatible avec l'hypothèse d'"achevabilité" de $\underline{U}$, c'est-à-dire de l'existence d'une intuition de pluralité valable $\underline{I'}$ (plus forte que $\underline{I}$) telle que $\underline{U}$ soit actuelle au sens de I'. L'existence d'une telle $\underline{I'}$ entraîne, par contre, la possibilité de l'interprétation habituelle de $\exists x$ et $\forall x$ pour un tel $\underline{U}$ et l'applicabilité de la logique classique. Comme ni l'hypothèse de l'achevabilité de $\underline{U}$ ni l'hypothèse contraire ne sont en rien liées aux paradoxes, il s'agit, finalement de pure croyance, et la prétention de la logique intuitionniste d'être la seule adéquate aux collections non achevées n'est basée sur rien.

Par ailleurs, un mathématicien n'arrivera jamais à croire qu'on puisse trouver un contre-exemple d'un résultat trouvé par les moyens de la logique classique à partir des conditions Σ - $\{\chi(x) < \chi(y) \sim A(x, y)$ et $T(P)$, $P \in \underline{\Pi}\}$ caractérisant un système prédicativement défini $\underline{\Pi}$ de prédicats, et, en particulier, qu'on puisse trouver des formules $u_1, u_2, \ldots, u_{s(P)} \in \underline{U}$ telles qu'on puisse, déduire, à partir de Σ, que $P(u_1, u_2, \ldots, u_{s(P)})$ soit à la fois vrai et faux.

5 - Quand les logiciens parlaient de "formalisme" ou de "logique" dans des cas d'un emploi concret, ils sous-entendaient (quelquefois inconsciemment) le calcul des prédicats (de quelque ordre) ou quelque modification de ce calcul (par exemple le formalisme intuitionniste, la logique à plusieurs valeurs, la logique modale etc.) et les procédés déductifs d'un tel formalisme. Les formalismes (et leurs logiques) ont toujours été sous-entendus comme systèmes logico-déductifs" propositionnalistes" et l'idée ne venait à personne que des formalismes d'autre type puissent être utilement envisagés (en particulier, en vue de la fondation des mathématiques).

5' - Jusqu'à la fin du siècle dernier, la mathématique a été une collection de *propositions* (avec leurs démonstrations) sur les *objets*, considérés (à tort ou à raison) comme mathématiques, de nature et d'origine souvent vague et même un peu mystique (nombre entier comme "somme d'unités", les "infiniment petits", objets géométriques en tant qu'idéalisations des caractères de spatialité), et les raisonnements permis n'y étaient pas explicitement précisés.

La situation a changé avec Cantor, Dedekind, Hilbert. Il s'est trouvé qu'en géométrie il s'agissait d'objets factices (en tant qu'objets individuels). Elle est devenue, avec Hilbert, un système de relations dans un système d'objets de nature arbitraire (et indifférente pour la théorie) liées par les axiomes. Par contre, Cantor et Dedekind ont interprété les nombres comme objets individuels de nature logique (en particulier, à partir de la notion de puissance d'ensemble et de celle de coupure d'un ensemble ordonné). D'autre part, la notion de raisonnement et de démonstration a été remarquablement précisée par Peano, Frege, Russel, Hilbert. Il semblait que la mathématique était en train de devenir une partie de la "grande logique", un système irréprochable d'énoncés sur les objets parfaitement définis (les propriétés, propriétés des propriétés etc. étant considérés comme objets), et de telles synthèses "logicistes" ont été tentées par Frege et Russel. Mais tout cela était basé sur la théorie "naïve" des ensembles, c'est-à-dire sur le traitement en quelque sorte "concret" et "matériel" de la relation $\in$ de l'appartenance à un ensemble (qu'on confondait, en fait, avec celle de la possession d'une propriété, toute propriété étant, ainsi, considérée comme un ensemble et tout infini comme actuel), qui se comportait ainsi comme une sorte de constante logique, analogue aux $\neg$, &, $\vee$, , ($\exists$..), ($\forall$..) etc.

Mais, les paradoxes de la théorie des ensembles ont remis tout en question, et ont montré qu'on ne peut pas considérer toute infinité comme achevée. Il y a eu diverses tentatives de faire face à la situation ainsi créée. L'intuitionnisme et les "pragmatismes" ont été (malgré les efforts de clarification ultérieure) un retour au vague des temps anciens. L'essai de replâtrage du logicisme par Russel (théorie des types) n'a pas été entièrement satisfaisant. Hilbert a proposé de faire de la "petite logique", c'est-à-dire d'étudier métamathématiquement les théories mathématiques particulières en essayant de les justifier sans référence à la théorie des ensembles, et, à sa suite, Zermelo, Fraenkel, Bernays, v. Neumann ont cherché à justifier la "grande logique" à la manière de la "petite", en traitant $\in$ non comme une constante logique, mais comme signe d'un prédicat (à 2 arguments) $x \in y$, caractérisé par un système axiomatique convenable : c'est la tendance axiomatique de la théorie des ensembles. Mais, de cette manière, la théorie des ensembles (et, à sa suite, toute la mathématique, si on veut la baser, comme font, par exemple, les Bourbaki, sur la forme axiomatique de cette théorie) devient un système d'énoncés du calcul des prédicats suspendu un peu dans l'air. Bien qu'il existe deux manières (par la fonction $i_{x_1, x_2, \ldots x_p}$ et par combinaisons (a,b), $\{a, b, c\}$,...etc. de signes extra-mathématiques a, b, c etc.) d'introduire des objets plus ou moins individuels, les axiomes de la théorie des ensembles ne définissent pas le support de la relation $\in$ (pas même à isomorphie près) et, en vertu du "paradoxe" de Skolem, elles admettent, comme tout axiomatisme prédicatif de premier ordre, des réalisations dénombrables, ce qui est en conflit avec la signification de la théorie qu'ils cherchent à exprimer. La multiplicité des réalisations possibles de la théorie axiomatique des ensembles est une des raisons au moins, qui empêchent qu'il y ait quelque critère (ou même notion) de vérité : seule la déductibilité à partir des axiomes peut être envisagée.

Le définitionnisme part de la remarque que toute proposition mathématique peut être formulée comme affirmation de la correction d'une certaine définition. Ainsi, par exemple, le dernier théorème de Fermat peut se formuler comme suit : la définition "ensemble, qui est, à la fois, l'ensemble vide et celui des quadruples d'entiers (n, x, y, z) tels que $n > 2$, $xyz \neq 0$ et $x^n + y^n = z^n$ " est correcte. D'où l'idée de construire, d'une manière autonome et sans aucune référence directe au calcul propositionnel, des formalismes qui chercheraient à exprimer non des propositions, vraies ou fausses, sur les prédicats liés par un système d'axiomes et étendus à un support inconnu d'avance et à éléments non-qualifiés, mais les définitions, correctes ou non, des objets mathématiques ou en relation directe avec la mathématique. Un tel système n'est un système de propositions que d'une manière médiate, toute proposition du système étant de la forme "u est correct", où u est une formule (ces formules sont dites *définitions*) du formalisme considéré. A la base d'un formalisme définitionniste se trouve toujours une certaine intuition de pluralité $\underline{I}$, et c'est le seul "paramètre (qui est donc de nature intuitive préformaliste) dont les systèmes dépendent. Ainsi, à chaque intuition de pluralité $\underline{I}$ correspond son système définitionniste $\underline{D}_I$ et la mathématique $\underline{M}_I$ décrite par ce système. Si $\underline{I}$ est l'intuition de la pluralité finie conçue de la manière habituelle, $\underline{D}_I$ s'appelle le système *kroneckerien* ; si $\underline{I}$ est une intuition de la pluralité au plus dénombrable au sens intuitif, $\underline{D}_I$ s'appelle un système borélien ; si $\underline{I}$ est une intuition de pluralité au plus de "puissance de continu" au sens intuitif, $\underline{D}_I$ s'appelle un système *dédékindien*, etc. Chaque système définitionniste comporte une notion et un critère de *correction* de ses formules [notion analogue à la *vérité* dans les axiomatismes propositionnels et qu'il ne faut pas confondre avec la *bonne construction* des formules], les formules correctes étant caractérisées par un prédicat métamathématique $Corr(x)$, faisant partie d'un système prédicativement défini (au sens de $\underline{I}$) $\underline{\Pi}$ de prédicats étendus aux formules de $\underline{D}_I$ et à certaines formules construites à partir d'elles. $\underline{\Pi}$ comprend d'autres prédicats, entre d'autres le prédicat d'*équivalence* de formules correctes $x \sim y$ dont le sens heuristique est que x et y sont les définitions d'un même objet, et le prédicat d'*appartennance* $x \in y$, dont le sens heuristique est que y est correcte et définit une propriété et que x est correcte et définit un objet possédant la propriété en question. On introduit les objets comme classes de l'équivalence précédente. Ainsi, bien que les objets soient introduits à posteriori, le système définitionniste, basé sur une intuition de pluralité donnée, laquelle demeure le seul élément de rélativité, possède un domaine d'objets parfaitement déterminé ce qui exclut les paradoxes du genre de celui de Skolem. Les relations comme

$x \in y$ peuvent être considérées comme relations entre objets, car elles se trouvent être invariantes par rapport à l'équivalence. Les systèmes définitionnistes satisfont à l'exigence de Lebesgue : tout objet doit être défini. En plus, ces systèmes comportent une *logique*, autrement dit :

α) les *règles de déduction*, qui sont les règles de construction (actuelles au sens de $\underline{I}$) d'une définition à partir d'autres définitions données (satisfaisant, éventuellement, aux conditions de structure convenables), ces règles étant telles qu'on peut prouver, à partir des conditions $\underline{\Sigma}$ caractérisant Π, que la formule construite est correcte dès que toutes les formules de départ le sont ;

β) les *axiomes*, c'est-à-dire l'affirmation de la correction de certaines formules, cette correction étant encore une conséquence de $\underline{\Sigma}$. La non-ambiguité du prédicat $Corr\,(x)$ suffit à prouver la consistence de $\underline{D}$ en tant qu'un système logico-déductif avec cette logique. Si une définition est déductible, elle est, à fortiori, correcte, mais l'inverse n'est pas exact, et la *déductibilité* ne se confond pas avec la *correction*, analogue définitionniste de la *vérité*.

Le partage en couches de l'univers U_I des formules de $\underline{D}_I$ et des formules auxiliaires intervenant dans la définition prédicative de $\underline{\Pi}$ est paramétrisé à l'aide des quadruples (lexicographiquement ordonnés) $\chi = (c, h^*, \mu, h)$ d'orinaux au sens de $\underline{I}$ ($\underline{I}$ étant supposée satisfaire aux conditions données plus haut, permettant d'introduire raisonnablement les ordinaux), satisfaisant à certaines conditions [$\mu < c$, $h^* < h$; si $c = 0$, $h^* = h$]. Dans le système kronéckérien ce sont, d'ailleurs les quadruples d'entiers non-negatifs. La première coordonnée $c(u)$ de la caractéristique $\chi(u) = (c(u), h^*(u), \mu(u), h(u))$ d'une définition u est dite sa *catégorie*. On peut considérer qu'un système définitionniste est constitué par un empilement de catégories successives, chaque catégorie comportant, d'ailleurs, un métalangage à peu près exhaustif au sujet des formules de toutes les catégories antérieures. Les formalismes définitionnistes sont-ils des "théories de types" comme le système de Russel ? A certains égards oui, car on peut, également, attribuer une catégorie à un objet, en appelant ainsi la plus petite catégorie de ses définitions. Mais elle n'est pas une théorie de types au même sens que celle de Russel, car toute propriété p d'un système définitionniste est universelle, autrement dit tout objet x ou bien la possède ($x \in p$), ou bien ne la possède pas ($x \notin p$), et il n'y a qu'un seul type de variable d'objet, laquelle est toujours étendue à tous les objets du système.

III - MATHEMATIQUES.

6 - les diverses écoles ont eu des vues assez variées sur un ensemble de questions comprenant :

1) le rapport des notions de propriété et d'ensemble ;

2) les points de vue d'extension et de compréhension (ou intension) en ce qui concerne les objets mathématiques ;

3) l'existence des propriétés non-achevées et leur statut.

a) L'idée de base de la théorie "naïve" des ensembles est que toute infinité est actuelle, c'est-à-dire que toute propriété a une extension achevée (et est distincte de chaque objet de son extension). Par suite, Cantor confond, en principe (à différence verbale près, car il dit "appartient à" au lieu de "possède") les propriétés et les ensembles. Mais, dans la théorie des cardinaux et ordinaux, Cantor et ses successeurs ont dû ruser avec ces principes, en définissant la puissance d'un ensemble soit comme "objet obtenu de l'ensemble par l'abstraction de la nature de ses éléments", soit comme le mystérieux "objet pA attaché à l'ensemble A tel que $pA = pB$ a lieu si, et seulement si $A \sim B$ ", car, s'ils ne l'avaient pas fait, ils auraient obtenu (en considérant, par exemple, le cardinal 5 comme un ensemble) des propositions comme $5 \in \{5, a, b, c, d\} \in 5$, laquelle est en contradiction avec l'intuition cantorienne d'ensemble. Quand les propriétés paradoxales ont été remarquées, la théorie naïve n'a pas su justifier leur rejet (ni dire exactement ce qu'il faut rejeter), ni dire comment les traiter dans le cas contraire. En plus, l'achèvement de toute collection entraînant que toute condition supplémentaire partageait un ensemble en deux "sous-ensembles" et que, par suite, toute propriété plus large qu'une propriété paradoxale était à rejeter : ainsi, le paradoxe de Russel obligeait, de ce point de vue, à rejeter la propriété d'être un objet ("classe universelle").

b) Le point de vue de Russel est aussi radicalement "actualiste" que celui de la théorie naïve. Mais, pour lui, la notion d'ensemble (qu'il appelle "classe") est, en quelque sorte, plus large que celle de propriété, une collection pouvant "exister comme plusieurs" sans "exister comme un", autrement dit sans qu'on puisse parler de la propriété (considérée elle-même comme un objet) d'être un objet de cette collection. Elle existe "comme un" seulement si elle satisfait aux conditions de la théorie des types. Là, également, si une collection n'existe que "comme plusieurs", toute collection, qui la contient n'a que la même existance mitigée.

c) Dans le point de vue axiomatique, la signification des prédicats est quelque chose de subjectif. Toutefois, depuis Bernays, on a admis, dans l'axiomatique de la théorie des ensembles, des entités, dites *classes* qui se comportent envers le prédicat $x \in y$ comme les collections "n'existant pas comme un" envers la relation $\in$ concrète dans le système de Russel : tandis que les "ensembles" peuvent être substitués dans $x \in y$ aussi bien au lieu de x que de y, les "classes" ne peuvent l'être qu'au lieu de y. D'ailleurs, là aussi, une surclasse d'une classe non-ensemble n'est jamais un ensemble. Ceci suggère la signification suivante à donner à cet axiomatisme : les ensembles et les classes seraient des collections d'objets, dont les ensembles satisfairaient à un certain "prédicat de totalisabilité" (qui remplace les conditions de la théorie de types de Russel). Dans cette interprétation, les ensembles sont considérés comme des collections achevées, quant aux autres classes, rien dans les axiomes n'indique leur statut. Si l'on adopte le point de vue "actualiste", on a une situation analogue à celle du point de vue russelien. Si l'on adopte le point de vue "virtualiste" en posant "achevé" = "totalisable", cela revient à donner aux collections non-achevées une existence mitigée, en ne leur permettant d'avoir ni de ne pas avoir aucune propriété (donc, au fond, d'être un véritable objet), le non-achèvement se traduisant, ainsi, par la différence dans le traitement "externe".

d) Les idées des "pragmatistes" et "réalistes" (E. Borel, Lusin, Denjoy) sont un peu vagues. Il y a une "base extensionnelle", qui vient de l'Analyse classique et est constituée par les ensembles finis, les ensembles dénombrables (quelquefois avec la restriction de l'être "effectivement", ce mot n'ayant pas un sens très précis) et les intervalles de la droite réelle $\underline{R}$. Les ensembles finis et dénombrables sont considérés comme achevés, le caractère des autres "ensembles" étant douteux, et les ordinaux dénombrables (matérialisés par les ensembles bien ordonnés de nombres réels) sont considérés au même titre que les entiers finis. On considère d'autres ensembles (par exemple, mesurables , analytiques, etc.), et quand on analyse leur mode de formation, on s'aperçoit qu'ils sont définis, à partir des "ensembles" de base indiqués, à l'aide d'un langage à formules dénombrables, dont l'alphabet est constitué, en plus des objets de départ, par certaines opérations ensemblistes ($\complement$, $\cap$, $\cup$, projection, produit cartésien, etc.). La logique employée est la logique classique non-formelle, mais avec les doutes sur certains types de raisonnements, comme le procédé diagonal. On peut dire que ce point de vue est assez définitionniste (bien que manquant de rigueur et à possibilités de définition assez étroites), vaguement formaliste en ce qui concerne ses entités, mais non ses modes de raisonnement, ce formalisme étant basé sur l'intuition de pluralité dénombrable, et vaguement virtualiste pour le non-dénombrable, ce virtualisme se manifestant par l'absence de la notion à priori de sous-ensemble et par les doutes existentiels comme, par exemple, celui de Lusin au sujet des ensembles analytiques et projectifs.

e) Pour les intuitionnistes, les seules collections achevées sont les collections finies. Le point de départ pour la formation d'autres objets est la collection (non-achevée) des entiers naturels. On considère, d'abord, les "ensembles" (en réalité, les propriétés virtuelles) de n-uples d'entiers (n = 1,2,.. ; les nombres réels peuvent être considérés comme de tels "ensembles" de couples, qui sont des applications de l'"ensemble" $\underline{N}$ des entiers naturels dans $\{0, 1\}$), les seuls légitimes étant les "ensembles" constructifs, c'est-à-dire tels qu'il est donné un algorithme permettant, pour un n-uple donné, de décider s'il y appartient. De même, on considère les propriétés de tels "ensembles" (qui portent le nom différent d'"éspèces"), qui doivent, également, être "constructifs", c'est-à-dire définis par un "algorithme sur algorithmes". Rien n'empêche de poursuivre. D'autres propriétés ne sont pas admises, mais certaines apparaissent indirectement, car on peut poser, à partir des propriétés données, les questions comportant les quantificateurs. Mais, alors, ce que les intuitionnistes permettent d'appliquer à ces "quasi-propriétés" n'est pas la logique classique, mais celle plus faible, de l'intuitionnisme. Ainsi, finalement, le non-achèvement se traduit, dans l'intuitionnisme, par :

1) la restriction (draconienne) des règles de formation des propriétés ;

2) la restriction des règles de raisonnement. Mais il n'y a aucune limitation dans le traitement externe d'une propriété non-achevée, qui n'existe pas comme "plusieurs", mais (si elle est constructive) existe sûrement comme "un".

6' - Quand on cherche à fonder les mathématiques (ou une de leurs parties) de quelque manière formelle ou non-formelle, en ayant en vue leur signification en tant qu'un système d'objets (au sens le plus large) avec leurs combinaisons, relations, propriétés, on peut rencontrer 3 sortes de doutes existentiels.

a) Il peut y avoir doute quant à l'existence d'objets, considérés isolément, car, dans le cas formel, le système formel employé peut être contradictoire ou irréalisable, et, dans le cas intuitif, l'intuition de signification de ces objets peut ne pas être valable (exemple : théorie naïve des ensembles). Dans le cas formel, on peut lever, dans une certaine mesure, ce doute, en prouvant la consistance du système formel ou, mieux, en construisant pour lui un modèle formalisé, dont on peut prouver l'adéquation. Alors, il ne subsiste qu'un doute purement métaphysique au sujet de la validité des intuitions préformalistes, qui sont à la base du formalisme considéré et, éventuellement, du celui de son modèle, et de celle des méthodes de démonstration métamathématique employés (il n'y a, par contre, que ce dernier doute quand il s'agit de métamathématique, car les formules d'un formalisme sont directement données à partir de l'intuition préformaliste, qui est à sa base).

b) Quand on considère une propriété p en n'ayant aucun doute ni sur l'existence d'objets x pour lesquels on pose la question $x \in p$?, ni sur sa non-ambigüité (autrement dit, on est certain que, pour chacun de ces x, $x \in p$? a une réponse bien déterminée), il peut y avoir des doutes quant à l'"existence comme plusieurs" de la totalité des objets possédant p, autrement dit il peut être impossible, selon l'intuition de pluralité qu'on adopte, de considérer tous ces objets comme coexistant d'une manière séparée. Une priorité non-ambigüe peut, en principe, ne pas avoir d'extension achevée et être, ainsi, virtuelle, mais ce n'est nullement un obstacle à son emploi.

c) Enfin, il se peut qu'un prédicat, exprimable dans le langage (formel ou non) qu'on emploie, soit ambigü (par indétermination ou par contradiction) ou devienne tel (comme, par exemple, celui $R(x) \sim x \notin x$ du paradoxe de Russel) quand on suppose que la collection des objets, qui y satisfont, "existe comme un", autrement dit qu'on puisse considérer ce prédicat comme une propriété, c'est-à-dire un objet du système. Il se peut, également, qu'un prédicat, sans être ambigü, ne soit pas un objet du système, donc n'y existe pas "comme un".

A remarquer que le doute *b*) est sans relation avec le doute *c*). En effet une propriété virtuelle peut parfaitement être non-ambigüe (telle est la propriété d'être un entier naturel dans une mathématique, où achevé = fini), donc exister "comme un" sans exister "comme plusieurs".

Dans le définitionnisme, le doute *a*) est levé (ou transformé en doute métaphysique) en donnant le modèle adéquat (et dont on peut montrer l'unicité) de tout système définitionniste $\underline{D}_I$, basé sur une intuition de pluralité $\underline{I}$ satisfaisant à certaines conditions de régularité. L'idée de ce modèle a été donnée dans l'alinéa précédent, et d'autres précisions seront données plus loin. Ce modèle est formel au sens de $\underline{I}$, et les seuls présupposés métamathématiques (ou, plutôt, métamétamathématiques), qui assurent l'existence de ce modèle et la validité de la démonstration de son adéquation (qui entraîne celle de la consistence de $\underline{D}_I$ en tant que système logico-déductif) sont : la validité de l'intuition $\underline{I}$ et la légitimité de l'application, dans le cas concret considéré, de la logique classique pour l'étude métamathématique d'un système, prédicativement caractérisé au sens de $\underline{I}$, des prédicats sur un univers de formules au sens de $\underline{I}$, délimité par règles de bonne construction formulables à partir de $\underline{I}$.

En ce qui concerne *b*) les systèmes définitionnistes $\underline{D}_I$ sont très "virtualistes". Leurs objets p, qui sont propriétés (toujours universelles : pour objet $\underline{x}$ de $\underline{D}_I$; on a $x \in p$ ou $x \notin p$) sont, en général, virtuelles, autrement dit les objets x tels que $x \in p$ ne forment pas une collection achevée car on considère comme achevées les seules collections d'objets de D_I, qui le sont (ce qui n'a pas toujours lieu) au sens de $\underline{I}$. Ainsi, dans le définitionnisme, l'actualité "mathématique" (celle des collections d'objets) coïncide avec l'actualité "métamathématique" (celle des signes simples dans les formules de son langage). Dès lors, on pourrait, en principe, caractériser la propriété d'être un objet d'une collection donnée achevée au sens de $\underline{I}$ en "énumérant" ces objets comme dans l'écriture habituelle des ensembles finis $\{a, b, c, ..\}$. En réalité, cette expression (qui est bien une formule au sens de $\underline{I}$) ne satisfait pas aux règles de bonne construction de D_I, mais il y a dans D_I des formules à peine plus compliquées et constructibles d'une manière standard à partir de la collection considérée, qui définissent la même propriété. Ainsi, les *propriétés actuelles* ou *ensembles* de D_I peuvent être introduits indifféremment à l'aide de leur "extension" ou à l'aide de leur "compréhension", et toute collection achevée d'objets de D_I est l'extension de quelque ensemble. La métamathématique de D_I comporte un critère d'actualité, car le système $\underline{\Pi}$ prédicativement caractérisé de prédicats, dont il a été question, contient le prédicat $Act(X)$, qui signifie que la formule X est correcte et définit une propriété actuelle.

Quel est le statut des propriétés virtuelles ? D'abord, il n'y a, dans la logique ou dans le critère de correction de $\underline{D}_I$, aucune règle spéciale pour les propriétés actuelles ou virtuelles. Cette logique et ce critère sont uniques, mais le prédicat $Act(x)$, ainsi que le prédicat apparenté $AP(x)$ de l'"actuelle prolongabilité", interviennent, avec les autres prédicats de $\underline{\Pi}$, dans certaines de ces règles. Ainsi, quand on prouve $x \notin x$ pour les propriétés actuelles (ce qui est faux, en général, pour les virtuelles), c'est une conséquence des règles générales et de la structure des définitions satisfaisant à $Act(x)$, mais nullement un axiome spécial pour les propriétés actuelles. Les propriétés virtuelles sont toujours des objets de $\underline{D}_I$, donc "existent comme un" et peuvent posséder d'autres propriétés (et, en particulier, faire partie des collections achevées), ce qui montre qu'il n'y a aucune raison d'identifier les doutes *b*) et *c*) et que le traitement "externe" des propriétés actuelles et virtuelles est le même. On n'impose, non plus, aux propriétés virtuelles aucune condition de constructivité ni aucune restriction dans le maniement logique, ce qui montre combien de telles restrictions sont peu obligatoires et arbitraires. Mais alors, en quoi le comportement des propriétés virtuelles diffère-t-il de celui des propriétés actuelles ? Soit $Q(x)$ un prédicat formé à partir des prédicats primitifs faisant partie de l'alphabet de $\underline{D}_I$. Si p_a est une propriété actuelle et si $C(p_a)$ est la collection (achevée) des objets $x \in p_a$, $Q(x)$ partage $C(p_a)$ en deux sous-collections : $C(p_a)^q$ et $C(p_a)^{\neg q}$, des $x \in p_a$ tels que $Q(x)$ a respectivement les valeurs "vrai" et "faux", et, ainsi, définit une sous-propriété $P_{a,q} = \{ x \in p_a \ ; \ Q(x) = \text{vrai}\}$, et on a $P_{a,q} \notin P_{a,q}$. D'une manière imagée, tout se passe comme si $C(p_a)$ était une tarte, qui est là, toute faite, et $Q(x)$ une sorte de programme pour guider un couteau coupant la tarte en deux morceaux bien déterminés. Prenons le cas opposé extrême, où $p = u$ est la propriété d'être un objet quelconque du système (cette propriété, qui est virtuelle, existe effectivement dans le système). Cette fois, la tarte n'est pas là, mais se forme, en quelque sorte, par couches successives (catégories), et si "$Q(x)$ = vrai" définit une propriété q du système, $Q(x)$ sert non seulement pour "guider le couteau, qui coupe la "tarte", mais, aussi, pour établir les relations de q avec les autres objets (et, en particulier, pour établir la valeur de $Q(x)$ pour $x = q$) ou pour d'autres valeurs de x définies "à la suite de q". Or, q elle-même doit se trouver dans quelque catégorie c, et tant qu'on ne l'atteint pas, $Q(x)$ est, en principe, un programme non-ambigü de "découpage de la tarte". Mais quand la catégorie c en question est atteinte, 2 cas peuvent se présenter :

I) $Q(x)$ permet de déterminer sans ambiguïté la valeur de $Q(q)$ et (en parlant un peu vaguement) ne crée aucune antinomie. C'est, en particulier le cas pour les puissances (au sens de Cantor-Frege), et j'ai découvert une large classe de prédicats, caractérisables par leur structure formelle, qui sont dans le même cas. Les propriétés q, fournies par ces prédicats, sont donc des objets du système, et ces prédicats peuvent être considérés "universellement", c'est-à-dire, pour tout objet x de $\underline{D}_I$, la question $x \in q$? a une réponse non-ambigüe.

II) Soit pour q, soit pour quelque autre objet q' de catégorie $> c$, qui (en parlant vaguement) dépend de q, $Q(x)$ ne permet pas la détermination non-ambigüe de $Q(q')$, soit que toute valeur de cette proposition conduit à une contradiction [c'est le cas du prédicat de Russel $R(x) \sim x \notin x$], soit qu'on peut lui donner une valeur arbitraire [il en est ainsi pour le prédicat "antirusselien" $R(x) \sim x \in x$]. Ainsi, à partir d'une certaine catégorie, on ne peut plus poursuivre le "découpage" avec le "programme" $Q(x)$, soit parce qu'on bute sur une "obstruction", soit parce qu'on arrive dans la situation de l'âne de Buridan. On peut, alors, poursuivre le découpage en changeant de programme, c'est-à-dire en remplaçant, à partir de la catégorie $c, Q(x)$ par un autre prédicat $Q_1(x)$. Si $Q_1(x)$ est encore de l'espèce II), on doit le remplacer, après une certaine catégorie $c_1 > c$, par un autre $Q_2(x)$, etc. Mais si l'on veut exprimer cela dans le formalisme, on ne peut changer de prédicat qu'un nombre actuel de fois. Ainsi, finalement, on doit ou bien tomber sur un prédicat d'espèce I) permettant le découpage de toute la tarte, ou bien être bloqué devant une certaine catégorie c, auquel cas, si l'on ne se permet plus de changer de prédicat, la seule manière de partager toute la tarte est un découpage "horizontal", qui mettrait tout son restant pas encore formé dans un même morceau (d'ailleurs, au choix). Le guidage par une succession actuelle de prédicats peut, en réalité, se remplacer par le guidage par un seul prédicat convenable. Ainsi, finalement, les propriétés de $\underline{D}_I$ (qui sont les objets "à part entière" de $\underline{D}_I$ et, en général, sont virtuelles) ou bien sont équivalentes aux prédicats $Q(x)$ d'espèce I) (autrement dit, dans ce cas, la propriété considérée q est telle que $x \in q \sim Q(x)$ = vrai, ce qui n'est possible que grâce au caractère "universel" de $Q(x)$ dans $\underline{D}_I$), ou bien sont de la forme $Q(x)_c^\xi$, où $Q(x)$ est un prédicat quelconque formable dans $\underline{D}_I$, c est une catégorie arbitraire et ξ est un des signes + ou -, $q = Q(x)_c^\xi$ signifiant que $x \in q \sim Q(x)$ = vrai quand la catégorie de x est $< c$ et qu'on a toujours ou jamais $x \in q$ selon que ξ = + ou - quand la catégorie de x est $> c$. En réalité, le terme "prédicat d'espèce I)" demande à être précisé : il se trouve, en effet, que sans changer la structure de tels prédicats (et, par suite, leur espèce) on peut faire entrer, d'une certaine manière, dans leur (c'est-à-dire comme une partie des instructions de guidage) les prédicats de la forme $Q\,(x)_c^{\xi}$, auquel cas la catégorie de la propriété q équivalente à un tel prédicat "généralisé" d'espèce I) est, en général, le plus grand $c+1$ des prédicats $Q\,(x)_c^{\xi}$, qui entrent dans l'expression du prédicat en question (et O si ce prédicat est libre des $Q\,(x)_c^{\xi}$) bien qu'un prédicat de catégorie plus basse puisse, parfois, réaliser le même partage.

Soit, maintenant, p_v une propriété virtuelle de D_I. Alors, les prédicats $Q\,(x)$ d'espèce I) et les $Q\,(x)_c^{\xi}$, pour les prédicats $Q\,(x)$ quelconques, produisent les "découpages" de la collection non-achevée des $x \in p_v$, autrement dit définissent les sous-propriétés $p_v \cap q$ (où $x \in q \sim Q\,(x) =$ vrai) respectivement $p_v \cap Q\,(x)_v^{\xi}$. Si p_v est *actécatégorique*, c'est-à-dire si la catégorie des $x \in p_v$ est bornée (par quelque ordinal actuel au sens de $\underline{I}$), $Q\,(x)_c^{\xi}$, avec c non-inférieur à la catégorie d'aucun $x \in p_v$ y produit un découpage indépendant de c et le même que celui produit par $Q\,(x)$. Ainsi, tout prédicat $Q\,(x)$ de $\underline{D_I}$ peut guider le découpage complet d'une propriété actocatégorique. Par contre, si p_v n'est pas actocatégorique, il y a, parmi les $p \cap Q\,(x)_c^{\xi}$, des découpages effectivement "tronqués", inégaux à aucun découpage non-tronqué. Ainsi, d'une manière immédiate, il y a une différence de comportement "interne" entre les propriétés actocatégoriques (comprenant les propriétés actuelles) et les autres. Mais dans $\underline{D_I}$, pour toute propriété p, il existe la propriété 2^p d'être une sous-propriété de p ($x \in 2^p \sim x \subseteq p \sim [y \in x \longrightarrow y \in p]$), et 2^p est actocatégorique (et même, pour certaines $\underline{I}$, actuelle) si p est actuelle, et n'est jamais actocatégorique si p est virtuelle, ce qui est une différence plus indirecte de comportement interne entre les propriétés actuelles et virtuelles.

$Q\,(x)$ étant un prédicat quelconque de $\underline{D_I}$, si l'on le place en dehors du système, c'est-à-dire si l'on le considère comme prédicat métamathématique, il produit un découpage total du domaine des objets de $\underline{D_I}$. Rien n'empêche de ramener de tels découpages (à moins qu'ils n'y soient déjà, étant réalisés par quelque "vraie" propriété de $\underline{D_I}$) dans la mathématique, et ceci sans risque des contradictions, pourvu que ce soit à titre de "collection n'existant pas comme un" uniquement. Mais l'utilisation de cette opération (analogue à l'introduction des "classes" par Bernays) est douteuse, car on ne peut véritablement opérer avec ces "objets" factices. Le définitionnisme les laisse là, où est leur place véritable dans la métamathématique.

Après ce préambule, on va donner une idée un peu plus précise du formalisme du système kroneckerien ("actuel" = "fini"), en effleurant aussi ceux des autres systèmes définitionnistes. On commence par la catégorie 0.

Catégorie 0

1 <u>Alphabet</u>.

Il est formé de 4 sortes de signes :

A. Signes *nodaux* : $*$, $\bullet$, . ;

B. Signes de *jonction* : $\in$, $\notin$, $\swarrow$, $\searrow$, $\equiv$, $\not\equiv$, $\smile$

C. Signes-*types* : $(a,\ )$, $(v,\ )$, (v,v), $(\ ,v)$, $(\ ,a)$, I ;

D. Signes-*individus* : ce sont des signes arbitraires d'origine extra-logique, ne coïncidant avec aucun des signes précédents ni avec ceux, qui font partie de l'alphabet des catégories supérieures. On exige que la collection de ces signes (appelés *individus*) ne soit pas actuelle au sens de I (en particulier, ne soit pas finie dans le cas kroneckerien) et, ceci avec un sens restreint suivant : si f est une formule arbitraire de $\underline{D_I}$, on peut trouver un signe-individu, dont aucun exemplaire n'entre dans la formule considérée $\underline{f}$.

2. <u>Schémas de bonne construction</u>.

Ce sont les *arbres* actuels et sans branches infinies où les signes de l'alphabet sont à placer selon certaines règles.

Dans le cas kroneckerien, il s'agit d'arbres *finis*. Un arbre fini est un système connexe de segments en nombre fini, accolés par leurs bouts, où il n'y a aucun chemin fermé et où on distingue un noeud, dit la *racine*. Pour tout noeud, il existe un et un seul chemin le reliant avec la racine, et le nombre des segments de ce chemin est dit la *hauteur* de ce noeud. On appelle la *hauteur* d'un arbre le maximum des hauteurs de ses noeuds. Si l'on considère un segment, celui de ses deux noeuds dont la hauteur est plus grande est dit le *successeur* ou le *fils* de l'autre, qui est dit son *prédécesseur* ou *père*, et le segment est dit *issu* de ce dernier. Un noeud, qui n'a aucun fils, est dit une *extrémité*. Un arbre est dit un *dendrite* si sa racine a un et un seul fils. Une partie de l'arbre est dite un *sous-arbre* si elle est formée de tous les segments tels que les chemins, qui les relient à la racine, passent par quelque noeud fixe ν, lequel est considéré comme la racine de ce sous-arbre. Un sous-arbre de A est dit *immédiat*, si sa racine est un fils de celle de A. Un dendrite n'a qu'un seul sous-arbre immédiat. Toute partie d'un arbre A, contenant sa racine, et qui est elle-même un arbre, est dite un *coeur* de A. On appelle *dendrite de A* la partie de A, constituée par un segment issu de sa racine et par le sous-arbre immédiat, dont la racine est l'autre extrémité de ce segment.

Dans le cas général, on appelle *préarbre actuel* tout système connexe actuel (au sens de $\underline{I}$) de segments accolés par leurs bouts, à racine distinguée et sans chemins fermés. Dans un tel système, un noeud quelconque est relié à la racine par un et un seul chemin, qui ne comporte qu'un nombre fini de segments (car autrement le système n'aurait pas été connexe). Dès lors, on peut définir, comme précédemment, la hauteur d'un noeud, les notions de père, de fils (d'ailleurs, un fils a un seul père, tandis qu'un père peut avoir une collection actuelle quelconque de fils), de segment issu d'un noeud, d'une extrémité et d'un coeur du préarbre A. Un préarbre est dit un *arbre* si, en plus, chacun de ses coeurs a au moins une extrémité. Ceci implique qu'il n'y a, dans l'arbre, aucun chemin infini. En effet, s'il y en avait un, on pourrait le compléter de manière qu'il passe par la racine et, en gardant une moitié infinie commençant à la racine de ce chemin, on aurait un coeur sans extrémité (l'inverse peut être prouvé aussi si l'on admet l'axiome de Zermelo dénombrable). La notion d'arbre étant définie, celles de dendrite, de sous-arbre et de sous-arbre immédiat se définit comme précédemment. La hauteur des arbres se définit différemment: sous les hypothèses qu'on fait sur l'intuition de pluralité I, on peut montrer qu'il est possible de trouver, pour tout arbre A, une collection actuelle bien ordonnée Λ telle qu'il existe une application (d'ailleurs unique) $\nu \longrightarrow \lambda(\nu)$ de la collection $N(\Lambda)$ des noeuds ν de A sur Λ de manière que : 1) $\lambda(\nu)$ soit le plus petit élément de Λ si, et seulement si ν est une extrémité ; 2) si ν n'est pas une extrémité, $\lambda(\nu)$ soit le plus petit élément de ν strictement supérieur à tous les $\lambda(\nu')$, où ν' est un fils quelconque de ν. Alors, la *hauteur* $h(A)$ de A est la collection ordonnée précédente Λ considérée à similitude près (car, visiblement, de telles Λ sont toutes semblables), autrement dit on pose $h(A) = h(B)$ quand leurs représentants Λ, Λ' sont des collections ordonnées semblables, et on pose $h(A) < h(B)$ si Λ est semblable à un intervalle initial de Λ'. Visiblement, la hauteur d'un arbre est strictement supérieure à celle de tout son sous-arbre immédiat.

On place les signes de l'alphabet selon les règles suivantes :

a) $*$ est placé sur la racine ;

b) $\bullet$ et . sont placés arbitrairement sur les autres noeuds ;

c) Chaque segment porte un (et un seul) des signes $\in$, $\notin$, $\swarrow$, $\searrow$. Les segments issus d'un même noeud ou bien portent tous les signes $\in$, $\notin$ (auquel cas le noeud est dit un *noeud-propriété*), ou bien portent tous $\swarrow$ et $\searrow$ (auquel cas il est dit un *noeud couple*). Dans ce dernier cas, il y a au plus 2 segments issus de ce noeud, et ils portent des signes $\swarrow$ et $\searrow$ différents (si un noeud est une extrémité, il est dit *noeud-individu* ; un arbre est dit *définition-prorpriété*, *définition-couple* ou *définition-individu* selon le type de sa racine) ;

d) $\smile$ relie certains segments issus d'un même noeud muni de ., deux segments de cette sorte étant reliés par un seul arc $\smile$ au plus.

e) Il est permis de placer auprès d'un noeud-propriété un au plus des signes $(a,\ )$, $(v,\ )$; (v, v), $(\ , v)$, $(\ , a)$;

f) Il est permis de placer, auprès d'une extrémité, des exemplaires des signes-individus (il peut y avoir plusieurs exemplaires d'un même signe), dont la collection doit être actuelle. Chacun de ces signes-individus doit être relié à l'extrémité en question par un des signes $=$, $\neq$;

g) Il est permis de placer, auprès d'une extrémité, le signe I ;

h) Il est permis de placer le signe $\neq$ entre deux frères (fils d'un même père) à condition qu'ils ne portent pas tous les deux $\bullet$.

Un dendrite D d'une définition-propriété A et, également, le sous-arbre immédiat C de ce dendrite seront dits $(\bullet, \in)$ -, $(\bullet, \in)$ -, $(., \in)$ -, $(., \notin)$ - dendrite ou sous-arbre immédiat de A selon que le segment de ce dendrite issu de la racine porte $\in$ ou $\notin$ et le fils de sa racine porte $\bullet$ ou . ; un arbre est dit un $\bullet$ - arbre si tous les fils de sa racine portent $\bullet$.

3. Exemples des définitions de catégorie • :

Voici quelques arbres (tous corrects) de catégorie O du système kroneckerien, ainsi que leurs "traductions françaises", qui donnent l'idée de la signification qu'on veut leur donner.

Voici les énoncés verbaux ("traductions françaises") $L_A(x)$ correspondant aux arbres A :

Figure 1 : L'individu x coïncidant avec a. Figure 2 : La propriété x que possède tout objet coïncidant avec a, et que possède tout objet coïncidant avec b, et que possède tout objet coïncidant avec c, et que ne possède aucun objet distinct de a, distinct de b et distinct de c. Figure 3 : La propriété x que ne possède aucun objet coïncidant avec a, et que ne possède aucun objet coïncidant avec b, et que ne possède aucun objet coïncidant avec c, et que possède tout objet distinct de a, distinct de b et distinct de c. Figure 4 : La propriété x que ne possède aucun objet. Figure 5 : La propriété x que possède tout objet. Figure 6 : Le couple x tel qu'il existe un objet coïncidant avec a qui est son origine (départ), et qu'il existe un objet coïncidant avec b qui est sa fin (arrivée). Figure 7 : La propriété x que possède toute propriété que ne possède aucun objet (c'est-à-dire l'ensemble vide), et que possède toute propriété telle qu'il existe un objet qui la possède (c'est-à-dire toute propriété non vide), et que ne possède aucun couple (tel qu'il existe un objet, qui est son origine [c'est une tautologie impossible à éviter]), et que ne possède aucun individu. Figure 8 : La propriété x que ne possède pas l'ensemble vide (abréviation), et que ne possède aucune propriété non vide (abréviation), et que possède tout couple (abréviation) et que ne possède aucun individu. Figure 9 : La propriété que ne possède pas l'ensemble vide, et que ne possède aucune propriété non vide, et que ne possède aucun couple, et que possède tout individu. Figure 10 : La propriété que possède l'ensemble vide, et que possède toute propriété actuelle non-vide, et que ne possède aucune propriété virtuelle (non vide [tautologie, inévitable]), et que ne possède aucun couple, et que ne possède aucun individu. Figure 11 : La propriété que ne possède pas l'ensemble vide, et que ne possède aucune propriété actuelle non vide, et que possède toute propriété virtuelle, et que ne possède aucun couple, et que ne possède aucun individu. Figure 12 : La propriété que ne possède pas l'ensemble vide, et que possède toute propriété (non vide [tautologie inévitable]) à complément actuel, et que ne possède aucune propriété non vide à complément virtuel, et que ne possède aucun couple et que ne possède aucun individu. Figure 13 : La propriété x que possède toute propriété telle qu'il existe un objet, qui la possède, et qu'il existe un objet distinct du précédent, qui la possède, et que ne la possède aucun objet distinct des précédents ; et que ne possède pas l'ensemble vide ; et que ne possède aucune propriété telle qu'il existe un objet, qui la possède, et que ne la possède aucun objet distinct du précédent ; et que ne possède aucune propriété telle qu'il existe un objet, qui la possède, et qu'il existe un objet, distinct du précédent, qui la possède, et qu'il existe un objet distinct des précédents, qui la possède ; et que ne possède aucun couple ; et que possède aucun individu. Figure 14 : La propriété x que possède toute propriété telle qu'il existe un objet, qui la possède, et qu'il existe un objet distinct du précédent, qui la possède, et qu'il existe un objet distinct des précédents, qui la possède, et que ne la possède aucun objet distinct des précédents ; et que ne possède pas l'ensemble vide ; et que ne possède aucune propriété telle qu'il existe un objet, qui la possède, et qu'il existe un objet, qui la possède, et que ne la possède aucun objet distinct des précédents ; et que ne possède aucune propriété telle qu'il existe un objet, qui la possède, et qu'il existe un objet distinct du précédent, qui la possède, et qu'il existe un objet distinct des précédents, qui la possède, et qu'il existe un objet, distinct des précédents, qui la possède ; et que ne possède aucun couple, et que ne possède aucun individu. Figure 15 : La propriété que possède toute propriété telle qu'il existe une propriété qui la possède que ou bien ne possède aucun objet, ou bien a possède et le possède ; et que ne possède aucune propriété que ne possède pas l'ensemble vide et que ne possède aucune propriété que a possède et que le possède et que ne possède aucun couple ; et que ne possède aucun individu.

4. Critère de correction dans la catégorie 0.

A étant un arbre de catégorie 0, on remarque en lisant l'énoncé, qui en est la traduction, qu'au fond ce que cet arbre exprime est un prédicat $L_A(x)$ à une seule variable libre, formé à partir des prédicats élémentaires $x \in y$ $x \notin y$, $x = y$, $x \neq y$, $x \swarrow y$ ("x est l'origine du couple y"), $x \searrow y$ ("x est la fin du couple y"), $\underline{Act}(x)$, $\underline{Virt}(x)$, $\underline{Act}(\complement x)$, $\underline{Virt}(\complement x)$, $\underline{Ind}(x)$, qui correspondent aux signes simples $\in$, $\notin$, $=$, $\neq$, $\swarrow$, $\searrow$, $(a,\ )$, $(v,\ )$ $(\ ,a)$, $(\ ,v)$ [à (v,v) correspond $\underline{Virt}(x)$ & $\underline{Virt}(\complement x)$], J, auxquels il faut ajouter $\underline{Pr}(x)$ ("x est une propriété") et $\underline{Cp}(x)$ ("x est un couple"). Ce prédicat est destiné, en principe à caractériser un *unique* objet x par les conditions qu'il contient, et, heuristiquement parlant, il est à considérer comme correct (ainsi que l'arbre A) s'il atteint ce but. Je ne veux pas introduire le critère de correction d'une manière dogmatique ni, même, complète, mais montrer, dans des cas simples, qu'en précisant l'idée heuristique formulée, il est possible de déterminer complètement ce critère.

Fig. 1 - Individu a.

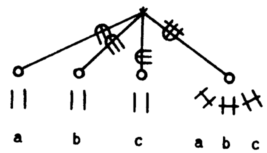

Fig. 2 - Ensemble $\{a, b, c\}$.

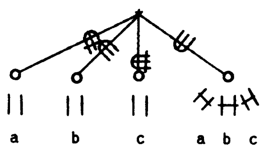

Fig. 3 - Anti ensemble $\overline{\{a, b, c\}}$.

Fig. 4 - Ensemble vide ϕ.

Fig. 5 - Notion d'objet (classe universelle, la propriété d'être un objet).

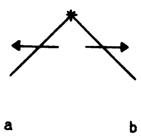

Fig. 6 - Couple (ordonné) (a, b).

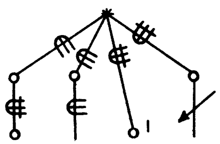

Fig. 7 - Notion de propriété. (Propriété d'être une propriété).

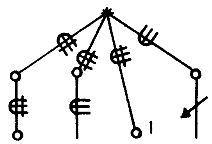

Fig. 8 - Notion de couple.

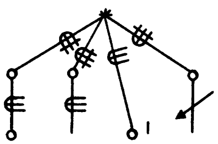

Fig. 9 - Notion d'individu.

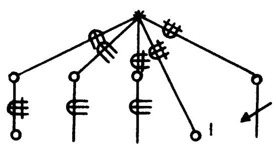

Fig. 10 - Notion d'ensemble (ou de propriété actuelle).

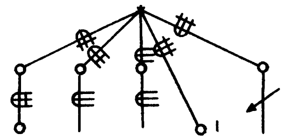

Fig. 11 - Notion de propriété virtuelle.

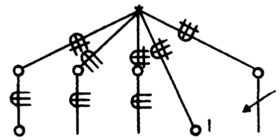

Fig. 12 - Notion d'anti-ensemble.

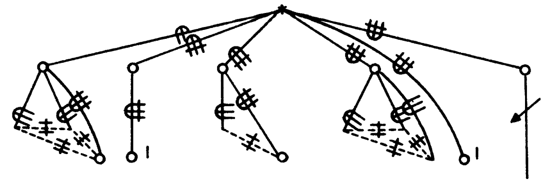

Fig. 13 - Nombre cardinal 2.

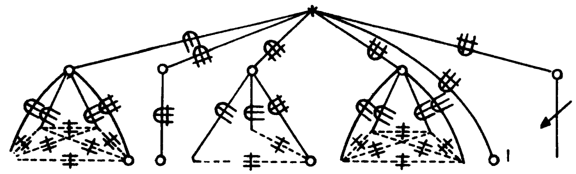

Fig. 14 - Nombre cardinal 3.

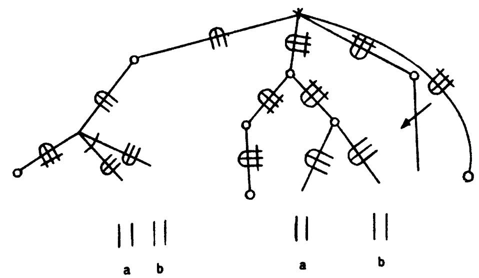

Fig. 15 - Propriété p que possède une propriété q telle que $\phi \in q$ ou $\{a, b\} \subseteq q$.

Pour simplifier les choses, nous nous bornerons aux formules d'un système analogue plus étroit, d'où seraient exclus les prédicats $x \swarrow y$, $x \searrow y$, $\underline{Act}\,(x)$, $\underline{Virt}\,(x)$, $\underline{Act}\,(\complement x)$, $\underline{Virt}\,(\complement x)$, ainsi que tout emploi de $\neq$ sauf pour relier quelque extrémité à quelque signe-individu.

Dès lors, A étant un arbre de hauteur $h > 0$ du système ainsi restreint, on a $L_A(x) = \underset{i}{\&}\, L_{A_i}(x)$, ou A_i parcourt les dendrites de A. Si B est le sous-arbre immédiat d'un dendrite de A, on a, selon le caractère de ce dendrite :

$$\begin{array}{l} (\bullet, \in) \\ (\bullet, \notin) \\ (., \in) \\ (., \notin) \end{array} \qquad L_A(x) = \left\{ \begin{array}{l} (\forall y)\ [L_B(y) \longrightarrow y \in x] \\ (\forall y)\ [L_B(y) \longrightarrow y \notin x] \\ (\exists y)\ [L_B(y)\ \&\ y \in x] \\ (\exists y)\ [L_B(y)\ \&\ y \notin x] \end{array} \right.$$

En particulier, si l'on suppose que x est une propriété, les conditions sur x, exprimées par les 4 dendrites avec un même sous-arbre immédiat B se partagent en deux couples de conditions opposées, la condition opposée à $L_A(x)$ (où A est un dendrite) est $L_{\bar{A}}(x)$ où $\bar{A}$ s'obtient de A en changeant, sur le segment issu de sa racine, $\in$ n $\notin$ (et vice-versa) et $\bullet$ en . (et vice-versa), sans toucher à B.

Ainsi, si $h(A) > 0$, A étant dans le système restreint, $L_A(x)$ est une conjonction de conditions implicatives ou existentielles au sujet de la possession ou de la non-possession d'une propriété x par les objets y satisfaisant à certaines conditions. D'une manière provisoirement heuristique, A sera dit *contradictoire* s'il est impossible de satisfaire aux conditions précédentes (en considérant $\in x$ et $\notin x$ comme des purs symboles attachés à certains objets y) sans avoir, pour quelque objet y, à la fois $y \in x$ et $y \notin x$, et, dans le cas contraire, A sera dit *non-contradictoire*. Et un arbre A non-contradictoire sera dit *correct* (ou *complet*) si $L_A(x)$ impose à tout objet y une des relations $y \in x$ ou $y \notin x$.

Si $h(A) = 0$, la racine de A est reliée par les signes $=$, $\neq$ à certains signes-individus et peut, éventuellement, porter I. A est non-contradictoire si tous les signes-individus reliés à sa racine par $=$ coïncident, et si aucun signe-individu n'est relié à sa racine par $=$ et par $\neq$ à la fois. Et un tel A est correct si, et seulement si sa racine est reliée par $=$ à quelque signe-individu.

Donnons à ces notions heuristiques un sens plus précis. Supposons qu'on a un modèle $\underline{M}$ du système, autrement dit une collection d'objets (ne comportant d'autres individus que ceux du système) sur laquelle tous les prédicats élémentaires qu'on a cités soient "matérialisés" par des relations de même dimensions, satisfaisant aux conditions :

$$\underline{Ind}(x) \longrightarrow (\forall y)\ [\neg\, y \in x \quad \& \quad \neg\, y \notin x \quad \& \quad \neg\, y \swarrow x \quad \& \quad \neg\, y \searrow x]$$

$$\underline{Pr}\ (x) \longrightarrow y \in x \ \mathrm{v}\ y \notin x \qquad\qquad (\exists y)\ [y \in x] \longrightarrow Pr\ (x)$$

$$\underline{Pr}\ (x) \longrightarrow \neg\,(y \in x \quad \& \quad y \notin x) \qquad\qquad (\exists y)\ [y \notin x] \longrightarrow Pr\ (x)$$

$$\underline{Pr}\ (x) \quad \& \quad Pr\ (y) \longrightarrow \{(\forall z)\ [z \in x \longleftrightarrow z \in y] \longrightarrow x = y\}$$

$$\underline{Cp}\ (x) \longrightarrow (\exists y)\ (y \swarrow x) \qquad\qquad (\exists y)\ [y \swarrow x] \longrightarrow Cp\,(x)$$

$$\underline{Cp}\ (x) \longrightarrow (\exists z)\ (z \searrow x) \qquad\qquad (\exists z)\ [z \searrow x] \longrightarrow Cp\,(x)$$

$$y \swarrow x \quad \& \quad z \swarrow x \longrightarrow y = z$$

$$y \searrow x \quad \& \quad z \searrow x \longrightarrow y = z$$

$$y \swarrow x \quad \& \quad y \swarrow x' \quad \& \quad z \searrow x \quad \& \quad z \searrow x' \longrightarrow x = x'$$

$$\underline{Virt}(x) \longrightarrow Pr\ (x) \quad \& \quad (\forall n)\ [(\forall y_1) \ldots (\forall y_n)[y_1 \in x \quad \& \ldots \& \quad y_n \in x \longrightarrow (\exists y_{n+1}) \\ (y_{n+1} \in x \quad \& \quad y_1 \neq y_{n+1} \quad \& \ldots \& \quad y_n \neq y_{n+1})]]$$

$$y = \complement x \longleftrightarrow Pr\,(x) \quad \& \quad Pr\,(y) \quad \& \quad [z \in x \longleftrightarrow z \notin y]$$

$$(\exists I)[\underline{Ind}\,(x) \sim x \in I) \qquad \underline{Virt}\ (I) \qquad \underline{Ind}(I)\ \mathrm{v}\ \underline{Cp}\ (x)\ \mathrm{v}\ \underline{Prop}\,(x)$$

$$\neg\,[\underline{Cp}\ (x) \quad \& \quad \underline{Pr}\ (x)]$$

auxquelles les prédicats correspondants satisfont selon l'intuition habituelle. Alors, la valeur de $L_B(y)$ et les notions précédentes de non-contradiction prennent, sur le modèle $\underline{M}$, un sens non ambigü.

Le modèle précédent $\underline{M}$ sera dit *adéquat* s'il satisfait aux conditions suivantes :

1) il existe des objets ξ du modèle satisfaisant à $L_A(x)$ si, et seulement si A est non-contradictoire ;

2) il n'existe qu'un seul objet de cette sorte, si et seulement si A (supposé non contradictoire) est correct. On fera l'hypothèse que le système kroneckérien (et, en particulier, sa catégorie 0) *possède un modèle adéquat*, et on va montrer (dans des cas simples) que cette hypothèse détermine la forme des critères de non-contradiction et de correction.

Supposons que A est un $\bullet$-arbre, et que $B_1, B_2, \ldots, B_s$ et $B_1', B_2', \ldots, B_t'$ soient ses $(\bullet, \in)$-, resp. $(\bullet, \notin)$-sous-arbres immédiats. Alors, $L_A(x) \sim \{ \underset{i}{\&} (\forall y) [L_{B_i}(y) \longrightarrow y \in x]\} \ \& \ \{ \underset{j}{\&} [(\forall y) [L_{B'_j}(y) \longrightarrow y \notin x]]\}$ est satisfaite si, et seulement si l'on attache $\in x$ à tous les objets y de $\underline{M}$, qui satisfait à la "matérialisation" de $\underset{i}{\mathrm{V}} \ L_{B_i}(y)$ et $\notin x$ à tous ceux, qui satisfont à celle de $\underset{j}{\mathrm{V}} \ L_{B'j}(y)$, en attachant ce que l'on veut ou rien du tout à ceux qui ne satisfont à aucun de ces deux prédicats. Et il existe une manière d'attacher les $\in x$ ou $\notin x$ aux y de $\underline{M}$ telle que $\in x$ et $\notin x$ ne soient jamais attachés à un même y si et seulement s'il n'existe aucun y de $\underline{M}$ satisfaisant à la fois à un $L_{B_i}(y)$ et à un $L_{B'_j}(y)$. Mais, si $B, C, D, \ldots$ sont des arbres et si $\mathfrak{A}\,(B, C, D, \ldots)$ est l'arbre dit l'*accolement* des $B, C, D, \ldots$, obtenu en accolant $B, C, D, \ldots$ par leurs racines, on a, visiblement, $L_{\mathfrak{A}(B,C,D,\ldots)}(y) \sim L_B(y) \ \& \ L_C(y) \ \& \ L_D(y) \ \& \ldots$ Par suite, A est non contradictoire si, et seulement si, pour tous $i = 1,2 \ldots, s$ et $j = 1,2,\ldots,t$, il n'existe aucun objet y de $\underline{M}$ satisfaisant à $L_{\mathfrak{A}(B_i, B'_j)}(y)$. Mais, comme le modèle $\underline{M}$ est adéquat, ceci a lieu si, et seulement si tous ces $\mathfrak{A}\,(B_i, B'_j)$ sont contradictoires. Ainsi, un tel *A est non-contradictoire si, et seulement si tout accolement d'un de ses $(\bullet, \in)$-sous-arbres immédiats et d'un de ses $(\bullet, \notin)$-sous-arbres immédiats est contradictoire*, ce qui, vu que la hauteur de tous ces accolements est inférieure à celle de A réduit la question de la non-contradiction d'un tel A à celle de la non contradiction des arbres de hauteur plus petite.

Le $\bullet$-arbre A étant non contradictoire, il est correct si, et seulement si $L_A(x)$ impose à tout objet y de $\underline{M}$ une et une seule des relations $y \in x$ ou $y \in x$, autrement dit si tout y de $\underline{M}$ satisfait à $\underset{i}{\mathrm{V}} \ L_{B_i}(y)$, où B_i parcourt les sous-arbres immédiats de A ; ceci a lieu si, et seulement si aucun y de $\underline{M}$ ne satisfait à $\underset{i}{\&} [\neg \ L_{B_i}(y)]$. Mais si B est un arbre-propriété, et si D_{ij} sont ses dendrites (où i a la seule valeur 1 quand B est un $\bullet$ - sous-arbre de A et où les D_{ij} avec un même i sont liés par un arc quand B est un . - sous arbre de A), on a $L_B(y) = \underset{i}{\mathrm{V}} \ (\underset{j}{\&} \ L_{D_{ij}}(y))$, d'où :

$$\neg L_B(y) = \underset{i}{\&} \ (\underset{j}{\mathrm{V}} \ \neg \ L_{D_{ij}}(y)) \ \mathrm{V} \ (\neg \ \underline{Pr}(y)) = \underset{i}{\&} \ (\underset{j}{\mathrm{V}} \ L_{\overline{D_{ij}}}(y)) \ \mathrm{V} \ (\neg \ \underline{Pr}(y)) =$$

$$= \underset{(j_1,j_2,\ldots,j_s)}{\mathrm{V}} \ \underset{i}{\&} \ L_{\overline{D_i j_i}}(y) \ \ \mathrm{V} \ \underline{Ind}(y) \ \mathrm{V} \ \underline{Cp}(y) = \underset{(j_1,j_2,\ldots,j_s)}{\mathrm{V}} \ L_{\mathfrak{A}(\overline{D_{1,j_1}}, \overline{D_{2,j_2}}, \ldots, \overline{D_{s,j_s}})}(y) \ \mathrm{V}\, Ind\,(y) \ \mathrm{V}\, Cp\,(y).$$

Appelons *complément* de B la collection $K(B) = \{\mathfrak{A}(D_{1,j1}, \bar{D}_{2,j2}, \ldots, \bar{D}_{s,js})\} \ \mathrm{V} \{Cp, Ind\}$, formée par tous les arbres précédents $^{-}(\bar{D}_{1,j1}, \bar{D}_{2,j2}, \ldots, \bar{D}_{s,js}$ et par deux arbres fixes, faciles à former, Cp et Ind, tels que $L_{Cp}(y)$ et $L_{Ind}(y)$ expriment respectivement que y est un couple ou individu quelconque. Alors, on a $\neg \ L_B(y) \sim \underset{C \in \underline{K}(B)}{\mathrm{V}} \ L_C(y)$. Par suite, si l'on appelle *incomplétant* de A la collection $\underline{Inc}(A)$ de tous les accolements $\mathfrak{A}\,(C', C'', \ldots, C^{(s)})$, où $B', B'', \ldots, B^{(s)}$ sont tous les sous-arbres immédiats de A et où $C^{(2)}$ est un arbre quelconque de la collection $K(B^{(2)})$ [$Inc(A)$ est une collection finie si l'intuition du fini est telle que le produit cartésien d'un nombre fini de collections finies est fini, auquel cas on dira qu'il s'agit d'un fini *régulier*], on a :

$$\neg \left[\underset{i}{\mathrm{V}} \ L_{B^{(i)}}(y) \right] \sim \underset{i}{\&} \ [\neg \ L_{B^{(i)}}(y)] \sim \underset{i}{\&} \left[\underset{C \in \underline{K}(B^{(i)})}{\mathrm{V}} \ L_C(y) \right] \sim \underset{D \in Inc(A)}{\mathrm{V}} \ L_D(y)$$

(la démonstration de la dernière équivalence semble exiger l'emploi de l'axiome de choix fini, mais on peut l'éviter par une légère modification de la définition de $Inc(A)$). Ainsi, il n'existe aucun y satisfaisant à $\neg \ [\underset{i}{\mathrm{V}} \ L_{B^{(i)}}(y)]$ si, et seulement si, pour tout D faisant partie de $Inc(A)$, il n'existe aucun y de $\underline{M}$ satisfaisant à $L_D(y)$, autrement dit, puisque $\underline{M}$ est adéquat, *un $\bullet$-arbre non contradictoire A est correct si, et seulement si tout arbre D de son incomplétant est contradictoire.*

Ainsi, la non-contradiction et la correction des $\bullet$-arbres sont réduites à celles des arbres (quelconques) de hauteurs (donc aussi de caractéristiques) plus petites. Si A est un arbre -propriété quelconque, soient $A^{(\bullet,\in)}$ et $A^{(\bullet,\notin)}$ les accolements de ses $(\bullet, \in)$- et de ses $(\bullet, \notin)$-dendrites et

$A^\bullet = \mathfrak{A}\,(A^{(\bullet,\in)}, A^{(\bullet,\notin)})$, autrement dit l'accolement des $\bullet$-dendrites de A. Si A est non contradictoire, $A^\bullet$ l'est *a fortiori*. A' étant un $(\bullet, \notin)$-dendrite de A et B étant son sous-arbre immédiat, la non contradiction de A implique qu'on puisse attacher $\notin x$ à quelque objet y de $\underline{M}$ satisfaisant à "$L_B(y)$" et auquel on n'attache pas, en même temps, $\in x$, ce qui exige que cet y ne satisfasse, sur le modèle, à aucune condition exprimée par quelque sous-arbre immédiat de $A^{(\bullet,\in)}$; autrement dit cet y doit satisfaire à quelque "$L_D(y)$", où D est un des arbres de $\underline{Inc}\,(A^{(\bullet,\in)})$, et, le modèle étant adéquat, la non contradiction de quelque $\mathfrak{A}\,(B, D)$ de cette forme est nécessaire à celle de A. On a des conditions analogues [en remplaçant $\underline{Inc}\,(A^{(\bullet,\in)})$ par $\underline{Inc}\,(A^{(\bullet,\notin)})$] pour les sous-arbres immédiats des $(.,\in)$-dendrites. Ces conditions étant supposées satisfaites A sera non contradictoire si, pour chaque $(.,\in)$-dendrite $\tilde{A}_i$ et pour chaque $(.,\notin)$-dendrite $\tilde{A}'_j$ de A, il est possible de trouver un objet y_j respectivement y'_j de $\underline{M}$ satisfaisant à un des $L_{\mathfrak{A}(B,D)}(y)$ [où B est le sous-arbre immédiat du dendrite et D un des arbres de $\underline{Inc}\,(A^{(\bullet,\notin)})$ respectivement $\underline{Inc}\,(A^{(\bullet,\in)})$] de manière que tout y_i soit distinct de tout y'_j (car, autrement, un même $y_i = y'_j$ devrait porter $\in x$ et $\notin x$)] ;. On dira qu'un arbre est *actuellement prolongeable* s'il existe un nombre fini (pouvant être 0) seulement d'objets de $\underline{M}$ satisfaisant à $L_A(x)$. Le prédicat (métamathématique) de l'*actuelle prolongabilité* $\underline{AP}\,(x)$ se caractérise prédicativement : en effet, du moins si le fini considéré est régulier, A est actuellement prolongeable si, et seulement s'il y a un nombre fini de manières de ranger en deux classes, à l'aide des définitions de catégorie 0, la collection des objets y de $\underline{M}$ pour lesquels $L_A(x)$ n'impose aucune des relations $y \in x$ ou $y \notin x$, autrement dit, à un nombre fini d'exceptions près, la collection des y satisfaisant à $\mathrm{V}\ L_D(y)$, où D parcourt $\underline{Inc}\,(A^\bullet)$ et ceci a lieu si, et seulement si, pour tout D de $\underline{Inc}\,(A^\bullet)$, il n'y a qu'un nombre fini de y (de $\underline{M}$) satisfaisant à $L_D(y)$. Ainsi, un arbre A est actuellement prolongeable si, et seulement si tous les arbres de $\underline{Inc}\,(A^\bullet)$ le sont. Revenant aux $(.,\in)$-dendrites, $\tilde{A}_i$ et $\tilde{A}'_j$ de A, on voit que si, pour un de ces dendrites, quelque $\mathfrak{A}\,(B, D)$ [dont la hauteur est, visiblement, $\leqslant h\,(A) - 1 \leqslant h\,(A)$] est virtuellement (c'est-à-dire non actuellement) prolongeable, on peut toujours choisir y_i ou y'_j correspondant distinct de tous les autres y_i et y'_j ; et, sinon, cet y_i ou y'_j est à choisir dans une collection finie Y_i respectivement Y'_j. Sans entrer en détails, on constate que la non contradiction de A depend de la possibilité d'un choix, satisfaisant à certaines conditions, dans certaines collections finies d'arbres corrects d'hauteur $< h\,(A^\bullet)$. Le même arbre A, supposé non contradictoire, est correct si, et seulement si le choix (possible par hypothèse) de forme considérée des y_i et des y'_j n'est possible que d'une seule manière.

Deux définitions correctes A et B seront dites *équivalentes* (notation : $A \sim B$) si les objets a et b de $\underline{M}$ satisfaisant à $L_A(x)$ respectivement $L_B(x)$ sont les mêmes. Or, si $a \neq b$, aucun objet de $\underline{M}$ ne peut satisfaire à $L_A(x)\ \&\ L_B(x) = L_{\mathfrak{A}(A,B)}(x)$ et $\mathfrak{A}\,(A, P)$ est contradictoire, et si $a = b$, cet objet est le seul, qui y satisfait. Ainsi, indépendamment du choix de $\underline{M}$, on a $A \sim B$ si, et seulement si $\mathfrak{A}\,(A, B)$ est correct (ou, même, non contradictoire). Si A est correct, $L_A\,(x)$ impose déjà à tous les y de $\underline{M}$ sauf un nombre fini, une des relations $y \in x$ ou $y \notin x$, et on peut remplacer les conditions existentielles, qui déterminent ces relations pour ces y exceptionnels en nombre fini, par une collection finie de conditions implicatives, indiquant explicitement que, pour tel ou tel y exceptionnel, on a $y \in x$ ou $y \notin x$. Donc, si la catégorie 0 possède un modèle adéquat, toute définition-propriété correcte est équivalente à une telle propriété, qui est un $\bullet$-arbre.

Soit P un $\bullet$-arbre correct définissant une propriété p (autrement dit, p est le seul objet de $\underline{M}$ satisfaisant à $L_p\,(x)$), et soient $Q_1, Q_2, \ldots, Q_s$ et $Q'_1, Q'_2, \ldots, Q'_t$ ses $(\bullet,\in)$ respectivement $(\bullet,\notin)$-sous-arbres immédiats. Soit, d'autre part, A un arbre correct, et soit a l'objet de $\underline{M}$ qu'il définit. $\underline{M}$ étant un modèle adéquat, la correction de P entraîne que a satisfait à une au moins des $L_{Q_1}(y), L_{Q_2}(y), \ldots, L_{Q_s}(y), L_{Q'_1}(y), \ldots, L_{Q'_t}(y)$ sans jamais satisfaire à la fois à une $L_{Q_i}(y)$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ et à une $L_{Q'_j}(y)$ $(j = 1, 2, \ldots, t)$. Visiblement, a satisfait à quelque (ou quelques) $L_{Q_i}(y)$ quand on a $a \in p$, et à quelque $L_{Q'_j}(y)$ quand on a $a \notin p$. Or, si Q est un arbre, a satisfait à $L_Q\,(y)$ si, et seulement s'il existe un objet de $\underline{M}$ satisfaisant à $L_A\,(x)\ \&\ L_Q\,(x) \sim L_{\mathfrak{A}(A,Q)}\,(y)$, autrement dit si, et seulement si $\mathfrak{A}\,(Q, A)$ est non contradictoire. Ainsi, l'existence d'un modèle adéquat $\underline{M}$ entraîne que, pour tout arbre correct A, quelque $\mathfrak{A}\,(Q_i, A)$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ où $\mathfrak{A}\,(Q'_i, A)$ $(j = 1, 2, \ldots, t)$ est non contradictoire sans que jamais un $\mathfrak{A}\,(Q_i, A)$ et un $\mathfrak{A}\,(Q'_j, A)$ puissent l'être en même temps, et l'objet a défini par A est $\in p$ ou $\notin p$ selon que quelque $\mathfrak{A}\,(Q_i, A)$ ou quelque $\mathfrak{A}\,(Q'_j, A)$ est non contradictoire.

Ainsi, si p et a sont des objets de $\underline{M}$, dont p une propriété, qui sont définis par quelques définitions correctes P et A de la catégorie 0 du système kroneckerien autrement dit, sont les uniques objets de $\underline{M}$ satisfaisant respectivement à $L_p\,(x)$ et à $L_p\,(x)$], la forme des P et A détermine sans ambiguité, à l'aide d'un algorithme convenable appliqué à ces formules, laquelle des relations $a \in p$ ou $a \notin p$ a lieu, l'adéquation de $\underline{M}$ impliquant que cet algorithme ne se bloque jamais en cours de route et aboutit à un résultat non ambigü après un nombre fini de pas. La situation est exactement la même pour les relations $y \swarrow x$, $y \searrow x$, $\underline{Act}\ (x)$, $\underline{Virt}\ (x)$, $x = \complement y$. Sans entrer en détails, si un objet a de $\underline{M}$ est défini par un arbre A, on a $\underline{Act}\ (a)$ ou $\underline{Virt}\ (a)$ selon que tous les $(\bullet, \in)$-sous-arbres immédiats de A sont actuellement prolongeables ou certains le sont virtuellement, et si la propriété p est définie par un arbre P, $\complement p$ l'est par l'arbre $\complement p$, qu'on obtient de P en y remplaçant, sur tous les segments issus de sa racine, $\in$ par $\notin$ et vice versa.

Soit $\underline{M}_0$ la collection des objets de $\underline{M}$, définis par quelque arbre correct de catégorie 0. $\underline{M}_0$ constitue déjà un modèle adéquat de la catégorie 0. C'est évident en ce qui concerne la correction et l'actuelle prolongabilité ; mais, en ce qui concerne la non contradiction, il faut montrer que, pour un arbre non contradictoire A, il existe non seulement les objets de $\underline{M}$, mais même ceux de $\underline{M}_0$ satisfaisant à $L_A\ (x)$, et qu'il y en a au moins deux quand A n'est pas correct. Sans entrer en détails, voici comment on peut en définir deux quand A est un $\bullet$-arbre ; on en forme un A_{min} en accolant $A^{(\bullet, \in)}$ avec tous les $(\bullet, \notin)$-dendrites, dont le sous-arbre immédiat est un arbre quelconque D de $\underline{Inc}\ (A^{(\bullet, \in)})$, et on en forme l'autre A_{max} en accolant $A^{(\bullet, \notin)}$ avec tous les $(\bullet, \in)$-dendrites, dont le sous-arbre immédiat est un arbre quelconque D' de $\underline{Inc}\ (A^{(\bullet, \notin)})$; on vérifie aisément que ces arbres sont corrects, ont des accolements non-contradictoires avec A et ne sont équivalents que si A est correct. Les objets de $\underline{M}_0$ sont dits *objets de catégorie 0* de $\underline{M}$.

Pourvu qu'il existe quelque modèle adéquat $\underline{M}$, la correction, la non contradiction et l'actuelle prolongabilité d'un arbre A, ainsi que l'équivalence $A \sim B$ des arbres corrects sont déterminées par des règles formelles, qui ne dépendent en rien du choix de $\underline{M}$. Si $A, B, P, C, \ldots$ sont des définitions correctes de catégorie 0, dont p une définition-propriété et C une définition-couple, et si $a, b, p, c, \ldots$ sont les uniques objets de $\underline{M}$ satisfaisant respectivement à $L_A(x), L_B(x), L_P(x), L_C(x), \ldots$, la validité des relations comme $a \in p$, $a \notin p$, $a \swarrow c$, $a \searrow c$, $a = b$, $a \neq b$, $\underline{Act}\ (a)$, $\underline{Virt}(a)$, $b = \complement a$, $a = i$ (où i est un signe-individu), $a \neq i$ se décide, d'une manière également formelle et indépendante du choix de $\underline{M}$, à partir des définitions correspondantes $A, B, P, C, \ldots, \overset{*}{i}$. Ainsi, si $\underline{M}'$ est un autre modèle adéquat et si $\underline{M}'_0$ est la collection de ses objets de catégorie 0, soient x et x' les objets des $\underline{M}_0$ et $\underline{M}'_0$ satisfaisant, pour une même définition correcte X de catégorie 0, à $L_X\ (x)$. Alors, $x \longrightarrow x'$ réalise un isomorphisme de $\underline{M}_0$ avec $\underline{M}'_0$ par rapport à tous les prédicats considérés. Ainsi, à isomorphie près, *$\underline{M}_0$ ne dépend pas du choix de $\underline{M}$*. Ainsi considéré, on l'appelera le *modèle minimal* de la catégorie 0, et ses objets seront dits les *objets de catégorie* 0 (du système kroneckerine) tout court.

Mais on peut construire ce modèle, sous l'hypothèse d'existence d'un modèle adéquat $\underline{M}$ mais sans aucune référence à ce $\underline{M}$, de la manière suivante : $\underline{D}_0^C$ étant la collection de tous les arbres corrects de catégorie 0, faisons correspondre à tout a de $\underline{M}_0$ la collection $\underline{C}(a)$ de tous les arbres A de $\underline{D}_0^C$ tels que a satisfasse à $L_A\ (x)$. Ceci est une application biunivoque de $\underline{M}_0$ sur la collection $\underline{D}_0^C/\sim$ des classes d'équivalence $\sim$ en lesquelles se répartit $\underline{D}_0^C$. Les valeurs de tous les prédicats précédents ($\in$, $\swarrow$, $\searrow$, etc.) pour les objets $x, y, \ldots$ de $\underline{M}_0$ se définissent à l'aide des algorithmes convenables appliqués aux arbres $X, Y, \ldots$ définissant ces objets, le choix de ces définitions étant indifférent. Dès lors, si l'on pose d'emblée les règles formelles définissant les prédicats métamathématiques $\underline{Corr}\ (X)$, $\underline{NC}\ (X)$, $\underline{AP}\ (X)$ et la construction du prolongement actuel $\underline{Prl}\ (X)$ d'un arbre actuellement prolongeable X telles qu'elles résultent, pour les arbres X de catégorie 0, de l'hypothèse de l'existence d'un modèle adéquat, on peut prendre comme support d'un modèle $\underline{M}_0$ la collection $\underline{D}_0^C/\sim$ (où $A \sim B$ est défini comme équivalent à $\underline{Corr}\ (\mathfrak{A}\ (A, B))$) et y "matérialiser" les prédicats $x \in y$, $x \swarrow y$, $x \searrow y$, etc. comme relations entre les classes (mod $\sim$) dans $\underline{D}_0^C$ à l'aide des algorithmes mentionnés, en les appliquant, pour obtenir les valeurs de ces prédicats pour ces classes, aux représentants arbitraires de ces classes. L'existence d'un modèle adéquat garantit la cohérence de cette construction et l'isomorphie du modèle ainsi construit au modèle minimal. On notera $o\ (A)$ la classe (mod $\sim$) d'une définition correcte A, et on l'appelera l'*objet défini par* A [c'est, en effet, l'unique objet de $\underline{M}_0$ satisfaisant à $L_A\ (x)$.

L'hypothèse de l'existence d'un modèle adéquat n'intervient pas dans la description des règles de la construction précédente, mais uniquement pour assurer que la construction faite selon ces règles n'est jamais bloquée ou ambigüe et conduit à un résultat cohérent, qui est un modèle adéquat de la catégorie 0. Or, si l'on arrive à prouver directement, par des raisonnements métamathématiques, les mêmes faits au sujet de cette construction, on construit effectivement et d'une manière formelle un modèle adéquat minimal de catégorie 0, sans faire aucune hypothèse préalable de l'existence de quelque modèle adéquat. Il s'agit donc de prouver :

1) la possibilité de poursuivre jusqu'à bout les algorithmes définissant les prédicats $\underline{Corr}\ (X)$, $\underline{NC}\ (X)$, $\underline{AP}\ (X)$; en réalité, cela n'exige que la vérification de la possibilité de la construction auxiliaire de $\underline{Prl}\ (X)$ quand l'arbre X est actuellement prolongeable et du fait que le résultat de cette construction est une collection d'arbres corrects ;

2) que $\sim$ est réellement une relation d'équivalence, que les règles précédents définissent bien les relations $x \in p$ et $x \notin p$ sur $\underline{D}_0^C/\sim$ [ce qui présuppose la preuve de l'invariance des algorithmes correspondant par rapport à $\sim$] satisfaisant aux conditions $x \notin p \sim \neg\, x \in p$ et $(\forall x)\ [x \in p \ \vee\ x \notin p\ ]$,

ainsi que les faits analogues au sujet des autres prédicats $x \swarrow c$, $x \searrow c$, $\underline{Act}(x)$, etc. (et, en particulier, l'invariance des algorithmes correspondants par rapport à $\sim$) ;

3) En vertu des 1) et 2), le résultat des constructions considérées est un modèle de catégorie 0, mais il reste à prouver son adéquation. Pour cela, il suffit essentiellement de prouver que, si A et X sont deux arbres de catégorie 0, dont X correct, $o(X)$ satisfait à la "matérialisation" précédente de $L_A(x)$ si, et seulement si $\mathfrak{A}'(A, X)$ est non contradictoire. J'appelle cet énoncé métamathématique "principe de cohérence". Toutes ces démonstrations métamathématiques (non encore publiées) peuvent se faire par induction selon la hauteur des arbres.

Toutes les règles inductives définissant $\underline{Corr}(X)$, $\underline{NC}(X)$, $\underline{AP}(X)$ et $\underline{Prl}(X)$ [quand cette dernière collection existe] sont finitistes et, par suite, peuvent être considérées comme règles de déduction de la catégorie 0 en tant que système logico-déductif (sous cette forme, les propositions du système apparaissent comme affirmations non seulement de la correction d'arbres, mais aussi de leur non-contradiction, actuelle prolongabilité etc., mais on peut facilement les remplacer par les affirmations équivalentes de correction ; ainsi, A étant un arbre, soit A' l'arbre obtenu en accolant le $(\bullet, \in)$-dendrite, ayant A comme son sous-arbre immédiat, avec la définition fixe de la propriété vide (Figure 4). Alors, la contradiction de A équivaut à la correction de A'). Alors, il suffit de prouver les seules affirmations métamathématiques précédentes 1) [2) et 3) sont superflues pour ce but] pour démontrer la consistance de ce système logico-déductif, auquel cas toute proposition vraie de la catégorie 0 devient déductible (ceci n'a plus lieu dans les catégories supérieures). Mais il est à remarquer que les signes $\in$, $\notin$, $\swarrow$, $\searrow$ jouent, dans ces règles de déduction, le rôle des *constantes logiques* et non celui des *prédicats*. En effet, si l'on traduit, par exemple, sous forme propositionnelle, la règle de déduction fournie par le critère de non-contradiction pour les $\bullet$-arbres-propriétés à un seul $(\bullet, \in)$-dendrite et à un seul $(\bullet, \notin)$-dendrite, elle devient :

$$(\exists x)\ [L_B(x) \ \& \ L_{B'}(x)] \sim (\exists x)\ \{(\forall y)\ [(L_B(y) \qquad y \in x) \ \& \ (L_{B'}(y) \qquad y \in x)]\}$$

Quelques exemples du principe de cohérence : Soit U la définition, qui est la figure 5 de la liste, de la propriété d'être objet. U est un $(\bullet, \in)$-dendrite, dont le sous-arbre immédiat est $*$. Dès lors, quelque soit l'arbre correct X, son accolement $\mathfrak{A}(*, X) = X$ avec $*$ est, évidemment, encore correct, d'où, pour tout objet $x = o(X)$, on a $x \in u$, comme il fallait s'y attendre. En particulier, on a $u \quad u$. Si $\complement\, U$ est la définition analogue Figure 4 de l'ensemble vide ϕ, on a, d'une manière analogue, $x \notin \phi$ pour $x = o(X)$ quelconque.

Si, au lieu du système kroneckerien, on prend un autre système définitionniste, $\underline{D_I}$, tout ce qui précède s'applique, à condition de remplacer "fini" par "actuel", sauf que $\underline{Inc}(A)$ n'est pas, en général, une collection actuelle d'arbres (ceci n'a lieu, pour tout $A^{\bullet}$, que si l'intuition de pluralité $\underline{I}$ est telle que le produit cartésien de toute famille actuelle de collections actuelles est encore actuel). Ainsi, le prédicat $\underline{NC}(X)$ et, avec lui, $\underline{Corr}(X)$, $\underline{AP}(X)$, etc. n'est plus algorithmique au sens de $\underline{I}$ (donc une proposition vraie peut ne pas être déductible au sens de $\underline{I}$), mais il est toujours prédicativement caractérisé (les couches étant celles des arbres d'hauteur fixe).

$$(\exists x)\ [L_B(x) \ \& \ L_{B'}(x)] \sim \neg (\exists x)\ \{(\forall y)\ [(L_B(y) \longrightarrow y \in x) \ \& \ (L_{B'}(y) \longrightarrow y \notin x\ ]\}$$

5. Catégories supérieures et leur critère de correction.

Le système kronéckérien est, comme nous avons vu, un empilement de catégories paramétrisé par les entiers naturels (lesquels peuvent être considérés comme objets mathématiques, car, ainsi envisagés, ils possèdent des définitions de catégorie 0) L'univers $\underline{U_c}$ des formules des catégories $< c$ étant déjà construit, celles de catégories c sont construites comme suit. On considère, d'abord, un métalangage (aussi complet que possible) de $\underline{U_c}$ (voir, pour les détails, mon travail "Théorie de la définition" II, Journ. d. math. p. et appl., 1958, p. 59-67), portant aussi bien sur la structure formelle des signes considérés (et cette partie du métalangage exige l'introduction des signes auxiliaires, construits d'une certaine manière à partir de ceux de $\underline{U_c}$) que sur les prédicats métamathématiques comme $\underline{Corr}(X)$, $\underline{NC}(X)$, $\underline{AP}(X)$, $X \sim Y$, $X \in Y$ qui signifie, en fait, $o(X) \in o(Y)$, etc. qu'on suppose déjà établis sur $\underline{U_c}$. Ce métalangage sert à construire les définitions des propriétés que nous allons provisoirement noter $Q(x)^{\xi}_{c}$, dont le sens heuristique est : un objet x possède $Q(x)^{\xi}_{c}$ si, et seulement si ou bien sa catégorie est $< c$ (autrement dit, x possède une définition $X \in \underline{U_c}$) et x satisfait à $Q(x)$, ou bien la catégorie de x est $\geq c$ et $\xi = +$. Or, un prédicat $Q(x)$ portant sur les objets de catégorie $< c$ peut se remplacer par un prédicat $Q^*(x)$ du métalangage de $\underline{U_c}$ à une seule variable libre X, portant sur les formules X de $\underline{U_c}$ et tel que $Q^*(X) \sim Q(o(X))$, et pour que $Q^*(X)$ soit de cette forme pour quelque $Q(x)$ convenable, il faut et il suffit qu'il soit invariant par l'équivalence $X \sim Y$ et ne puisse avoir de valeur "vrai" que pour les X corrects (ces conditions peuvent être remplies d'emblée en imposant à $Q\,(X)$ certaines conditions de structure formelle). D'autre part, l'entier c de $Q\,(x)^{\xi}_{c}$ doit, également, être introduit à l'aide d'une définition du système. Pour plus de simplicité, on suppose que cette définition est toujours de catégorie O. Ainsi, le premier pas de la construction de la catégorie c consiste à introduire les signes $d = (\Delta,\ Q^*(X),\ \xi)$, dits *définitions-propriétés primitives* (abréviations DPP) de catégorie c, où Δ est une définition de catégorie 0, ou $Q^*(X)$ est un prédicat portant sur les formules de quelque $\underline{U}_c$ (il se trouve que sa structure formelle ne dépend pas du choix de ce $\underline{U}_c$), et dont la structure formelle assure l'invariance par l'équivalence et la fausseté pour les formules non correctes, et où Δ est un des signes - ou +. Cette formule est considérée comme bien construite si, et seulement si Δ est une définition de quelque entier naturel c (auquel cas d est dite une DPP de *catégorie* c), sinon d (et toute formule, qui la contient) est considérée comme dépourvue de sens). Si l'on considère d comme un prédicat sur *toutes* les formules du système ckroneckérien, son sens est donc : X satisfaits à d si, et seulement si : *a*) X est correct et *b*) ou bien il existe une formule correcte X' de catégorie $< c$ telle que $X' \sim X$ et $Q^*(X')$ a la valeur "vrai", ou bien $\xi = +$ et il n'existe aucune formule X' de catégorie $< c$ telle que $X' \sim X$. On voit que pour que d soit prédicativement caractérisé, il faut et il suffit que $\sim$ et les prédicats, qui entrent dans l'expression de $Q^*(X)$ le soient, et, alors, en vertu de nos présuppositions métamathématiques, d n'est pas ambigü. Si $\sim$ est prédicativement caractérisée, il en est de même pour les prédicats $\underline{Cat}\,(x) = c$ et $\underline{Cat}\,(x) < c$ [$\underline{Cat}\,(x)$ = catégorie de l'objet x = catégorie minimale des définitions de x]. D'où, si $\Delta\,(c)$ et $\Delta\,(c')$ sont des définitions des entiers c et c' respectivement, où $c' > c$, on peut "relever" la définition $d = (\Delta\,(c),\ Q^*(x),\ \xi)$ jusqu'à la catégorie c', car elle est aussi égale, en tant que prédicat sur les formules, à $(\Delta\,(c'),\ Q^{*\prime}(X),\ \xi)$, où :

$$Q^{*\prime}(X) = (\exists Y)\,[Q^*(Y)\ \ \&\ \ \underline{Cat}(Y) < c\ \ \&\ \ Y \sim X] \quad \text{si } \xi = -$$

et :

$$Q^{*\prime}(X) = (\exists Y)\,[Q^*(Y)\ \ \&\ \ \underline{Cat}(Y) < c\ \ \&\ \ Y \sim X]\ \mathrm{V}\ (Y)\,[Y \sim X \longrightarrow \underline{Cat}(Y) \geqslant c\,] \quad \text{si } \xi = +.$$

Les propriétés primitives de catégorie fixée c, et, par suite, toutes les propriétés primitives, forment une collection de prédicats, qui, sous l'hypothèse de l'existence d'un modèle adéquat, est fermée par rapport aux opérations booléennes $\complement$, $\cap$, $\cup$ qui matérialisent les opérations du calcul propositionnel $\neg$, &, V sur les formules correspondantes. En effet, si l'on pose :

$$\complement + = -,\ \complement - = +,\ + \cap + = +,\ + \cap - = - \cap + = - \cap - = -,\ + \cup + = + \cup - = - \cup + = +,\ - \cup - = -,$$

on a, si :

$$d = (\Delta\,(c),\ Q^*(X),\ \xi) \qquad \text{et si } d' = (\Delta\,(c),\ Q^{*\prime}(X),\ \xi'),$$

$$\complement d = (\Delta\,(c),\ \neg\, Q^*(X),\ \complement\xi), \qquad d \cap d' = (\Delta\,(c),\ Q^*(X) \cap Q^{*\prime}(X),\ \xi \cap \xi')$$

et :

$$d \cup d' = (\Delta\,(c),\ Q^*(X) \cup Q^{*\prime}(X),\ \xi \cup \xi').$$

Ayant construit les DPP de catégorie c, on applique, pour construire les autres formules de cette catégorie, la méthode de construction de catégorie 0 (arbres), mais en se permettant, en plus, d'employer les DPP comme signes-types placés auprès des noeuds, autrement dit comme prédicats supplémentaires mis en conjonction avec ceux que figurent les dendrites du sous-arbre, dont le noeud en question est la racine. En particulier, une DPP d s'identifie avec le $\bullet$-arbre à deux dendrites, dont un, qui est un $(\bullet, \in)$-dendrite, a d comme son sous-arbre immédiat, et dont l'autre, un $(\bullet, \notin)$-dendrite, a $\complement d$ comme tel sous-arbre. Un arbre A de cette forme générale est considéré comme bien construit s'il l'est en tant qu'arbre et si toutes les DPP qu'il porte le sont. Alors, la catégorie $c\,(A)$ de A est, par définition, le maximum des catégories des DPP qu'il contient en tant que formule [s'il n'en contient aucune, on pose $c\,(A) = 0$]. Le maximum $h^*(A)$ des hauteurs des noeuds portant les DPP de catégorie $c\,(A)$ [si $c\,(A) = 0$, on pose $h^*(A) = h\,(A)$, où $h\,(A)$ est la hauteur de A] est dit la *hauteur catégorique* de A. Enfin, la racine de A peut, éventuellement, porter une DPP, et $\mu\,(A)$, égal à la catégorie de cette DPP ou à 0 quand la racine de A n'en porte aucune, est dit la *catégorie radicielle* de A. On appelle le quadruple $\chi\,(A) = (c\,(A),\ h^*(A),\ \mu\,(A),\ h\,(A))$ la *caractéristique* de A, et ce sont les $\chi\,(A)$, rangés lexicographiquement, qui partagent les formules du système kroneckérien en couches en vue de caractérisation prédicaticative des $\underline{NC}(X)$, $\underline{Corr}\,(X)$, $X \sim Y$, $X \in Y$ etc. On a $0 \leqslant \mu\,(A) \leqslant c\,(A)$, $h\,(A) \geqslant h^*(A) \geqslant 0$ et $h^*(A) = h\,(A)$ quand $c\,(A) = 0$, et il est facile de voir que ces conditions sont aussi suffisantes pour qu'un quadruple soit la caractéristique de quelque arbre. Nous supposons que le système kroneckerien total a un modèle adéquat $\underline{M}$ satisfaisant aux mêmes conditions que précédemment. Alors, si A est un arbre correct, il existe un et un seul objet a du modèle satisfaisant à $L_A(x)$, et on dira que A est sa définition. Bien entendu, a peut avoir plusieurs (et même une infinité de) définitions, mais il existe toujours le minimum des catégories de ces définitions, qui sera dit la *catégorie de a*. Une définition X sera dite *actocatégoriquement prolongeable* (pour le moment, pour $\underline{M}$) (le prédicat métalogique correspondant est noté $\underline{ACP}\ (X)$) si les objets de $\underline{M}$, qui satisfont à $L_X(x)$ et sont "définissables", ont une catégorie bornée.

Considérons la question de la non-contradiction d'un arbre donné A. Si $\mu(A) = 0$ ("arbre à racine libre"), l'existence d'un modèle adéquat $\underline{M}$ entraîne de la même manière qu'en catégorie O que cette question (et, aussi, celle de la correction et de l'actuelle prolongabilité) pour A se réduit aux questions analogues pour les accolements des sous-arbres immédiats de A et des arbres de son incomplétant. Or, grâce à la clôture des DPP par rapport aux opérations booléennes, ces accolements et incomplétants ne présentent aucune difficulté à définir et sont toujours de caractéristique $< \chi(A)$, et la caractérisation des prédicats métamathématiques considérés est bien prédicative dans ce cas. Si, par contre, la racine de A est munie d'une DPP $d = (\Delta(\mu),\ Q^*(X),\ \xi)$ donc $(\mu\ (A) = \mu)$, il n'y a, non plus, aucune difficulté si $\xi = -$, car, alors, si A' est l'arbre A, dont on a enlevé d, la non contradiction de A entraîne celle de A', et A est non contradictoire si et seulement s'il existe un arbre correct B de catégorie $< \mu \leqslant c$ tel que $Q^*(B)$ soit vrai et que $\mathfrak{A}(A', B)$ soit non contradictoire. Comme $Q^*(X)$ ne comporte que les quantificateurs étendus aux formules de $\underline{U}_\mu \subset \underline{U}_c$ et, comme $\underline{Cat}\ (B) < \mu$ (d'où $\underline{Cat}(\mathfrak{A}(A', B)) = \text{Max}\ [\underline{Cat}(A'),\ \underline{Cat}(B)] \leqslant \text{Max}\ c, c) = c$ et $\underline{Cat}(\mathfrak{A}(A', B)) = c$ implique $\underline{h^*}(\mathfrak{A}(A', B)) = h^*(A') = h^*(A)$ et $\mu\ (\mathfrak{A}(A', B)) = \mu(B) < \mu)$, on voit que la caractéristique de tout $\mathfrak{A}(A', B)$ de cette sorte est $< \chi(A)$ et que $\underline{NC}\ (X)$ est encore caractérisé prédicativement. Le seul cas crucial et distinct par nature de celui de catégorie 0 est $\xi = +$. Pour le résoudre, il faut savoir caractériser prédicativement la prolongabilité actocatégorique de A, et, pour un arbre actocatégoriquement prolongeable A, le maximum des catégories des objets satisfaisant à $L_A(x)$, car, si A' précédent est virtocatégoriquement prolongeable ou si le maximum mentionné est $\geqslant \mu$, A est sûrement non contradictoire, et sinon, la réponse ne dépend plus de ξ. Or, premièrement, cette question pour les arbres quelconques se réduit à celle pour les arbres à racine libre, car, si $\mu = \mu(A) > 0$ et si $d = (\Delta\ (\mu),\ Q^*(X),\ \xi)$ est la DPP munissant sa racine, A est sûrement actocatégoriquement prolongeable et à catégorie maximale $< \mu \leqslant c\ (A)$ si $\xi = -$, la détermination de cette catégorie maximale étant une question sur les arbres de catégorie $< \mu$. Et si $\xi = +$, A et A' sont actocatégoriquement prolongeables en même temps et la catégorie maximale des objets satisfaisant à $L_A\ (x)$ et à $L_A\ (x)$ est la même si elle est $\geqslant \mu$, et, sinon, elle est la même que celle de A' muni de $d = (\Delta\ (\mu),\ Q^*\ (X),\ -)$.

Pour résoudre la question (sous l'hypothèse de l'existence de $\underline{M}$) pour un arbre A à racine libre, on part de deux remarques :

1) *Si A est actocatégoriquement prolongeable, tout arbre de son incomplétant l'est aussi.* En effet, supposons qu'il y ait des arbres de $\underline{Inc}\ (A)$, qui sont virtocatégoriquement (donc, à fortiori, virtuellement) prolongeables. A étant supposé non contradictoire, on peut munir un nombre fini d'objets de $\underline{M}$, satisfaisant à $\bigvee_{B \in \underline{Inc}(A)} L_B\ (y)$, de signes $\in x$ et $\notin x$ de manière que toutes les conditions existentielles de $L_A\ (x)$ soient satisfaites, et les catégories des objets définissables restants satisfaisant à ce prédicat ne seront pas bornées non plus. Soit θ un de ces objets. On peut considérer les deux prolongements suivants de A (dont il est facile de donner les définitions) : la propriété a_1 que possèdent les seuls objets auxquels ou bien les conditions implicatives de $L_A\ (x)$ ou bien le choix précédent pour satisfaire à ses conditions existentielles imposent $\in x$; et la propriété $a_2 \supset a_1$ que possède, en plus des objets précédents, le seul objet θ. Par hypothèse, a_1 et a_2 ont des définitions A_1 et A_2 d'une catégorie bornée, par exemple $\leqslant c_0$. Il est alors facile d'en former une A^* de $a_2 \cap \complement a_1 = \{\theta\}$, dont la catégorie soit, également, $\leqslant c_0$, et, même, une, qui soit un $\bullet$-arbre. De lors, il doit exister un $(\bullet, \in)$-sous-arbre immédiat B de A^* (dont la catégorie est forcément $\leqslant c_0$ également) auquel θ satisfait, et θ est le seul objet qui y satisfait. Par suite, B est correct, définit θ, et la catégorie de tout objet définissable satisfaisant à $L_A\ (x)$ est $\leqslant c_0$, contre l'hypothèse.

2) *Les catégories des subdivisions des entiers naturels 1,2,..,n,... en deux classes, définissables dans le système kroneckerien, ne sont pas bornées.* En effet, l'alphabet du système kroneckerien, d'où on exclut les signes-individus, est fini, d'où résulte facilement que les définitions du système kroneckerien comportant seulement les individus pris dans une collection finie fixée et dont la catégorie est $< c$ peuvent être rangées en une suite semblable à $\underline{N}$, cet ordre pouvant se décrire dans le métalangage de $\underline{U}_c$. En particulier, les subdivisions de $\underline{N}$ définissables dans le système kroneckerien ne dépendent d'aucun individu particulier, et si les signes-individus interviennent dans une de leurs définitions, on peut les remplacer par n'importe quels autres signes-individus, à condition de remplacer les individus identiques par identiques et distincts par distincts. Dès lors, on peut remplacer les individus par les exemplaires d'un même signe supplémentaire, par exemple $\square$, en mettant entre deux exemplaires de ce signe le signe $=$ ou $\neq$ selon qu'ils remplacent les individus identiques ou distincts.

Dès lors, ces "pseudo-définitions" sont faites avec un alphabet fini, et on peut, comme dans le raisonnement du paradoxe de Richard, ranger ces "pseudo-définitions" des subdivisions de $\underline{N}$, provenant des définitions de catégorie $< c$, en une suite semblable à $\underline{N}$, ce qui range en une telle suite (avec des répétitions éventuelles) les subdivisions de $\underline{N}$ de catégorie $< c$, ce rangement étant descriptible dans le métalangage de $\underline{U}_c$. D'autre part, on peut remplacer une subdivision de N par sa fonction caractéristique. Alors, si l'on applique à cette "suite de suites" (à termes égaux à 0 ou 1) la méthode de la diagonale de Cantor, comme on le fait, également, dans le raisonnement du paradoxe de Richard, on obtient la fonction caractéristique d'une subdivision de $\underline{N}$, ayant une définition de catégorie c et distincte des fonctions caractéristiques de toutes celles, qui ont une définition de catégorie $< c$. Donc, la catégorie de cette subdivision est strictement c.

Il en résulte facilement que si l'on peut trouver une collection V d'objets satisfaisant à $\bigvee_{B\in \underline{Inc}(A)} L_B(y)$ et une relation d'équivalence E dans V de manière que la collection V/E des classes (mod E) dans V puisse être, d'une manière définissable dans le système kroneckérien, rangée en une suite semblable à $\underline{N}$, A est virtocatégoriquement prolongeable.

Or, ceci a lieu dans deux cas suivants :

1) Quand, pour quelque c, les objets de catégorie $< c$ satisfaisant à $\bigvee_{B\in \underline{Inc}(A)} L_B(y)$ ne peuvent pas être tous définis à l'aide des définitions avec un nombre borné seulement de signes-individus. Dans le cas contraire, les arbres B de $\underline{Inc}(A)$ sont dits *actoindividuellement prolongeables* jusqu'à la catégorie c (le prédicat correspondant est noté $\underline{AIP_c}(X)$) ;

2) Quand il y a une infinité d'objets satisfaisant à $\bigvee_{B\in \underline{Inc}(A)} L_B(y)$ et définissables à l'aide des définitions de catégorie $< c$ ne comportant pas d'autres signes-individus que ceux de quelque collection finie fixée $\underline{I}_0$. Dans le cas contraire, les arbres B de $\underline{Inc}(A)$ sont dits $\underline{I}_0$*-actuellement prolongeables* jusqu'à la catégorie c (le prédicat correspondant s'écrit $\underline{AP_c^{I_0}}(X)$). On peut montrer que la satisfaction d'une au moins de ces conditions (prolongabilité virtocatégorique, ou virtoindividuelle jusqu'à quelque catégorie c, ou $\underline{I}_0$-virtuelle jusqu'à quelque catégorie c pour quelque collection finie $\underline{I}_0$ de signes-individus), qui est suffisante pour la prolongabilité virtocatégorique de A, est aussi nécessaire. La caractérisation de $\underline{ACP}(X)$ est bien prédicative si celles des $\underline{AIP_c}(X)$ et $\underline{AP_c^{I_0}}(X)$ le sont. Ceci est bien le cas, mais je ne peux pas insister ici sur ces détails, ni sur la caractérisation prédicative de la catégorie maximale des objets satisfaisant à $L_A(x)$, où A est actuellement prolongeable. La correction des A non contradictoires se réduit facilement aux questions de non contradiction, et la question : existe-t-il un $A' \sim A$ (où A est correct) tel que $c(A') < c(A)$ se résout en considérant la correction des $\mathfrak{A}(A, A')$, où A' parcourt les arbres corrects de catégorie $< c(A)$. Cette dernière question (pour A' fixé) se ramène, en effet, après le premier pas de réduction, aux questions de non contradiction et de correction au sujet de certains arbres de caractéristique $< \chi(A)$.

Dans les systèmes non-kroneckeriens, les DPP sont introduites sous la même forme $d = (\Delta, Q^*(X), \xi)$, mais où $Q^*(X)$ est un prédicat de métalangage, qui n'est plus forcément fini, mais actuel au sens de l'intuition de pluralité $\underline{I}$, qui est à la base du système. D'une manière plus précise, les prédicats du calcul des prédicats habituels peuvent être figurés par des arbres finis, dont les extrémités portent les prédicats de départ, et les noeuds les signes des opérations de ce calcul ($\neg$, &, V, et les quantificateurs par rapport aux arguments des prédicats), la structure de ces arbres étant soumise aux restrictions (à savoir, que les noeuds portant $\neg$ ou un quantificateur ne peuvent avoir qu'un seul fils) traduisant les règles de bonne construction du calcul des prédicats. Dans un système non-kroneckérien, on considère, au lieu de ces arbres finis, les arbres analogues (c'est-à-dire avec les mêmes prédicats de départ et soumis aux mêmes restrictions de structure), mais qui sont actuels au sens de $\underline{I}$, ce qui a, en particulier, comme effet, que & et V deviennent des opérations applicables aux collections actuelles quelconques de propositions et qu'on doive introduire les quantifications simultanées selon les collections actuelles des arguments, la collection des prédicats de départ d'un tel arbre et celle de tous leurs arguments pouvant être actuelle quelconque. Le reste de construction de formules de $\underline{D}_I$ se fait comme pour le système kroneckérien, et, si l'intuition de pluralité $\underline{I}$ est *neumanienne*, autrement dit toute collection actuelle au sens de $\underline{I}$ peut être bien ordonnée au sens de $\underline{I}$, tous les raisonnements concernant le critère de non contradiction et ceux de correction, de la prolongabilité actocatégorique etc., continuent de s'appliquer, à condition de remplacer, dans ceux qui sont inspirés par le paradoxe de Richard, la suite $\underline{N}$ des entiers par la suite $\Omega(\underline{I})$ de tous les ordinaux au sens de $\underline{I}$.

Ainsi, l'hypothèse de l'existence d'un modèle adéquat $\underline{M}$ du système kroneckérien ou, plus généralement, d'un système définitionniste à pluralité actuelle neumannienne, détermine complètement les règles de caractérisation prédicative des prédicats $\underline{Corr}(X)$, $\underline{NC}(X)$, $\underline{AP}(X)$, $\underline{ACP}(X)$, $X \sim Y$, $X \in Y$, $\underline{Cat}(X) = n$ etc. Exactement comme dans le cas de catégorie 0, chaque modèle adéquat $\underline{M}$

comporte un sous-modèle minimal $\underline{M}_o$, formé par ses objets définis par quelque définition correcte A du système définitionniste considéré, autrement dit satisfaisant à quelque $L_A(x)$, où A est correct, et tous ces sous-modèles minimaux sont adéquats et isomorphes deux à deux. Il est possible, ici également, de les réaliser, à l'isomorphie près, à partir de la collection des formules du système définitionniste considéré, en prenant comme son support la collection des classes de définitions correctes par rapport à l'équivalence précédente, la correction et l'équivalence en question étant définis par les règles mentionnées de caractérisation prédicative de $\underline{Corr}(X)$ et de $X \sim Y$, posées d'emblée et sans référence à aucun modèle. Si $o(X)$ est la classe de la définition correcte X, on définit les prédicats $x \in y$, $x \not\swarrow y$, $\underline{Act}(x)$, etc. sur le support précédent, en posant $o(X) \in o(Y)$, $o(X) \not\swarrow o(Y)$, $\underline{Act}(o(X))$ si, et seulement si l'on a respectivement $X \in Y$, $X \not\swarrow Y$, $\underline{Act}(X)$, etc. en vertu des règles formelles caractérisant prédicativement ces prédicats, dont les arguments parcourent les formules du système. L'hypothèse de l'existence d'un modèle adéquat garantit la cohérence de cette construction et l'adéquation du modèle ainsi construit, mais la description de cette construction ne fait intervenir que les formules du système et leur structure formelle et ne dépend aucunement de cette hypothèse d'existence. Si l'on prouve par des raisonnements métamathématiques directs, la réalisabilité et la cohérence de cette construction (c'est-à-dire que les conditions d'applicabilité des règles, qui caractérisent prédicativement les prédicats considérés portant sur les formules du système, sont remplies à tout stade d'application de ces règles, que les prédicats ainsi caractérisés, qui sont forcément non ambigüs en vertu de nos présuppositions métamathématiques, ont les propriétés requises pour donner un modèle [autrement dit, que $X \sim Y$ est bien une relation d'équivalence et que tous les prédicats, portant sur les formules et qui fournissent, par transport, les prédicats de même nom dans le modèle, sont compatibles avec cette équivalence] et l'adéquation du modèle ainsi construit (cette démonstration peut se faire, mais n'est pas encore publiée), on fonde rigoureusement le définitionnisme. En particulier, pour démontrer l'adéquation du modèle construit (qu'on appelle "principe de cohérence"), on prouve, par une induction convenable selon le couple des caractéristiques $(\chi(A), \chi(X))$, que, pour un arbre A et un arbre correct X, $o(X)$ satisfait à $L_A(x)$, considéré comme un prédicat sur le modèle ainsi construit, si, et seulement si $\mathfrak{A}(A, X)$ est correct au sens des règles formelles, caractérisant prédicativement $\underline{Corr}(X)$.

Un système définitionniste $\underline{D_I}$ comporte une *logique* qu'on peut caractériser vaguement comme ce qui, dans les règles de caractérisation prédicative des prédicats $\underline{NC}(X)$, $\underline{Corr}(X)$ etc. peut s'exprimer sous forme finie (ou du moins, c'est la seule logique, qui est à la portée des possibilités humaines effectives selon le sens commun). La prédicativité de la caractérisation des prédicats mentionnés, donc leur non ambiguïté, garantit la consistance de $\underline{D_I}$ en tant qu'un système logico-déductif, si on le munit de la logique précédente. On a vu que la valeur de chacun de ces prédicats pour toute formule de catégorie 0 du système kroneckérien peut être déduite à l'aide de cette logique, et c'est encore vrai pour les formules finies de catégorie 0, de tout système définitionniste, mais α n'est β plus, en général, le cas pour les formules finies des catégories > 0. Ainsi, une proposition vraie peut (comme il fallait s'y attendre) ne pas être déductible.

6. Paradoxes de la théorie des ensembles. Comportement des ensembles et des propriétés virtuelles et l'allure de la mathématique des systèmes définitionnistes.

Si l'on regarde les énoncés des paradoxes, qui définissent l'objet paradoxal, on constate que ce sont toujours les prédicats de type II, qu'on n'a le droit à employer que pour la formation des DPP $d_c = (\Delta(c), Q^*(X), \xi)$. Si la catégorie des objets de $\underline{D_I}$ ayant des définitions satisfaisant à $Q^*(X)$ n'est pas bornée, il n'existe aucun objet de $\underline{D}$, qui soit une propriété équivalente à ce prédicat $Q^*(X)$, tous les $o(d_c)$ sont distincts et la catégorie de $o(d_c)$ est c, ce qui exclut le paradoxe à la manière proche de celle de Russel. Mais si la catégorie de ces objets est bornée, il existe, par contre, une catégorie c telle que $o(X) \in o(d_c)$ soit, pour tout $c' \geqslant c$, équivalent à "$Q^*(X)$ est vrai". Ainsi, dans ce cas, $o(d_c)$ ne change pas à partir d'un certain c et représente bien la proporiété, dont le sens intuitif est celui de la phrase "$o(X)$ tel que $Q^*(X)$ est vrai", mais cette phrase n'est pas une définition de cet objet "pseudo-paradoxal", ce qui évite le paradoxe. Ainsi, par exemple, dans le paradoxe de Berry, $Q^*(X)$ a le sens intuitif "X est une définition sans signes-individus, ayant au plus N signes simples, d'un entier naturel" (un prédicat, ayant ce sens intuitif existe bien dans le métalangage de tout système définitionniste), et l'objet paradoxal est ici le plus petit entier n_c satisfaisant à $\bullet\neg d_c$. Si le nombre des signes simples de cette définition (dont la catégorie est c) est $\leqslant N$, la consistance de $\underline{D_I}$ et le raisonnement même du paradoxe montrent que la catégorie de n_c est exactement c (auquel cas le paradoxe est bien évité pour d_c), ce qui montre que les objets satisfaisant à la phrase paradoxale ne sont pas, dans ce cas, tous de la catégorie $< c$. Mais, comme il n'existe qu'un nombre fini de définitions sans signes-individus comportant au plus N signes simples, il existe un c tel que toutes ces définitions soient de catégorie $< c$. Mais alors, quelque soit l'entier $c' \geqslant c$ et quelque soit $\Delta(c')$, la définition de n_c, aura plus de N signes simples, donc satisfera à $Q^*(X)$, et comme ce sont les seules définitions correctes de n_c, ceci évite encore le paradoxe, malgré l'existence de l'objet d'apparence paradoxale. La solution du paradoxe de Richard est analogue, mais les définitions $*^{d}c$ de l'objet paradoxal doivent être tels que c soit un ordinal du système tel que aucun ordinal (actuel) $c' \geqslant c$ ne soit nommable, autrement dit ne possède aucune définition finie.

On peut montrer que, du point de vue combinatoire, les propriétés quelconques (y compris virtuelles) des systèmes définitionnistes se conduisent presque aussi bien que les ensembles chez Cantor. En effet, pour toute propriété p, il existe la propriété complémentaire $\complement p$ (qui est virtuelle si p est actuelle) et la propriété 2^{p} d'être une sous-propriété de p (l'éctualité de p n'entraîne pas celle de 2^{p}, sauf pour certains systèmes définitionnistes ; ainsi, dans le système borélien, si p est une propriété dénombrable, par exemple celle d'être un entier naturel, donc actuelle, 2^{p} est une propriété, ayant la puissance du continu, donc virtuelle). Et si f est une propriété de propriétés (autrement dit, tout objet $p \in f$ est une propriété), il existe toujours (même si f est les $p \in f$ sont virtuelles) l'intersection $\bigcap_{p \in f} p$ et la réunion $\bigcup_{p \in f} p$ des $p \in f$ (si f et les $p \in f$ sont actuelles, $\bigcap_{p \in f} p$ et $\bigcup_{p \in f} p$ le sont aussi dans les systèmes définitionnistes qu'on considère). Quant au produit cartésien $\prod_{p \in f}$ des $p \in f$, il n'existe avec certitude que si f est actuelle (mais les $p \in f$ peuvent être quelconques) et, si le système définitionniste est quelconque, l'actualité des $p \in f$ (où f est supposée actuelle) n'entraîne pas celle de leur produit. On peut transporter avec certaines précautions, la notion de type cardinal aux propriétés virtuelles, mais on peut montrer que parmi les cardinaux "hypertransfinis" ainsi introduits, il y a des incomparables. On peut montrer, également, que l'axiome de choix de Hilbert (c'est-à-dire l'axiome de Zermelo pour les propriétés virtuelles de propriétés) est faux et que la fonction $\tau(p)$ de Hilbert n'existe pas. On peut, également, introduire, avec certaines restrictions, les notions des propriétés virtuelles ordonnées et bien ordonnées, de leur type ordinal et, en particulier, la notion des ordinaux "hypertransfinis".

L'Arithmétique des systèmes définitionnistes, à partir du système kroneckerien, est la même que celle de la Mathématique classique. Quant à l'Analyse, celui du système kroneckerien a la même allure "hiérarchique" (quoique l'hiérarchie n'est pas ici constructiviste, mais définitionniste) que celui des diverses théories constructivistes (théorie de Lorenzen, Analyse récursive). Celui du système borélien a un peu l'allure des théories, comme celle des classes de Baire. Enfin, à partir du système dédekindien ("actuel - ayant au plus la puissance de continu), l'Analyse prend l'allure classique (•).

(•) Le terme "catégorie" a pris, ces dernières années, un autre sens [introduit par Eilenberg et Steenrod dans leur "Fondations of algebraic topology" Princeton 1952] proche du sens du mot "propriété" du présent travail, et cet emploi du mot "catégorie" est adopté par la majorité des mathématiciens. Pour cette raison, je le remplace désormais par le terme "type définitionniste" que j'emploierai désormais à sa place dans mes publications futures sur le définitionnisme.