ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

ÉMILE BARY

Analyse algébrique. Nouveaux développemens sur les procédés élémentaires qui peuvent servir à déterminer les valeurs maximums et minimums des fonctions algébriques

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 22 (1831-1832), p. 37-68

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1831-1832__22__37_0>

ANALYSE ALGÉBRIQUE.

Nouveaux développemens sur les procédés élémentaires qui peuvent servir à déterminer les valeurs maximums *et* minimums *des fonctions algébriques ;*

Par M. Emile Bary, professeur de physique au Collége royal de Charlemagne.

On sait que, dans beaucoup de circonstances, il n'est pas nécessaire, pour déterminer un *maximum* ou un *minimum*, de recourir à la méthode générale que fournit le calcul différentiel pour traiter ces sortes de questions. On trouve dans les Élémens d'algèbre et de géométrie analytique de nombreux exemples de maximums et de minimums obtenus par des considérations fort simples qui se résolvent presque toujours dans la proposition suivante : *Une grandeur est réelle ou imaginaire, suivant que de deux autres grandeurs dont elle dépend, l'une surpasse l'autre ou en est surpassée ; et lorsque ces deux dernières sont égales, la première est un* maximum *ou un* minimum. L'application de cette règle, outre que le plus souvent elle conduit au but d'une manière fort simple, jouit encore du précieux avantage de faire facilement distinguer, dans le plus grand nombre des cas, le *maximum* du *minimum* ; ce à quoi on ne peut communément parvenir par l'application des méthodes différentielles qu'à l'aide d'un nouveau calcul.

Il me semble, toutefois, qu'on pourrait rendre encore plus fréquent l'emploi des procédés purement algébriques, dans la recherche des *maximums* et *minimums*. On mettrait ainsi à la portée d'un plus grand nombre de personnes la solution de beaucoup de problèmes curieux de physique et de mécanique. Pour donner des exemples de cette utile extension, que réclament les mathématiques élémentaires, je me propose, dans ce qui va suivre, de traiter diverses questions de *maximums* et de *minimums*, par de simples considérations d'algèbre et de géométrie analytique.

§. I.

Maximums *et* minimums *dans les fonctions d'une seule variable*.

1. Je commencerai par les fonctions d'une seule variable x qui, après avoir été multipliées ou divisées par un facteur numérique connu, peuvent se présenter sous la forme px^n-x^m, p étant positif, m et n entiers et positifs et $n<m$.

Ecrivons

$$px^n-x^m=q\ ;$$

supposons de plus que la variable x et la quantité q qui en dépend doivent être positives, et cherchons le *maximum* ou le *minimum* dont la fonction q est susceptible. Pour le moment, regardons q comme une quantité connue ; nous aurons l'équation trinôme du $m.^{\text{ième}}$ degré,

$$x^m-px^n+q=0\ . \qquad \text{(A)}$$

Elle pourra être remplacée par le système des deux équations

$$y=x^m\ , \quad (1) \qquad\qquad y=px^n-q\ . \quad (2)$$

Imaginons que x et y représentent les distances de points inconnus, situés sur un plan, à deux axes rectangulaires tracés sur ce même plan; les équations (1) et (2) caractériseront respectivement deux paraboles des degrés m et n; et les points d'intersection de ces deux courbes auront pour abscisses les valeurs de x qui satisfont à l'équation (A). Il faudrait donc, pour trouver, par une approximation graphique, les racines réelles de l'équation (A), construire les courbes (1) et (2); mais, pour atteindre notre but, il nous suffit d'avoir une idée de la forme et de la position de chacune d'elles. D'abord nous pouvons supposer les nombres m et n premiers entre eux, car, s'ils avaient un facteur commun, l'équation (A) serait susceptible d'abaissement, et à l'équation proposée nous substituerions une transformée où m serait premier avec n. Examinons les trois cas qui peuvent s'offrir.

Premier cas : m pair et n impair.

La courbe (1) est alors une parabole symétrique par rapport à l'axe des y, et située tout entière au-dessus de l'axe des x, comme *la parabole quarrée* ($y=x^2$). La courbe (2) a une forme analogue à celle de la *parabole cubique* ($y=px^3$); mais le point d'inflexion de la parabole (2), au lieu de se confondre avec l'origine, est situé sur l'axe des y, au-dessus de l'axe des x, et à une distance q de ce dernier axe. Toutes les fois qu'on donnera q, cette courbe sera facile à construire. On voit aisément, sans avoir besoin de tracer une figure, que les portions des deux courbes qui s'élèvent dans l'angle des coordonnées positives pourront se couper en deux points ou se toucher en un seul ou enfin ne pas se rencontre. La courbe (1) est constante de figure et de situation; la figure de la courbe (2) ne dépend que de la quantité connue p; mais son point d'inflexion s'abaissera, et par conséquent sa situation changera à mesure qu'on fera croître q. Si, pour une valeur attribuée à q, les deux courbes ont deux points communs, on rapprochera ces deux points l'un de l'autre, en augmentant la valeur de q. Pour une certaine valeur de q ils coïncideront. Enfin, pour toute valeur plus grande, assignée à q, il n'y aurait plus de rencontre, et x n'aurait aucune valeur réelle. Donc, pour que l'équation (A) admette deux racines réelles et positives, q doit être susceptible d'un *maximum*, répondant au contact des courbes (1) et (2).

Deuxième cas : m impair et n pair.

La courbe (1) ressemblera à la parabole cubique ($y=x^3$), et la courbe (2) à la parabole quarrée ($y=px^2$) ; seulement le sommet de la parabole (2) sera situé sur l'axe des y, au-dessous de l'origine et à une distance q de l'axe des x. Pour une valeur convenable de q, les courbes (1) et (2) (qui se coupent nécessairement en un point situé dans l'angle où les deux coordonnées sont négatives) se rencontrent en deux points dans l'angle des coordonnées positives. q augmentant, le sommet de la courbe (2) s'abaissera, et les deux points deviendront plus voisins ; enfin il y aura, comme dans le premier cas, coïncidence des deux points, et par conséquent contact des deux courbes, lorsque q atteindra sa valeur *maximum*.

Troisième cas : m et n tous deux impairs.

On pourrait traiter directement ce troisième cas, et arriver à la même conclusion que pour les deux premiers ; mais il est aisé de ramener le cas dont il s'agit au précédent, en posant $x=\frac{1}{z}$, ce qui donne successivement pour l'équation (A)

$$\frac{1}{z^m}-\frac{p}{z^n}+q=0\ ,$$

$$z^m-\frac{p}{q}z^{m-n}+\frac{1}{q}=0\ ;$$

et l'on voit que cette dernière équation où m est impair et $m-n$

pair, est de même forme que celle qui vient d'être examinée. (*)

Tout se réduit donc, pour obtenir le *maximum* de la fonction q, à exprimer les conditions analytiques du contact des courbes (1) et (2). Les abscisses des points communs à ces deux courbes doivent évidemment satisfaire à l'équation (A). Pour que ces deux points se réunissent en un seul, il suffira que leurs abscisses soient égales, puisque, dans chacune des deux courbes, à une abscisse correspond une seule ordonnée. Ainsi il faut que l'équation (A) ait deux racines égales. D'après les principes connus, sa dérivée

$$mx^{m-1}-npx^{n-1}=0\ ,$$

devra avoir pour plus grand commun diviseur commun avec elle le facteur du premier degré

$$x-\sqrt[m-n]{\frac{n}{m}p}\ .$$

Remplaçant donc x dans (A) par sa valeur $\sqrt[m.n]{\frac{n}{m}p}$, on trouvera

$$q=\left\{\sqrt[m-n]{\left(\frac{n}{m}\right)^n}-\sqrt[m-n]{\left(\frac{n}{m}\right)^m}\right\}\sqrt[m-n]{p^m}\ .$$

Tel est le *maximum* de la fonction q, et $\sqrt[m-n]{\frac{n}{m}p}$ est la valeur correspondante de la variable x (**).

(*) Ces considérations géométriques se simplifieraient si l'on se bornait aux deux cas de $n=1$ et de $n=m-1$, ce qui suffirait pour la plupart des applications proposees ci-après. Si $n=1$, la courbe (2) se réduit à une ligne droite de direction constante et dont l'ordonnée à l'origine varie avec q, et l'on fera rentrer le cas de $n=m-1$ dans celui de $n=1$, en posant $x=\frac{1}{z}$

(**) Je n'ai point à discuter ici les équations trinômes de la forme $x^m\pm$

Observons que la condition de réalité

$$q \leqq \sqrt[m-n]{p^m\left\{\sqrt[m-n]{\left(\frac{n}{m}\right)^n}-\sqrt[m-n]{\left(\frac{n}{m}\right)^m}\right\}}$$

peut se transformer en celle-ci

$$p \geqq \frac{\sqrt[m]{q^{m-n}}}{\sqrt[m]{\left\{\sqrt[m-n]{\left(\frac{n}{m}\right)^n}-\sqrt[m-n]{\left(\frac{n}{m}\right)^m}\right\}^{m-n}}}\ ;$$

et que si, q étant une quantité donnée, p était une fonction de x de la forme $\frac{x^m+q}{x^n}$, le second membre de cette dernière inégalité ou égalité serait la valeur *minimum* de p.

2. Voici les énoncés d'un certain nombre de problèmes qui ne sont que des cas particuliers de celui que je viens de résoudre.

Quel est le *maximum* de l'ordonnée y, 1.° pour la courbe de Descartes $x^3-3axy+y^3=0$; 2.° pour la courbe $y=\frac{x}{2+x^3}$; 3.° pour la courbe $ax^3-3axy^2+y^4=0$; 4.° pour la courbe $x^4-axy^2+y^4=0$; 5.° pour la courbe $y=\frac{2x^2}{1+2x^3}$?

De tous les cônes droits, à base circulaire, dont la surface convexe est la même, quel est celui qui a le plus grand volume ?

De tous les cylindres droits, à base circulaire, qui ont le mê-

---

$px^n-q=0$; car, puisqu'elles admettent toujours une racine positive, la valeur de leur dernier terme q n'est susceptible ni de *maximum* ni de *minimum*.

me volume, quel est celui dont la surface totale est un *maximum*?

Parmi tous les cylindres droits, à base circulaire, inscriptibles à un cône droit donné, également à base circulaire, quel est celui qui a le plus grand volume?

De tous les cônes ou cylindres droits, à base circulaire, inscriptibles à une sphère donnée, 1.° quel est celui qui a le plus grand volume; 2.° quel est celui qui a la plus grande surface convexe?

Quel est le *maximum* des triangles isocèles inscriptibles à un cercle donné?

Quel est le *maximum* des segmens paraboliques qu'on obtient en coupant par des plans un cône droit limité, à base circulaire?

Quelle est la fraction dont la puissance n diffère le plus de sa puissance m?

Un point matériel, dont on connaît la position sur une droite donnée, et qui ne peut se mouvoir que sur cette droite, est attiré vers un centre situé sur une autre droite donnée, parallèle à la première. En quel point de la second droite ce centre doit-il être placé pour que la composante de la force attractive, dirigée suivant la première droite, soit la plus grande possible? On suppose que l'attraction s'exerce, entre les deux points, en raison inverse de la puissance entière m de la distance qui les sépare.

Ce problème est applicable à la théorie de l'aimantation quand on y fait $m=2$ (*).

La question suivante s'offre au physicien, lorsqu'il veut vérifier, à l'aide de la balance de torsion, la loi des attractions électriques (**).

(*) Voy. le tome second de la Physique d'Haüy.

(**) Voy. le Précis de physique de M. Biot, tom. 1.er, pag. 484 et 485, ou mieux son Traité général, tom. II.

m étant la force de torsion du fil, pour un angle d'un degré, c l'arc initial qui sépare les deux boules, avant qu'on leur ait communiqué des électricités contraires, arc que l'on peut confondre avec sa corde; F étant, pour l'unité de distance, l'attraction mutuelle des deux boules électrisées; enfin $c-x$ étant l'arc que la boule mobile a décrit quand l'équilibre a eu lieu, quelle est la valeur *maximum* de F qui peut amener cet équilibre; et quelle est la valeur de x qui correspond à cette limite?

On suppose que les distances se comptent suivant les arcs, que la force de torsion est proportionnelle à l'arc de torsion, et que les attractions électriques sont en raison inverse des quarrés des distances (*).

3. Je vais maintenant résoudre une question de *minimum*, en me servant encore de la considération du contact des courbes.

Sur la droite qui joint deux points lumineux, quel est le point où la somme des quantités de lumières qui en émanent est la plus petite? On suppose qu'à l'unité de distance les intensités des deux lumières sont b et c, et qu'en général ces intensités suivent la raison inverse des quarrés des distances.

Soit a la distance mutuelle des deux points donnés; soit x la distance du point cherché à l'un d'eux, et soit s la somme des quantités de lumière qui doit être un *minimum*, et qu'on regardera d'abord comme connue. On a l'équation

$$\frac{b}{x^2}+\frac{c}{(a-x)^2}=s. \qquad \text{(A)}$$

(*) J'aurais pu encore placer ici les questions qui ont pour objet la direction la plus avantageuse à donner aux ailes d'un moulin à vent ou aux aubes d'une roue hydraulique. Voyez, à ce sujet, le chapitre *des gaz, considérés comme moteurs*, dans le *Traité des machines*, de M. Hachette, et l'article *aubes*, dans la partie mathematique de l'*Encyclopédie méthodique*.

on peut lui substituer l'ensemble des équations

$$y=\frac{b}{x^2}\,, \qquad (1)$$

$$y=s-\frac{c}{(a-x)^2}\,. \qquad (2)$$

L'équation (1) caractérise une *hyperbole cubique* qui a pour asymptotes les deux axes, et dont les deux branches sont situées audessus de l'axe des x, l'une à la droite de l'axe des y et l'autre à la gauche de cet axe. L'équation (2) appartient à une courbe de même nature, qui a pour asymptotes une parallèle à l'axe des y menée à la droite de l'origine, à une distance a de cet axe, et une parallèle à l'axe des x, élevée au-dessus de ce dernier axe d'une quantité s. Les deux branches de cette courbe s'étendent au-dessous de leur asymptote horizontale, et s'abaissent symétriquement par rapport à leur asymptote verticale. Il est évident que les branches droites des deux courbes se couperont toujours en un point, et qu'il en sera de même de leurs branches gauches. Les abscisses de ces points d'intersection étant l'une $>a$ et l'autre négative, répondront à des points situés sur les prolongemens de la ligne qui joint les deux lumières. Ainsi, quelle que soit la somme s, il y aura toujours deux points placés l'un à la droite des deux points lumineux, l'autre à leur gauche, qui recevront la quantité de lumière donnée.

Quant à la branche droite de la courbe (1) et à la branche gauche de la courbe (2), elles se rencontreront en deux points, si l'ordonnée de la courbe (2) à l'origine, qui est égale à $s-\frac{c}{a^2}$, a une valeur assez grande pour qu'il y ait intersection. Si donc cette condition est remplie, il y aura, entre les deux lumières, deux points qui satisferont encore à la question. Mais si l'on fait décroître s, et par conséquent $s-\frac{c}{a^2}$, l'intersection pourra se changer en contact ; et, pour toute valeur de s plus petite que celle qui donne naissance à ce contact, les deux branches dont il s'agit ne se rencontrant plus, il n'existerait, entre les deux points lumineux, sur la ligne qui les joint, aucun point qui reçût de leur ensemble une si faible quantité de lumière. D'où il suit que, si les deux hyperboles se touchent, la projection de leur point de contact sur l'axe des x est le point où la somme des intensités des deux lumières atteint son *minimum.*

En désignant par X et Y les coordonnées courantes, on trouvera facilement pour les équations des tangentes aux deux courbes (1) et (2), au point (x, y),

$$Y-y=-\frac{2b}{x^3}(X-x)\;,\qquad Y-y=-\frac{2c}{(a-x)^3}(X-x)\;.$$

Si les deux courbes se touchent, les équations des tangentes qui leur sont menées par leur point de contact (x,y) doivent être indentiques. Il faut donc que l'on ait

$$-\frac{2b}{x^3}=-\frac{2c}{(a-x)^3}\;;$$

ou bien

$$\left(\frac{x}{a-x}\right)^3=\frac{b}{c}\;;$$

d'où

$$\frac{x}{a-x}=\sqrt[3]{\frac{b}{c}}\;;$$

et, par suite,

$$x=\frac{a\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}\;.$$

Cette valeur est celle de l'abscisse cherchée ; et, pour le *mini-*

mum de la somme des quantités de lumières reçues, il vient, après les réductions,

$$s=\frac{(\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c})^3}{a^2}.$$

4. Je vais indiquer ici l'énoncé d'un problème connu qu'on pourra traiter par la méthode précédente.

On a deux milieux séparés l'un de l'autre par une surface plane. La vîtesse de la lumière dans le premier est à sa vîtesse dans le second comme 1 est à n. Quelle est la ligne brisée que la lumière doit suivre pour se propager dans le temps le plus court d'un point donné dans le premier milieu à un point donné dans le second?

On reconnaît d'abord, sans calcul, que les rayons *incident* et *réfracté* doivent être situés dans le plan mené, par les deux points donnés, perpendiculairement à la surface de séparation des deux milieux. On trouve ensuite que le temps le plus court correspond au contact de deux hyperboles du second degré, et que la condition analytique de ce contact peut être traduite ainsi : Le sinus de *l'angle de réfraction* doit être au sinus de *l'angle d'incidence* comme n est à 1. C'est la loi fondamentale de la dioptrique.

5. Je choisirai encore, pour exemple, la recherche de la direction que l'homme doit donner à ses pieds (supposés réduits à leurs axes) pour que l'aire du trapèze de sustentation soit un *maximum* (*).

Soit p la longueur du pied, ou, en d'autres termes, la longueur commune des deux côtés non parallèles du trapèze. Prenons pour axe des x la droite qui joint les talons, et pour origine des coor-

(*) Voy. la pag. 86 du tom. XXI du présent recueil.

J. D. G.

données rectangulaires l'une des extrémités de cette ligne, savoir : l'extrémité située vers la gauche. Nommons a la distance connue et constante qui sépare les talons. Pour que le quadrilatère de sustentation soit un trapèze, les axes des pieds devront former des angles égaux avec la ligne a. Il suffit donc de déterminer la direction de l'un de ces axes, de l'axe du pied droit, par exemple, ou, ce qui revient au même, la position de son extrémité antérieure M, c'est-à-dire, de la *pointe du pied droit*. Or, ce point M doit se trouver sur une circonférence de cercle dont l'équation est

$$(x-a)^2+y^2=p^2\ ; \qquad (1)$$

cherchons l'équation d'une seconde courbe sur laquelle le point M doive aussi être situé, pour que le trapèze soit équivalent à un carré b^2, que nous supposerons connu. Cette dernière condition est exprimée par l'équation

$$xy=b^2\ ; \qquad (2)$$

donc le point M cherché doit aussi se trouver sur une hyperbole équilatère, ayant les axes des coordonnées pour asymptotes, et dont le demi-axe est la diagonale $b\sqrt{2}$ du quarré donné b^2. x et y devant être positifs, bornons-nous à considérer celle des deux branches hyperboliques qui s'étend dans l'angle des coordonnées positives. Cette branche pourra successivement couper le cercle en deux points, le toucher, et enfin ne plus le rencontrer, si, en partant d'une valeur très-petite assignée à $b\sqrt{2}$, on fait croître cette diagonale ou b^2 de plus en plus. Or, le point M ne pouvant être construit qu'autant qu'il est commun au cercle et à l'hyperbole, on voit que le *maximum* de b^2 ou de l'aire du trapèze correspond au contact des deux courbes. Les équations de leurs tangentes sont

$$Y-y=-\frac{x-a}{y}(X-x)\ ,\qquad Y-y=-\frac{y}{x}(X-x)\ ;$$

pour le point (x,y) de contact des deux courbes, on a

$$-\frac{x-a}{y}=-\frac{y}{x}\ ,$$

ou

$$y^2=x^2-ax\ . \qquad (3)$$

cette équatioon, combinée avec l'équation (1), donne

$$x^2-ax=p^2-(x-a)^2\ ,$$

d'où l'on tire

$$x^2-\frac{3a}{2}x+\frac{a^2-p^2}{2}=0\ ;$$

ce qui donne

$$x=\frac{3a}{4}\pm\frac{1}{4}\sqrt{a^2+8p^2}\ ;$$

Celle des deux valeurs de x qui répond au signe $-$ du radical doit être rejetée, si elle est positive, parce qu'elle est plus petite que a, ce qui, d'après l'équation (3), rendrait y imaginaire ; et si elle est négative, ce qui a lieu pour $a>p$, il est évident qu'elle doit pareillement être exclue. Je ne m'arrêterai pas à calculer la valeur de y non plus que celle de l'aire *maximum*.

Je remarquerai seulement que la forme

$$\frac{3a}{4}+\frac{a}{4}\sqrt{1+\frac{8p^2}{a^2}}\ ,$$

sous laquelle on peut écrire la valeur convenable de x, indique visiblement qu'à mesure que la distance a augmente, x converge vers a; c'est-à-dire que, plus les pieds sont éloignés l'un de l'autre et plus aussi ils doivent s'approcher du parallélisme pour que l'aire de sustentation soit un *maximum*. Si a est nul, on a

$$x=\frac{p}{\sqrt{2}} \quad ;$$

ce qui prouve qu'alors l'angle des deux pieds doit être droit.

6. D'après ce qui précède on résoudra, sans difficulté, la question suivante :

Diviser un nombre a en deux parties telles que le produit de la m.ieme puissance de la première x par la n.ieme puissance de la seconde $a-x$ soit un *maximum* ?

On trouvera, par la considération du contact d'une parabole du m.ieme degré avec une hyperbole du n.ieme degré, qu'il faut diviser le nombre a en parties proportionnelles aux exposans des puissances dont se compose le produit dont il s'agit.

La méthode qui vient d'être exposée s'applique aussi à la recherche des valeurs *maximums* ou *minimums* d'une fonction transcendante d'une seule variable, pourvu qu'on sache mener des tangentes aux courbes transcendantes dont le contact donne la solution demandée. Je citerai pour exemple cette question :

Quel est le nombre x dont la racine du x.ieme degré est un *maximum* ?

On déduit aisément des conditions du contact d'une logarithmique avec une droite, que le nombre e, base du système népérien, est celui dont la racine d'un degré égal à ce même nombre est un *maximum*.

7. Il me reste à montrer, par un exemple, comment on pourrait opérer sur une fonction qui serait à la fois susceptible d'un *maximum* et d'un *minimum*.

Je prendrai l'expression

$$1-ax-bx^2-cx^3\ ,$$

que je regarderai comme l'ordonnée y d'une courbe rapportée à des axes rectangulaires. Soit donc

$$y=1-ax+bx^2-cx^3\ . \qquad \text{(A)}$$

Je supposerai que l'on sache trouver l'équation d'une tangente à cette courbe. Cette équation est

$$Y-y=(-a+2bx-3cx^2)(X-x)\ . \qquad \text{(B)}$$

Si, dans l'équation (A), l'on fait décroître x depuis 0 jusqu'à $-\infty$, y augmentera progressivement depuis 1 jusqu'à $+\infty$. Si l'on donne ensuite à x des valeurs positives toujours croissantes à partir de 0, y diminuera d'abord, et pourra devenir nul pour une seule valeur ou pour trois valeurs différentes attribuées à x, suivant que l'équation

$$1-ax+bx^2-cx^3=0\ , \qquad \text{(C)}$$

qui ne peut avoir de racines négatives, aura une seule racine réelle ou en aura trois. Enfin, pour des valeurs de x plus grandes, à la fois, que $\frac{1}{a}$ et que $\frac{b}{c}$, et qui croîtront jusqu'à $+\infty$, y sera toujours négative et décroîtra jusqu'à $-\infty$. On voit qu'il arrivera de deux choses l'une, lorsqu'on fera passer x par tous les états de grandeur compris entre $-\infty$ et $+\infty$; ou y décroîtra continuellement de $+\infty$ à $-\infty$, auquel cas il n'admettrait ni *maximum* ni *minimum*, ou y, après avoir diminué de plus en plus, depuis $+\infty$ jusqu'à une certaine limite y_1, augmentera depuis y_1 jusqu'à une seconde limite y_2, à partir de laquelle il diminuera indéfiniment ; ce qui donnera lieu à un *minimum* y_1, et à un *maximum* y_2. Dans le premier cas, la courbe (A) ne couperait qu'en un point l'axe des x et toute droite parallèle à cet axe. Dans le second cas, elle pourrait rencontrer, en trois points, un certain nombre de droites parallèles à cet axe ; et, parmi ces droites, il y en aurait deux pour chacune desquelles deux des trois points d'intersection avec la courbe se confondraient en un seul. Ces deux *sécantes limites* toucheraient évidemment la courbe, l'une au point dont l'ordonnée serait y_1, et l'autre au point dont l'ordonnée serait y_2 (*). Par conséquent, si, à l'aide de l'équation (B), l'on obtient les abscisses x_1, x_2 des deux points de la courbe pour lesquels la tangente est parallèle à l'axe des x, il est clair que les ordonnées y_1 et y_2 de ces points seront l'une *minimum* et l'autre *maximum*, entre les ordonnées voisines ; et de plus que l'ordonnée *minimun* y_1 répondra à la plus petite des deux abscisses trouvées.

Posons donc

$$-a+2bx-3cx^2=0\ ,$$

ou

$$3cx^2-2bx+a=0\ ;$$

il en résultera

$$x_1=\frac{b-\sqrt{b^2-3ac}}{3c}\ ,$$

$$x_2=\frac{b+\sqrt{b^2-3ac}}{3c}\ ;$$

(*) Cette dernière condition ne serait pas rigoureuse si les points, dont les coordonnées sont des *maximums* ou des *minimums*, pouvaient être, pour la courbe, des *points de rebroussemens* ; mais on reconnaît que cette circonstance ne saurait se présenter ici, en ce que la quantité $-a+2bx-3cx^2$, c'est-dire, la tangente tabulaire de l'angle que fait avec l'axe des x une droite qui touche la courbe (A) ne peut devenir infinie pour des valeurs finies données à x.

si l'on a $b^2 > 3ac$, les quantités x_1 et x_2 seront réelles et positives. Substituées successivement à x, dans l'équation (A), elles donneront le *minimum* y_1 et le *maximum* y_2. Remarquons, en passant, que la courbe (A) s'abaissant d'abord à la droite de l'axe des y, et se relevant ensuite pour s'abaisser encore, et cette fois jusqu'à l'infini, il résulte de cette *ondulation* que la courbe coupera l'axe des x en trois points, si y_1 est négatif et y_2 positif, et ne le coupera qu'en un point, si y_1 et y_2 sont de même signe. Ayant donc calculé les expressions de y_1 et y_2, si l'on écrit $y_1 < 0$ et $y_2 > 0$, on aura ainsi les conditions nécessaires pour que l'équation (C) ait ses trois racines réelles.

Si l'on a $b^2 < 3ac$, les valeurs de x_1 et de x_2 seront imaginaires ; aucune tangente ne sera parallèle à l'axe des x, et, par conséquent, la fonction ne sera susceptible ni de *maximum* ni de *minimum*. On peut observer que, dans cette hypothèse, la courbe n'*ondulant pas*, ne rencontrera l'axe des x qu'en un point, d'où il suit que l'équation (C) aura nécessairement deux racines imaginaires.

Dans le cas très-particulier de $b^2 = 3ac$, il vient

$$x_1 = x_2 = \frac{b}{3c}, \qquad y_1 = y_2 = 1 - \frac{b3}{27c^2}.$$

Le calcul nous apprend qu'alors l'ordonnée *minimum* et l'ordonnée *maximum* se confondent. Il est aisé de voir que l'ordonnée $1 - \frac{b^3}{27c^2}$ est plus petite que celles qui s'élèvent à sa gauche, et plus grande que celles qui sont situées à sa droite. Ainsi, à proprement parler, cette ordonnée n'est ni un *maximum* ni un *minimum* Seulement le point (x,y) est, pour la courbe (A), un *point d'inflexion*. Si l'on prend ce point pour origine, c'est-à-dire, si l'on pose dans l'équation (A)

$$x=X+\frac{b}{3c} \quad , \quad y=Y+1-\frac{b^3}{27c^2} \quad ,$$

la transformée se réduit à

$$Y=-cX^3 \; ;$$

équation qui appartient à la plus simple de toutes les paraboles cubiques. Quant à l'équation (C) elle a, dans ce cas, deux racines imaginaires, à moins qu'on ait, en même temps,

$$1-\frac{b^3}{27c^2}=0 \; ;$$

ce qui rendrait les trois racines égales entre elles, comme on peut d'ailleurs le constater par la forme

$$(1-x\sqrt[3]{c})^3=0 \; ,$$

sous laquelle on peut alors présenter cette équation.

On étendrait aisément le même mode de discussion à la fonction

$$1+ax+bx^2+cx^3 \; .$$

Elle admet aussi un *minimum* et un *maximum* si l'on a $b^2>3ac$; seulement les valeurs de x, qui leur correspondent, sont toutes deux négatives.

8. On peut appliquer les solutions du précédent numéro aux formules que M. Biot a construites pour les dilatations absolues de l'eau et de l'alcohol, d'après les expériences de Deluc, de

Gilpius et de Blagden. M. Biot a trouvé, pour l'eau distillée (*),

$$y=1-0,0000548780x+0,0000101395x^2-0,0000000278x^3\ ;$$

1 étant le volume d'une masse constante d'eau distillée à 0°, c'est-à-dire, à la température de la fusion de la glace, et y désignant son volume à x° de Réaumur. Cette formule n'est exacte que pour des valeurs de x comprises entre 0 et 80. On trouvera pour les valeurs de x_1 et de x_2, correspondant l'un au *minimum* de y, l'autre à son *maximum*,

$$x_1=2^\circ,736\ , \qquad x_2=246^\circ,882\ .$$

La valeur de x_2 dépassant de beaucoup les limites entre lesquelles il est permis de compter sur l'exactitude de la formule, on n'en saurait conclure l'existence d'un *maximum* effectif pour le volume de l'eau ; de sorte que cette valeur est étrangère à la question de physique qui nous occupe; mais il n'en est pas de même de la valeur de x_1 qui, réduite en degrés centésimaux, revient à $3^\circ.42$ température à laquelle répond un *minimum* effectif de volume et conséquemment un *maximum de densité.*

Pour une masse donnée d'alcohol, l'expression du volume à x° est de la forme

$$y=1+ax+bx^2+cx^3\ ,$$

du moins entre 0 et 80°. Mais ici le *maximum* et le *minimum* de y ne pouvant avoir lieu que pour des valeurs négatives de x, il s'ensuit qu'entre les limites 0 et 80°, la densité de l'alcohol n'a point de *maximum.*

(*) Voy. son *Traité de physique*, tom. I, pag. 234.

9. La méthode suivie dans le numéro 7 peut être aisément généralisée (*). Quelle que soit la fonction proposée d'une variable x, on regardera cette fonction comme l'ordonnée y d'une courbe. On cherchera les abscisses x_1, x_2, x_3, ... des points de cette courbe pour lesquels la tangente est parallèle à l'axe des x. Chacune de ces abscisses x_1, x_2, x_3, ... répondra *généralement* à un *maximum* ou à un *minimum* y_1, y_2, y_3, ... de l'ordonnée y, et, pour distinguer le *maximum* du *minimum*, on discutera la forme de la courbe, principalement dans le voisinage des points (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), ...

Mais, si la fonction proposée est un peu compliquée, il sera souvent plus simple de considérer d'abord sa valeur comme une quantité connue q, ainsi que je l'ai fait précédemment, d'égaler ensuite à une ordonnée y soit une partie soit un facteur de cette fonction, et enfin de chercher les conditions analytiques du contact des deux courbes dont on aura formé les équations.

10. On peut encore, dans un grand nombre de cas, déterminer des *maximums* ou des *minimums* en se renfermant dans des considérations purement algébrique. Soit demandé, par exemple, le *maximum* d'une fonction q de la forme $px-x^4$, ce qui conduit à l'équation

$$x^4-px+q=0\ ; \qquad \text{(A)}$$

voici comment on parviendra à la condition de réalité pour deux de ses racines, condition qui fournira le *maximum* de q.

(*) Cette méthode n'est que la traduction géométrique du procédé que le calcul différentiel prescrit pour la recherche des *maximums* et des *minimums*. En effet, elle conduit immédiatement à égaler à zéro la dérivée de la fonction proposée, puisque cette fonction, étant l'ordonnée d'une courbe rapportée à deux axes rectangulaires, a pour dérivée la tangente tabulaire de l'angle que fait avec l'axe des x une droite qui touche cette courbe.

Si, dans (A), on change x en $-x$, la transformée

$$x^4+px+q=0\ ,$$

n'aura pas de racines positives ; donc la proposée (A) ne peut admettre de racines négatives. De plus, l'équation (A) étant privée de second terme, la somme de ses racines est nulle. Il faut donc que (A) ait tout au moins deux racines imaginaires, et que celles-ci soient de la forme $-a+b\sqrt{-1}$, $-a-b\sqrt{-1}$. D'où il résulte que le premier membre de (A) doit être divisible par un facteur du second degré de la forme

$$x^2+2ax+a^2+b^2\ .$$

En effectuant la division, on trouve pour quotient

$$x^2-2ax+3a^2-b^2\ ,$$

et pour reste

$$\{4a(b^2-a^2)-p\}x+\{q-3a^4+b^2(b^2-2a^2)\}\ ;$$

Ce reste devant être nul, quelque valeur qu'on donne à x, on a

$$4a(b^2-a^2)-p=0\ ,$$

$$q-3a^4+b^2(b^2-2a^2)=0\ ;$$

ou

$$p=4a(b^2-a^2)\ , \qquad q=3a^4-b^2(b^2-2a^2)\ ;$$

et, pour obtenir les deux autres racines de (A), il faut poser

$$x^2-2ax+3a^2-b^2=0\ .$$

Ecrivons la condition nécessaire pour que ces deux racines soient réelles. Cette condition est

$$a^2 \geqq 3a^2 - b^2 \,, \qquad \text{ou} \qquad b^2 \geqq 2a^2 \,. \qquad (1)$$

Si l'une ou l'autre relation a lieu, nous en conclurons, d'après les valeurs obtenues pour p et q,

$$p \geqq 4a(2a^2 - a^2) \,, \qquad \text{ou} \qquad p \geqq 4a^3 \,, \qquad (2)$$

$$q \leqq 3a^4 \,. \qquad (3)$$

Réciproquement, si les relations (2) et (3) existent, elles entraîneront la relation (1). Or, a, p, q étant des quantités positives, nous pouvons tirer de (2) et (3) les inégalités ou égalités

$$\left(\frac{p}{4}\right)^4 \geqq a^{12} \,,$$

$$a^{12} \geqq \left(\frac{q}{3}\right)^3 \,;$$

multiplions-les, membre à membre, et il viendra

$$\left(\frac{p}{4}\right)^4 \geqq \left(\frac{q}{3}\right)^3 \,,$$

ou

$$q \leqq 3\left(\frac{p}{4}\right)^{\frac{4}{3}} \,,$$

ce qu'il fallait trouver, et ce qu'on peut d'ailleurs déduire de la limite générale trouvée pour q dans le numéro 1.er, en y faisant $m=4$ et $n=1$.

§. II.

Maximums *et* minimums *dans les fonctions de plusieurs variables.*

11. Dans la recherche des *maximums* et *minimums* des fonctions de deux variables, on peut aussi s'appuyer sur des considérations géométriques. Les *maximums* et les *minimums* de ces fonctions correspondent au contact de deux surfaces, dont l'une est constante de forme et de position, tandis que l'autre varie sous l'un ou sous l'autre de ces deux rapports, ou même sous les deux à la fois. Je choisirai pour exemple cette question :

Diviser un nombre en trois parties, telles que la somme de leurs racines quarrées soit un *maximum ?*

Représentons le nombre donné par $3a^2$, et deux de ses parties par x^2 et y^2, la troisième partie sera $3a^2-x^2-y^2$. Nommons m la somme qui doit être un *maximum*, et que d'abord nous supposons donnée. L'équation du problème est

$$x+y+\sqrt{3a^2-x^2-y^2}=m\ . \qquad \text{(A)}$$

Elle pourra être remplacée par ces deux-ci

$$z=x+y\ , \qquad (1)$$

$$x^2+y^2+(z-m)^2=3a^2\ . \qquad (2)$$

Regardons x, y, z comme les distances de points inconnus à trois axes rectangulaires. L'équation (1) est celle d'un plan qui passe par l'origine, et dont les traces sur les plans des xz et des

yz divisent en deux parties égales les angles des axes qui déterminent ces plans. L'équation (2) caractérise une sphère dont le rayon est $a\sqrt{3}$, et dont le centre est situé sur l'axe des z, au-dessus de l'origine, et à une distance m du plan des xy. Tant que m aura une valeur assez petite pour que le plan coupe la sphère, la question sera résolue par les x et les y de tous les points de la circonférence d'intersection. Si l'on augmente m de plus en plus, ce qui revient à élever progressivement le centre de la sphère, le cercle d'intersection diminuera de plus en plus et finira par se réduire à un seul point, c'est-à-dire que le plan deviendra tangent à la sphère ; le contact aura evidemment lieu pour la valeur *maximum* de m. Il nous reste donc à déterminer m de telle sorte que le plan (1) touche la sphère (2).

L'équation du plan tangent à la sphère au point (x, y, z) est

$$xX+yY+(Z-m)(z-m)=3a^2 \;;$$

ou bien

$$Z=\frac{x}{m-z}X+\frac{y}{m-z}Y+m-\frac{3a^2}{m-z} \;.$$

Pour le point (x, y, z) cette équation doit être identique avec l'équation

$$Z=X+Y \;;$$

il faut donc que l'on ait

$$\frac{x}{m-z}=1\,, \qquad \frac{y}{m-z}=1\,, \qquad m-\frac{3a^2}{m-z}=0\,;$$

équations qui, réunies à l'équation (2), nous font connaître x, y, z et m. Il vient

$$y=a\ ,\qquad x=a\ ,\qquad m=3a\ ;$$

ainsi le nombre $3a^2$ doit être divisé en trois parties égales pour que la somme des racines quarrées de ses parties soit un *maximum*, lequel est égal à $3a$.

12. Il serait facile de généraliser l'exposition de cette méthode, mais la discussion des surfaces étant plus difficile que celle des courbes, on conçoit que, pour trouver le *maximum* ou le *minimum* d'une fonction de deux variables indépendantes, l'emploi des considérations purement algébriques est souvent plus avantageux; il est d'ailleurs évidemment nécessaire à l'égard des fonctions de plus de deux variables. Des principes très-simples d'algèbre vont nous fournir une seconde solution du précédent problème.

Résolvons l'équation (A) par rapport à x, comme si nous connaissions y et m. Nous trouverons

$$x=\frac{m-y}{2}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{-m^2+2ym-3y^2+6a^2}\ ;$$

ou, en décomposant le polynome soumis au radical en deux facteurs du premier degré, par rapport à m,

$$x=\frac{m-y}{2}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{(y-m+\sqrt{6a^2-2y^2})(m-y+\sqrt{6a^2-2y^2})}\ .$$

Le second facteur du produit qui est sous le radical est toujours positif, puisque m est nécessairement plus grand que y; donc, pour que la valeur de x soit réelle, il est nécessaire et il suffit que nous ayons

$$m \leqq y+\sqrt{6a^2-2y^2}\ ;$$

donc aussi le second membre de cette relation est la valeur *maximum* de m exprimée en fonction de y ; et si nous posons

$$m=y+\sqrt{6a^2-2y^2}\ , \qquad \text{(B)}$$

il reste, pour la valeur correspondante de x,

$$x=\frac{m-y}{2}\ .$$

Regardons maintenant, dans l'équation (B), y comme fonction de m, et, résolvant cette équation par rapport à y, cherchons la limite que m ne doit pas dépasser pour que y soit réel. Il vient

$$y=\frac{m}{3}\pm\frac{1}{3}\sqrt{2(9a^2-m^2)}\ .$$

Nous voyons que y sera réel tant que nous aurons

$$m \leqq 3a\ ;$$

par conséquent $3a$ est le *maximum* de m ; ce qui réduit l'équation résolue à

$$y=a\ .$$

La substitution des valeurs de m et de y, dans celle de x, donne ensuite

$$x=a\ .$$

Ce qui est exactement conforme à ce que nous avions obtenu plus haut.

13. Ce procédé s'applique aisément à toute fonction de plusieurs variables, lorsqu'elle est du second degré. Il se simplifie toutes les fois que la fonction n'entre qu'à une seule puissance sous le radical qui fait partie de la valeur de la variable par rapport à laquelle on a résolu l'équation du problème. Cette particularité se rencontre dans la question qui suit :

Trouver un point M, tel que la somme des quarrés de ses distances à trois points donnés A, B, C, soit la moindre possible?

On voit d'abord, sans calcul, que, si l'on conçoit un point quelconque situé hors du plan des trois points A, B, C, et qu'on projette ce point sur ce plan, les distances respectives du point pris dans l'espace aux trois points donnés seront plus grandes que les distances correspondantes de sa projection aux trois mêmes points. C'est donc sur le plan déterminé par ces trois points qu'il faut chercher le point demandé.

Plaçons au point A l'origine des coordonnées rectangulaires, et faisons passer l'axe des x par le point B. Les coordonnées du point A seront 0, 0; celles du point B seront x', 0; celles du point C seront x'', y'', et nous désignerons par x, y celles du point m. Soit s^2 la somme dont le *minimum* est inconnu; nous avons à traiter l'équation

$$x^2+y^2+(x-x')^2+y^2+(x-x'')^2+(y-y'')^2=s^2 ,$$

ou bien

$$3y^2-2y''y+3x^2-2(x'+x'')x+x'^2+x''^2+y''^2=s^2 . \qquad \text{(A)}$$

Cette équation, résolue par rapport à y, devient

$$y=\frac{y''}{3}\pm\tfrac{1}{3}\sqrt{3[s^2-3x^2+2(x'+x'')x-x'^2-x''^2]-2y''^2} .$$

L'inconnue s^2 n'entrant qu'à la première puissance sous le radical, la condition de réalité de y nous donne immédiatement, pour le *minimum* de s^2, sans qu'il y ait de transformation à opérer,

$$s^2=3x^2-2(x'+x'')x+x'^2+x''^2-\tfrac{2}{3}y''^2 . \qquad \text{(B)}$$

Dans le cas de ce *minimum*, les deux valeurs de y se réduisent à $\frac{y''}{3}$. Tirant ensuite de (B) la valeur de x, il vient

$$x=\frac{x'+x''}{3}\pm\tfrac{1}{3}\sqrt{3s^2-2x'^2-2x''^2+2x'x''-2y''^2} .$$

En raisonnant comme plus haut (12), nous trouverons, pour le *minimum* définitif de s^2,

$$s^2=\tfrac{2}{3}(x'^2+x''^2-x'x''+y''^2) ;$$

et la valeur correspondante de x est $\frac{x'+x''}{3}$. Le point trouvé

$\left(\frac{x'+x''}{3}, \frac{y''}{3}\right)$ est évidemment le centre de gravité de l'aire du triangle ABC. Donc, etc.

Pour vérifier ce résultat, soient x, y les coordonnées d'un point quelconque M', pris dans le plan des trois points A, B, C. Soit s'^2 la somme des quarrés des distances du point M' à ces trois points. Si, de la valeur s'^2, donnée par le premier membre de l'équation (A), nous retranchons la valeur finale obtenue pour s^2, nous aurons, toutes réductions faites,

$$s'^2-s^2=3\left(x-\frac{x'+x''}{3}\right)^2+3\left(y-\frac{y''}{3}\right)^2.$$

Cette différence, qui est égale au triple quarré de la distance du point M' au centre de gravité M du triangle ABC, est toujours positive ; donc la somme des quarrés des distances de ce dernier point aux trois sommets du triangle est moindre que la somme des quarrés des distances de tout autre point aux mêmes sommets.

14. On pourra chercher pareillement un point tel que la somme des quarrés de ses distances à quatre points donnés dans l'espace soit un *minimum*.

On trouvera, par la méthode précédente, que ce point est le centre de gravité du tétraèdre qui aurait pour sommets les quatre points donnés ; et l'on constatera sans peine, que l'excès de la somme des quarrés des distances d'un point quelconque aux quatre sommets du tétraèdre, sur la somme des quarrés des distances du centre de gravité de ce tétraèdre à ces mêmes sommets, est égal à quatre fois le quarré de la distance du premier point au second.

On résoudra avec la même facilité plusieurs problèmes que je vais énoncer :

Diviser un nombre en trois parties dont le produit soit un *maximum* ?

Diviser un nombre en trois parties telles que la somme des produits de ces parties, deux à deux, soit un *maximum* ?

Diviser un nombre en trois parties telles que la somme de leurs quarrés soit un *minimum* ?

Trouver le *minimum* de l'expression $a^2x^2+b^2y^2+cx+dy+e$?

Déterminer la position et la longueur de la plus courte distance entre deux droites non comprises dans un même plan? Le calcul est fort simple lorsqu'on prend une de ces droites pour l'un des trois axes des coordonnées.

15. Dans les deux dernières solutions que je viens de donner (12) et (13), je n'ai fait qu'étendre, aux *maximums* et *minimums* des fonctions de plusieurs variables, les principes exposés dans les Traités d'algèbre, pour les fonctions d'une variable qui ne sortent pas du second degré. Quand la nature de la question où le choix des inconnues conduit à une équation d'un degré supérieur au second, il est possible, si cette équation est incomplète, que les conditions de réalité, établies au commencement du présent mémoire, deviennent applicables.

Soit proposée, par exemple, la question du *maximum* de surface, parmi tous les triangles isopérimètres.

Le périmètre constant étant représenté par $2p$, et les trois côtés par a, b, c, on sait que l'expression de l'aire du triangle est

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\,.$$

Nous serions entraînés dans des calculs trop compliqués, si nous prenions pour inconnues deux des côtés du triangle demandé. Appelons $2x$ la somme de ces côtés, et $2y$ leur différence; les longueurs des trois côtés seront $x+y$, $x-y$ et $2(p-x)$; et nous aurons pour l'aire s^2 du triangle,

$$\sqrt{p(p-x-y)(p-x+y)(2x-p)}=s^2 ,$$

ou bien

$$\sqrt{p[(p-x)^2-y^2](2x-p)}=s^2 ; \qquad (A)$$

d'où nous tirerons

$$y=\pm\sqrt{(p-x)^2-\frac{s^4}{p(2x-p)}} .$$

La quantité écrite sous le radical devant être positive ou au moins nulle pour que y soit réel, nous en conclurons aisément, pour le *maximum* de s^4,

$$s^4=p(p-x)^2(2x-p) ; \qquad (B)$$

d'où il suit que y doit être égal à zéro ; ce que nous aurions pu d'ailleurs déduire de l'équation (A) sans être obligés de la résoudre, d'après la manière dont y^2 entre dans la valeur de s^2. Nous voyons donc déjà que le triangle doit être isocèle. Regardons présentement $p-x$ comme inconnue. L'équation (B) peut se mettre sous la forme

$$s^4=p(p-x)^2[p-2(p-x)] ;$$

ou sous celle-ci

$$(p-x)^3-\frac{p}{2}(p-x)^2+\frac{s^4}{2p}=0 .$$

La condition générale de réalité obtenue pour deux racines de l'équation trinome considérée au commencement de ce mémoire devient, dans le cas actuel,

$$\frac{s^4}{2p}\leqq\frac{4}{27}\cdot\frac{p^3}{8} .$$

Nous en tirons, pour le *maximum* de s^2,

$$s^2 = \frac{p^2\sqrt{3}}{9},$$

et pour la valeur correspondante de $p-x$,

$$p-x = \frac{p}{3},$$

et conséquemment

$$x = \frac{2p}{3};$$

donc enfin le *maximum* demandé est le triangle équilatéral.

16. Le problème déjà énoncé (14), diviser un nombre en trois parties dont le produit soit un *maximum*, admet une solution semblable à celle qu'on vient de voir, lorsqu'on prend pour inconnues la somme des deux parties et leur différence.

On suivra la même marche pour arriver au *maximum* de la fonction

$$ax^3 - x^4 - y^4 - b^2y^2.$$

Enfin j'indiquerai, pour dernier exemple, la détermination du *maximum* de la fonction

$$syx^4 - 2x^5 + 2ay^4 - 18y^5,$$

on trouvera pour ce *maximum*

$$\frac{2^9}{5^5}a^5;$$

et pour les valeurs correspondantes des variables,

$$x = \frac{8}{5}a, \qquad y = \frac{4}{5}a.$$