Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2
Série Mathématiques

P. Bernays

Remarques sur l'imprédicativité

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 7, série *Mathématiques*, nº 1 (1962), p. 121-122

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1962__7_1_121_0>

REMARQUES SUR L'IMPREDICATIVITÉ

P. BERNAYS
Zurich

Comme vous savez, la critique intuitionniste des mathématiques classiques a été précédée, spécialement ici en France, par une critique des méthodes imprédicatives. Le terme "imprédicatif" même, en effet a été introduit par Poincaré.

Aussi le point de vue de la prédicativité a-t-il un rôle dominant dans la théorie de type ramifiée de Russel et Whitehead, dans la recherche de Hermann Weyl "Le Continu", et à présent dans la mathématique opératoire de Lorenzen.

Il sera bon de préciser d'abord ce qu'il semble convenable d'entendre par imprédicativité. (En effet : imprédicativité c'est le caractère positif, pendant que prédicativité est l'absence de procédures imprédicatives)(*).

Une définition d'un objet d'une espèce S (d'un nombre, d'un point) - en bref : "d'un S" est imprédicative s'il intervient une quantification par rapport aux S. C'est l'imprédicativité au sens général. Le cas critique d'imprédicativité se présente si les conditions suivantes sont remplies :

1/ Une définition contenant une quantification par rapport aux S est nécessaire pour démontrer l'existence d'un S ayant une certaine propriété.

2/ L'espèce S n'est pas celle des individus, mais, pour ainsi dire une espèce dérivée : espèce de fonctions, de suites, de prédicats, de classes.

Cette situation donne de l'embarras en particulier dans l'analyse infinitésimale si on prétend à une *arithmétisation stricte*.

Hilbert (dans son discours "Ueber den Zahlbegriff 1900") remarquait (sans se servir explicitement du terme "imprédicatif") qu'on peut éviter l'imprédicativité critique dans l'analyse par la méthode axiomatique. Mais alors on a besoin d'une démonstration de consistance. Et si celle-là est faite par la méthode de Cantor-Dedekind, on réintroduit des imprédicativités critiques.

En ce regard la situation dans la théorie axiomatique des nombres réels a, une similarité à celle dans la théorie axiomatique des ensembles, où les ensembles ont le rôle d'individus, mais quand même sont liés aux prédicats par l'axiome de compréhension.

Dans la métamathématique on appelle un système formel imprédicatif s'il emploie des variables liées d'une espèce dérivée comprenant des éléments formés avec de telles variables liées, ce qui s'exprime formellement par une règle de substitution pour les variables libres correspondantes, ou aussi par un schéma de compréhension.

Il est vrai que dans les sytèmes formels l'imprédicativité est restreinte, parce que les espèces dérivées sont ici formellement délimitées, et c'est aussi la raison pour laquelle le paradoxe de Skolem s'applique aussi à des sytèmes formels imprédicatifs.

Quand à l'attitude des mathématiciens, vous savez que beaucoup d'eux, comme je l'ai mentionné déjà, tiennent à éviter l'imprédicatif au sens critique. Dans la théorie du continu cela dérive du programme d'une stricte arithmématisation. Vous savez qu'il est largement possible ici de se

----

(*) Ici le concept n'est que faiblement précisé : il semble que cela suffira pour la discussion suivante. Des définitions plus précises ont été proposées dans la littérature nouvelle sur les fondements des mathématiques. Cf. en particulier G. Kreisel "La Prédicativité", Bulletin de la Soc. Math. de France 88, 1960, pp. 371-391.

restreindre à des procédures prédicatives, comme cela a été étudié d'abord par H. Weyl et plus en détail maintenant par M. Lorenzen, M. Wang et M. Kreisel.

Cependant la méthode imprédicative est beaucoup plus simple et, de plus, on peut se demander s'il n'est pas plus conforme de regarder le continu comme quelque chose de pas pleinement réductible au nombre naturel. Le phénomène du discret même suppose un milieu continu. Ainsi la méthode imprédicative apparaît comme un bon compromis.

Mais passons de ce point de vue plutôt philosophique à un argument mathématique en faveur de l'admission de l'imprédicatif.

Dans ses analyses de la prédicativité M. Kreisel venait à poser la question jusqu'à quel nombre ordinal, défini par un ordre récursif des nombres naturels, il est possible de prouver d'une manière prédicative la propriété de bon ordre, c'est-à-dire de justifier par des raisonnements prédicatifs l'induction transfinie étendue jusqu'à ce nombre ordinal.

Récemment, M. Fefermann et M. Schütte ont indépendamment trouvé la réponse. Dans la représentation d'une section des nombres ordinaux par un ordre des nombres naturels, donnée dans le livre "Beweistheorie" de Schütte, section qui va assez loin, la limite en question est représentée par l'ordre des nombres précédant 5^2. (Dans la théorie usuelle des ordinaux de la erstent und zweiten Zahlenklasse la définition de ce nombre ordinal est la suivante : on définit d'abord une suite de Normalfunktionen φ_ν, au moyen d'une récursion transfinie par rapport à ν ; $\varphi_0(\alpha) = \omega^\alpha$; $\varphi_{\nu+1}$ est la fonction numérotant les points critiques de φ_ν, c'est-à-dire les valeurs β pour lesquelles $\varphi_\nu(\beta) = \beta$; et φ_λ, pour un indice limite λ, est la fonction numérotant les nombres ordinaux qui, pour chaque $\nu < \lambda$, sont des valeurs de φ_ν. Maintenant on pose $\psi(\nu) = \varphi_\nu(\theta)$; alors ψ est une Normalfunktion ; et le nombre ordinal en question est le premier point critique de ψ).

L'ordre des nombres naturels qui donne la dite représentation de Schütte est assez élémentaire à décrire ; à plus forte raison c'est le cas pour la section initiale des nombres précédant 5^2. Une mathématique qui n'est pas à même de prouver la propriété de bon ordre pour cet ordre - propriété qui en fait consiste - ne peut guère être regardée comme suffisante.

Mais on pourrait faire valoir qu'il est possible de regarder les mathématiques imprédicatives comme systèmes formels pour lesquels on prouve la non-contradiction.

Cela nous conduit aux questions de la métamathématique. Jusqu'à il y a peu de temps des démonstrations de non contradiction étaient données seulement pour des systèmes prédicatifs ou d'autres restreignant la logique des propositions.

Récemment une preuve de non-contradiction pour la théorie des nombres réels, système libre des dites restrictions, a été présentée par M. Spector. Ici les méthodes de preuve ne sont pas au sein du finitisme et même sont plus forte que celles de Gentzen.

Pourtant avec tout cela, nous restons dans le domaine des méthodes intuitionnistes. Mais la question se pose si l'intuitionnisme se restreint à des raisonnements prédicatifs. Je crois que ce n'est pas le cas. En effet, dans les raisonnements intuitionnistes l'espèce des preuves, qui, certes, est une espèce dérivée, est employée de façon qu'on peut, au cours d'une preuve, opérer avec la supposition de l'existence d'une preuve de quelque assertion - ce qui est une méthode imprédicative. Il est vrai qu'on n'a pas besoin d'appliquer dans la métamathématique cette sorte de raisonnements. Mais alors il faut employer d'autres moyens d'un caractère non élémentaire : soit des inductions transfinies pour des ordinaux assez élevés, soit la "Satzinduktion" de Lorenzen, soit des principes généraux concernant des figures ramifiées ("fan theorem", "bar theorem"), soit le concept général d'une fonction calculable d'un type fini. Et d'après ce qui a été constaté en regard des inductions transfinies il faut expecter que chacun de ces moyens, dans ses applications avancées, introduit, soit explicitement, soit implicitement, des imprédicativités.

Ainsi nos expériences indiquent que la métamathématique ne peut guère se restreindre dans ses méthodes à des évidences élémentaires ou même seulement prédicatives.

Néanmoins nous pouvons maintenir l'idée de la métamathématique et aussi rendre justice à la tendance constructive, cependant nous abstenant dans les méthodes de restrictions innécessaires.

Mais puisqu'il se montre que nous avons à admettre des imprédicativités dans la métamathématique constructive, d'autant moins il y a de raison de rejeter en bloc l'imprédicatif dans les mathématiques classiques. Cela naturellement n'empêche pas que nous tendions généralement à éviter des imprédicativités inutiles.

Paul Bernays.