ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

BARY

Arithmétique. Sur l'erreur qu'entraîne l'interpolation vulgaire dans l'usage des tables de logarithmes

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 21 (1830-1831), p. 281-284
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1830-1831__21__281_0>

ARITHMÉTIQUE.

Sur l'erreur qu'entraîne l'interpolation vulgaire dans l'usage des tables de logarithmes ;

Par M. Bary, professeur de physique au Collége royal de Charlemagne.

On sait que l'erreur inséparable de l'emploi des parties proportionnelles, dans les calculs par logarithmes, a été calculée par Bertrand, de Genève, qui, pour parvenir à son but, est parti de la formule du binôme, étendue au cas de l'exposant fractionnaire.

Il ne sera peut-être pas inutile, pour ceux qui commencent l'étude de l'algèbre, de montrer ici comment on peut apprécier l'erreur dont il s'agit, en se fondant sur les séries logarithmiques.

I. Supposons d'abord qu'il soit question d'assigner le logarithme qui répond à un nombre donné. Soient n et $n+1$ les deux nombres consécutifs des tables qui comprennent le nombre donné, et $n+x$ ce nombre, x étant une fraction ; soit y ce qu'il faut ajouter à $\mathrm{Log}\,n$, pour obtenir $\mathrm{Log}.(n+x)$; suivant le procédé élémentaire d'interpolation, on calculera y par cette proportion

$$1:\mathrm{Log}.(n+1)-\mathrm{Log}.n::x:y=x\{\mathrm{Log}.(n+1)-\mathrm{Log}.n\}\ .$$

Ainsi l'erreur commise est la différence qui existe entre les deux nombres

$$\text{Log.}(n+x)-\text{Log.}n\ ,$$

$$x\{\text{Log.}(n+1)-\text{Log.}n\}\ .$$

Or, en représentant par M le module des tables vulgaires, on a

$$\text{Log.}(n+x)-\text{Log.}n=\text{Log.}\left(1+\frac{x}{n}\right)=M\left(\frac{x}{n}-\frac{x^2}{2n^2}+\frac{x^3}{3n^3}-\ldots\right)\ ,$$

$$x\{\text{Log.}(n+1)-\text{Log.}n\}=x\text{Log.}\left(1+\frac{1}{n}\right)=M\left(\frac{x}{n}-\frac{x}{2n^2}+\frac{x}{3n^3}-\ldots\right).\quad \text{(A)}$$

Si l'on retranche membre à membre ces deux équations l'une de l'autre, on trouvera, en réduisant, et en désignant par ε l'erreur commise,

$$\varepsilon=\frac{Mx}{n}\left\{\frac{1-x}{2n}-\frac{1-x^2}{3n^2}+\frac{1-x^3}{4n^3}-\frac{1-x^4}{5n^4}+\ldots\ldots\right\}.\quad \text{(B)}$$

Cette série étant convergente, et ayant ses termes alternativement positifs et négatifs, il en résulte qu'on a

$$\varepsilon<\frac{Mx}{n}\cdot\frac{1-x}{2n}\ ;$$

et, puisque M est $<\frac{1}{2}$, et que le maximum de $x(1-x)$ est $\frac{1}{4}$, il en résulte qu'on doit avoir, *à fortiori*,

$$\varepsilon<\frac{1}{16\,n^2}\ .$$

II. Supposons présentement qu'à l'inverse il soit question d'assigner le nombre qui répond à un logarithme donné. Soient n et $n+1$ les deux nombres entiers consécutifs qui interceptent le nombre demandé $n+x$; on déterminera la valeur approchée z de la différence x par la proportion

$$\text{Log.}(n+1)-\text{Log.}n : 1 :: \text{Log.}(n+x)-\text{Log.}n : z=\frac{\text{Log.}(n+x)-\text{Log.}n}{\text{Log.}(n+1)-\text{Log.}n}.$$

On aura donc, en désignant par ε' l'erreur commise

$$\varepsilon'=\frac{\text{Log.}(n+x)-\text{Log.}n}{\text{Log.}(n+1)-\text{Log.}n}-x=\frac{\text{Log.}\left(1+\frac{x}{n}\right)-x\text{Log.}\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\text{Log.}\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\frac{\varepsilon}{\text{Log.}\left(1+\frac{1}{n}\right)}.$$

Cela donne, au moyen des formules (A) et (B)

$$\varepsilon'=\frac{\frac{x}{n}\left(\frac{1-x}{2n}-\frac{1-x^2}{3n^2}+\frac{1-x^3}{4n^3}-\frac{1-x^4}{5n^4}+\ldots\right)}{\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^2}-\frac{1}{4n^3}+\ldots}.$$

De là on conclura évidemment

$$\varepsilon'<\frac{\frac{x}{n}\cdot\frac{1-x}{2n}}{\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}};$$

ou, en réduisant,

$$\varepsilon'<\frac{x(1-x)}{2n-1};$$

et, *à fortiori*,

$$\varepsilon'<\frac{1}{4(2n-1)}.$$

Ceci suppose, au surplus, que les logarithmes tabulaires sont parfaitement exacts, et que conséquemment il en est de même des valeurs de y et de z, ce qui n'a pas lieu réellement. Pour l'évaluation de l'erreur totale, due à l'inexactitude de la proportion et à celle des logarithmes, on peut consulter une note de M. Vincent, insérée à la pag. 19 du XVI.^{me} volume des *Annales*, ou dans la 7.^{me} édition de l'Algèbre de M. Reynaud.