ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

GERGONNE

Géométrie transcendante. De la courbure des surfaces courbes

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 21 (1830-1831), p. 217-248
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1830-1831__21__217_0>

GÉOMÉTRIE TRANSCENDANTE.

De la courbure des surfaces courbes ;

Par M. GERGONNE.

LE sujet qui va présentement nous occuper comportant incomparablement plus de détails que n'en offre la théorie de la courbure des courbes planes, dont nous nous sommes occupés au commencement de ce volume, nous nous trouverons contraints de serrer un peu, pour ne pas donner à ce mémoire une étendue démesurée.

Si, à l'exemple d'Euler et de divers autres géomètres, nous ne voulions que démontrer des théorèmes sur la courbure des surfaces courbes, nous pourrions aisément parvenir à notre but d'une manière plus rapide ; mais nous avons le dessein de parvenir à des formules générales, propres à résoudre immédiatement les principaux problèmes qu'on peut se proposer sur les diverses circonstances que présente la courbure des surfaces. Quelques-unes de ces formules pourront paraître compliquées ; mais, outre qu'elles n'en seront que d'une application plus facile, la parfaite symétrie qui y règne constamment, en même temps qu'elle en rend le calcul aisé à suivre, offre une garantie précieuse de leur exactitude.

I. Soit

$$f(x,y,z)=S=0\,, \qquad (1)$$

l'équation d'une surface quelconque, rapportée à trois axes que, pour plus de simplicité, nous supposerons constamment rectangulaires, et soit (x', y', z') un quelconque des points de cette surface, de telle sorte qu'on ait

$$\mathrm{f}(x', y', z') = S' = 0 \, ; \qquad (2)$$

Pour transporter l'origine en ce point, en conservant aux axes leur direction primitive, il faudra faire, comme l'on sait,

$$x = x' + t \, , \quad y = y' + u \, , \quad z = z' + v \, ; \qquad (3)$$

t, u, v étant les symboles des nouvelles coordonnées. Or, cela revient évidemment à supposer que, dans (2), x', y', z' se changent respectivement en $x'+t$, $y'+u$, $z'+v$, ce qui donnera (tom. XX, pag. 260), en ayant d'ailleurs égard à cette même équation (2),

$$\begin{aligned} 0 = \frac{dS'}{dx'}t + \frac{dS'}{dy'}u + \frac{d^2S'}{dx'^2}\,\frac{t^2}{1.2} &+ 2\frac{d^2S'}{dx'dy'}\,\frac{tu}{1.2} + \frac{d^2S'}{dy'^2}\,\frac{u^2}{1.2} + \ldots\ldots \qquad (4) \\ + \frac{dS'}{dz'}v \qquad &+ 2\frac{d^2S'}{dz'dx'}\,\frac{vt}{1.2} + 2\frac{d^2S'}{dy'dz'}\,\frac{uv}{1.2} \\ &+ \frac{d^2S'}{dz'^2}\,\frac{v^2}{1.2} \end{aligned}$$

et telle sera conséquemment l'équation de la surface (1), rapportée aux nouveaux axes; équation dans laquelle x', y', z' sont trois constantes indéterminées, équivalentes à deux seulement, attendu qu'elles sont liées entre elles par la relation (2). On repassera d'ailleurs au système primitif au moyen des formules (3) qui donnent

$$t = x - x' \, , \quad u = y - y' \, , \quad v = z - z' \, . \qquad (5)$$

L'équation (4) peut être regardée comme fondamentale dans toutes les recherches qui vont suivre.

II. Si l'on veut ne considérer que ce qui se passe dans une portion de la surface (4) s'étendant très-peu autour de la nouvelle origine, c'est-à-dire, autour du point (x', y', z') de la surface (1); comme, pour tous les points de cette portion, t, u, v seront de fort petites quantités, on pourra, sans erreur sensible, négliger, dans l'équation (4), tous les termes de plus d'une dimension par rapport à ces variables. Plus donc cette portion sera petite et plus aussi elle tendra à avoir pour équation

$$\frac{dS'}{dx'}t+\frac{dS'}{dy'}u+\frac{dS'}{dz'}v=0\;; \qquad (6)$$

de sorte que cette équation représentera *rigoureusement* la portion de surface dont il s'agit, lorsque cette portion se réduira à l'origine des t, u, v, c'est-à-dire, au point (x', y', z'). On peut donc dire que l'équation (6) est celle d'un plan qui, en ce point, a exactement même direction que la surface (1). Un tel plan est dit *tangent* à cette surface, au point (x', y', z') qui en dit le *point de contact* avec elle.

III. Par l'origine des t, u, v, soit conduite arbitrairement une droite, exprimée par la triple équation

$$\frac{t}{\text{Cos.}\alpha}=\frac{u}{\text{Cos.}\beta}=\frac{v}{\text{Cos.}\gamma}=r\;; \qquad (7)$$

en tirant de là les valeurs de t, u, v, pour les substituer dans l'équation (4), celle-ci deviendra

$$0=\left\{\begin{array}{l}\frac{dS'}{dx'}\text{Cos.}\alpha\\+\frac{dS'}{dy'}\text{Cos.}\beta\\+\frac{dS'}{dz'}\text{Cos.}\gamma\end{array}\right\}r+\frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l}\frac{d^2S'}{dx'^2}\text{Cos.}^2\alpha+2\frac{d^2S'}{dy'dz'}\text{Cos.}\beta\text{Cos.}\gamma\\+\frac{d^2S'}{dy'^2}\text{Cos.}^2\beta+2\frac{d^2S'}{dz'dx'}\text{Cos.}\gamma\text{Cos.}\alpha\\+\frac{d^2S'}{dz'^2}\text{Cos.}^2\gamma+2\frac{d^2S'}{dx'dy'}\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\beta\end{array}\right\}r^2+\ldots$$

et exprimera les distances de l'origine aux différens points où la droite (7) perce la surface (4). Cette équation est d'abord satisfaite en posant $r=0$, comme on pouvait bien le prévoir, puisque la droite (7) passe par l'origine des t, u, v, qui est un point de cette surface. Les autres points communs à la droite (7) et à la surface (4) seront donnés par l'équation

$$0=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{dS'}{dx'}\text{Cos.}\alpha\\+\dfrac{dS'}{dy'}\text{Cos.}\beta\\+\dfrac{dS'}{dz'}\text{Cos.}\gamma\end{array}\right\}+\frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{d^2S'}{dx'^2}\text{Cos.}^2\alpha+2\dfrac{d^2S'}{dy'dz'}\text{Cos.}\beta\text{Cos.}\gamma\\+\dfrac{d^2S'}{dy'^2}\text{Cos.}^2\beta+2\dfrac{d^2S'}{dz'dx'}\text{Cos.}\gamma\text{Cos.}\alpha\\+\dfrac{d^2S'}{dz'^2}\text{Cos.}^2\gamma+2\dfrac{d^2S'}{dx'dy'}\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\beta\end{array}\right\}r+\ldots$$

Si donc on suppose les angles α, β, γ indéterminés, et qu'on veuille profiter de leur indétermination pour faire en sorte qu'un second point commun vienne se confondre avec le premier, à l'origine des t, u, v, c'est-à-dire, au point (x', y', z'), il faudra que le second membre de cette dernière équation devienne de nouveau divisible par r; ce qui exigera qu'on ait

$$\frac{dS'}{dx'}\text{Cos.}\alpha+\frac{dS'}{dy'}\text{Cos.}\beta+\frac{dS'}{dz'}\text{Cos.}\gamma=0\;; \qquad (8)$$

alors la droite (7) sera dite *tangente* à la surface (4), à l'origine des t, u, v, c'est-à-dire, au point (x', y', z') qui en sera dit le *point de contact* avec elle ; et comme, outre l'équation (8), les trois constantes α, β, γ ne sont liées entre elles que par la seule équation

$$\text{Cos.}^2\alpha+\text{Cos.}^2\beta+\text{Cos.}^2\gamma=1\;;$$

il s'ensuit qu'elles demeurent encore indéterminées ; ce qui revient à dire que, *par un même point quelconque d'une surface courbe,* *on peut mener à cette surface une infinité de tangentes différentes.*

Pour obtenir l'équation du lieu géométrique de toutes ces tangentes, il ne s'agit que d'éliminer Cos.α, Cos.β, Cos.γ de l'équation (8), au moyen de la triple équation (7); ce qui, en supprimant le dénominateur r, conduit de nouveau à l'équation (6) du plan tangent. Ainsi, *les tangentes à une surface courbe, par un quelconque de ses points, sont toutes situées dans le plan tangent à cette surface en ce point*; et il est aisé de voir, qu'à l'inverse, *toute droite menée dans le plan tangent à une surface courbe, par son point de contact avec cette surface, est une tangente à cette même surface en ce même point.* Il en résulte encore que *toute section plane faite dans une surface courbe, en un quelconque de ses points, a pour tangente en ce point l'intersection du plan sécant avec son plan tangent en ce même point.* Et, comme deux droites issues d'un même point déterminent un plan, il s'ensuit que, *si, par l'un quelconque des points d'une surface courbe, on conduit deux plans sécants à cette surface, et en outre, par le même point, des tangentes aux courbes planes que ces deux plans déterminent, le plan conduit par ces deux tangentes sera tangent à la surface courbe en ce point.*

IV. Le plan tangent (6) à la surface (4) au point (x', y', z') peut d'ailleurs couper cette surface, suivant une courbe plane; et leurs points communs seront donnés par l'ensemble des équations de ce plan et de cette surface. On pourra d'ailleurs, dans la recherche de ces points communs, substituer à l'équation du plan tangent ou à celle de la surface courbe, telle combinaison on voudra faire de l'une et de l'autre, de manière cependant à n'en pas élever le degré. On pourra donc, en particulier, dans cette recherche, remplacer l'équation (4) par sa différence avec l'équation (6), et dire, en conséquence, que les points communs à la surface (4) et à son plan tangent sont donnés par la combinaison de l'équation (6) avec la suivante:

$$o=\frac{d^2S'}{dx'^2}\,\frac{t^2}{1.2}+2\,\frac{d^2S'}{dx'dy'}\,\frac{tu}{1.2}+\frac{d^2S'}{dy'^2}\,\frac{u^2}{1.2}+\ldots\ldots$$

$$+2\,\frac{d^2S'}{dz'dx'}\,\frac{vt}{1.2}+2\,\frac{d^2S'}{dy'dz'}\,\frac{uv}{1.2}$$

$$+\frac{d^2S'}{dx'dy'}\,\frac{v^2}{1.2}\ .$$

Si l'on veut ne considérer seulement que ce qui se passe dans le voisinage de l'origine des t, u, v, c'est-à-dire, dans le voisinage du point (x', y', z'), on pourra faire abstraction, dans cette dernière équation, des termes de plus de deux dimensions en t, u, v; de sorte qu'il sera rigoureusement vrai de dire que le point de contact de la surface (1) avec son plan tangent en (x', y', z') ou, ce qui revient au même, de la surface (4), avec son plan tangent à l'origine des t, u, v est donné par l'ensemble de l'équation (6) et de l'équation

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{d^2S'}{dx'^2}\,t^2+2\,\dfrac{d^2S'}{dy'dz'}\,uv\\[2mm] +\dfrac{d^2S'}{dy'^2}\,u^2+2\,\dfrac{d^2S'}{dz'dx'}\,vt\\[2mm] +\dfrac{d^2S'}{dz'^2}\,v^2+2\,\dfrac{d^2S'}{dx'dy'}\,tu\end{array}\right\}=0\ ; \qquad (9)$$

or, cette dernière équation est celle d'une surface du second ordre, de dimensions infiniment petites, laquelle est coupée par le plan (6) suivant une ligne du second ordre, qui a elle-même des dimensions infiniment petites; donc *le point de contact d'une surface quelconque avec le plan tangent en un quelconque de ses points est une ligne du second ordre de dimensions infiniment petites;* ce qui revient encore à dire que *le plan sécant parallèle au plan tan-*

gent en un quelconque des points d'une surface quelconque, détermine, sur cette surface, une courbe plane qui tend de plus en plus à devenir une ligne du second ordre, à mesure que les deux plans sont plus voisins l'un de l'autre. Cette remarque est due à M. Ch. Dupin.

V. Bien que le point de contact d'une surface courbe avec son plan tangent soit une ligne du second ordre de dimensions infiniment petites, il n'en est pas moins du plus grand intérêt, pour les recherches dont nous aurons à nous occuper, de savoir la déterminer, pour chaque plan tangent, en particulier, d'en connaître la nature, la situation sur ce plan, les directions de ses diamètres conjugués ou principaux, ainsi que la direction de ses asymptotes, si elle est hyperbolique. Arrêtons-nous donc, avant d'aller plus loin, à toutes ces diverses déterminations.

Mais, pour élargir un peu la question, et en même temps pour la simplifier, en nous débarrassant momentanément des notations différentielles, considérons les deux équations

$$At+Bu+Cv=0\,, \qquad (10)$$

$$Dt^2+Eu^2+Fv^2+2Guv+2Hvt+2Ktu=L\,, \qquad (11)$$

dont la première est celle d'un plan, passant par l'origine des coordonnées, tandis que la seconde est celle d'une surface du second ordre qui y a son centre ; de sorte qu'elles représentent, par leur ensemble, une ligne du second ordre tracée sur ce plan, et ayant son centre au même point.

Soient r, r' deux demi-diamètres de la surface (11), formant respectivement, avec les axes des t, u, v, des angles α et α', β et β', γ et γ' ; leurs équations seront :

$$\frac{t}{\operatorname{Cos}.\alpha}=\frac{u}{\operatorname{Cos}.\beta}=\frac{v}{\operatorname{Cos}.\gamma}=r\,, \quad (12) \qquad \frac{t}{\operatorname{Cos}.\alpha'}=\frac{u}{\operatorname{Cos}.\beta'}=\frac{v}{\operatorname{Cos}.\gamma'}=r'\,; \quad (13)$$

et on aura, comme l'on sait,

$$\text{Cos.}^2\alpha+\text{Cos.}^2\beta+\text{Cos.}^2\gamma=1\,,\quad(14)\qquad \text{Cos.}^2\alpha'+\text{Cos.}^2\beta'+\text{Cos.}^2\gamma'=1\,.\quad(15)$$

Si l'on veut, en outre, que ces deux demi-diamètres appartiennent à la courbe déterminée par les deux équations, il faudra qu'ils soient sur le plan (10), et que conséquemment leurs équations vérifient la sienne; ce qui donnera encore

$$A\text{Cos.}\alpha+B\text{Cos.}\beta+C\text{Cos.}\gamma=0\,,\quad(16)\qquad A\text{Cos.}\alpha'+B\text{Cos.}\beta'+C\text{Cos.}\gamma'=0\,;\quad(17)$$

et, tant que les six angles α, β, γ, α', β', γ' ne seront liés entre eux que par ces quatre relations, les deux demi-diamètres pourront être quelconques sur le plan de la courbe.

Cherchons présentement quelle nouvelle condition il faudra joindre à celles-là pour que ces deux demi-diamètres soient conjugués l'un à l'autre. Pour cela rappelons-nous que, dans toute ligne du second ordre, si de l'un quelconque des points de la courbe on mène aux deux extrémités d'un même diamètre quelconque deux cordes dites *supplémentaires*, les diamètres respectivement parallèles à ces cordes seront conjugués l'un à l'autre; d'où il résulte qu'à l'inverse, si, menant par les extrémités d'un diamètre des parallèles respectives à deux autres diamètres, ces parallèles se coupent sur la courbe, ces derniers seront conjugués l'un à l'autre.

Cela posé, soit (a, b, c) l'une des extrémités de l'un quelconque des diamètres de la courbe donnée par les équations (10) et (11), de telle sorte qu'on ait, à la fois,

$$Aa+Bb+Cc=0\,,\qquad(18)$$

$$Da^2+Eb^2+Fc^2+2Gbc+2Hca+2Kab=L\,;\qquad(19)$$

l'autre extrémité de ce diamètre sera $(-a, -b, -c)$; et, si l'on mène, par le premier de ces points, une parallèle au diamètre (12) et par le second une parallèle au diamètre (13) ; en désignant par (t' , u' , v') le point de concours de ces deux droites , on devra avoir

$$\frac{t'-a}{\text{Cos}.\alpha}=\frac{u'-b}{\text{Cos}.\beta}=\frac{v'-c}{\text{Cos}.\gamma}\,,\ (20)\qquad \frac{t'+a}{\text{Cos}.\alpha'}=\frac{u'+b}{\text{Cos}.\beta'}=\frac{v'+c}{\text{Cos}\,\gamma'}\,,\ (21)$$

et , pour que ces deux diamètres soient conjugués l'un à l'autre , il faudra que le point (t' , u' , v') vérifie l'équation (11) , c'est-à-dire qu'il faudra qu'on ait

$$Dt'^2+Eu'^2+Fv'^2+2Gu'v'+2Hv't'+2Kt'u'=L\ ;$$

équation qui , en lui retranchant l'équation (19) , peut être mise sous cette forme

$$\left.\begin{array}{l} D(t'-a)(t'+a)+G[(u'-b)(v'+c)+(v'-c)(u'+b)] \\ +E(u'-b)(u'+b)+H[(v'-c)(t'+a)+(t'-a)(v'+c)] \\ +F(v'-c)(v'+c)+K[(t'-a)(u'+b)+(u'-b)(t'+a)] \end{array}\right\}=0\,,$$

chassant alors de cette dernière équation deux quelconques des binomes $t'-a$, $u'-b$, $v'-c$, et deux quelconques des binomes $t'+a$, $u'+b$, $v'+c$, au moyen des relations (20) , (21) , les deux autres binomes en disparaîtront d'eux-mêmes et l'on aura pour la condition à joindre aux quatre déjà établies , afin que les demi-diamètres (12) , (13) soient conjugués l'un à l'autre

$$\left.\begin{array}{l} D\text{Cos}.\alpha\text{Cos}.\alpha'+G(\text{Cos}.\beta\text{Cos}.\gamma'+\text{Cos}.\gamma\text{Cos}.\beta') \\ +E\text{Cos}.\beta\text{Cos}.\beta'+H(\text{Cos}.\gamma\text{Cos}.\alpha'+\text{Cos}.\alpha\text{Cos}.\gamma') \\ +F\text{Cos}.\gamma\text{Cos}.\gamma'+K(\text{Cos}.\alpha\text{Cos}.\beta'+\text{Cos}.\beta\text{Cos}.\alpha') \end{array}\right\}=0\ ;\ (22)$$

On sait que, dans une hyperbole, une seule asymptote fait la fonction de deux diamètres conjugués qui se confondent ; d'où il suit que, si l'on veut que le diamètre (12) soit une asymptote de la courbe supposée hyperbolique, il ne s'agira que de poser $\alpha'=\alpha$, $\beta'=\beta$, $\gamma'=\gamma$; de sorte qu'on aura alors, pour déterminer α, β, γ, outre les équations (14) et (16), ce que devient l'équation (22) dans cette hypothèse, c'est-à-dire

$$\left\{\begin{array}{l} D\text{Cos.}^2\alpha+2G\text{Cos.}\beta\text{Cos.}\gamma \\ +E\text{Cos.}^2\beta+2H\text{Cos.}\gamma\text{Cos.}\alpha \\ +F\text{Cos.}^2\gamma+2K\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\beta \end{array}\right\}=0\ . \qquad (23)$$

Si donc on substituait, tour à tour, dans la double équation (12), les doubles valeurs de $\text{Cos.}\alpha$, $\text{Cos.}\beta$, $\text{Cos.}\gamma$ données par les équations (14), (16), (23), on obtiendrait ainsi les équations des deux asymptotes de la section supposée hyperbolique. Or, cela revient à éliminer $\text{Cos.}\alpha$, $\text{Cos.}\beta$, $\text{Cos.}\gamma$ entre la double équation (12) et les trois autres ; ce qui peut se faire beaucoup plus simplement en substituant dans celles-ci les valeurs des trois cosinus tirées de l'autre, ce qui donnera, outre l'équation (10), l'équation

$$Dt^2+Eu^2+Fv^2+2Guv+2Hvt+2Ktu=0\ , \qquad (24)$$

qui, dans le cas d'une section hyperbolique, appartient ainsi au système de deux plans qui coupent le plan (10) suivant les asymptotes de la courbe.

Si l'on veut que les deux diamètres conjugués (12) et (13) soient rectangulaires ou principaux, il faudra aux cinq conditions déjà obtenues ajouter encore la suivante :

$$\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\alpha'+\text{Cos.}\beta\text{Cos.}\beta'+\text{Cos.}\gamma\text{Cos.}\gamma'=0\ , \qquad (25)$$

qui exprime que les deux diamètres conjugués (12) et (13) sont perpendiculaires l'un à l'autre ; et alors nos six angles se trouveront complètement déterminés, puisqu'ils seront liés entre eux par six relations distinctes.

Mais comme ces relations demeurent invariables, lorsqu'on y permute simultanément entre eux α et α', β et β', γ et γ', il s'ensuit que ces six angles doivent être déterminables par trois équations seulement en α, β, γ, donnant deux valeurs pour le cosinus de chacun de ces trois angles. Deux de ces équations sont les équations (14) et (16), et la troisième s'obtient en éliminant deux quelconques des quantités Cos.α', Cos.β', Cos.γ' entre les équations (17), (22), (25) ; ce qui en fait aussi disparaître la troisième et donne

$$\left\{\begin{array}{l}(B\text{Cos}\,\gamma-C\text{Cos}.\beta)(D\text{Cos}.\alpha+K\text{Cos}.\beta+H\text{Cos}.\gamma)\\+(C\text{Cos}.\alpha-A\text{Cos}.\gamma)(E\text{Cos}.\beta+G\text{Cos}.\gamma+K\text{Cos}.\alpha)\\+(A\text{Cos}.\beta-B\text{Cos}.\alpha)(F\text{Cos}.\gamma+H\text{Cos}.\alpha+G\text{Cos}.\beta)\end{array}\right\}. \qquad (26)$$

Telle est donc l'équation qu'il faudra combiner avec les équations (14) et (16) pour obtenir les doubles valeurs de Cos.α, Cos.β, Cos.γ qui conviennent aux deux diamètres principaux.

Si, ayant déterminé les doubles valeurs des trois cosinus, au moyen de ces équations, on les substitue tour à tour dans la double équation (12), on obtiendra les équations des deux diamètres principaux de la courbe donnée par les deux équations (10) et (11). Or, cela revient évidemment à éliminer Cos.α, Cos.β, Cos.γ entre la double équation (12) et les équations (16) et (26), ce qu'on peut faire beaucoup plus simplement en substituant dans les deux dernières les valeurs de deux quelconques de ces trois cosinus, ce qui en fera aussi disparaître le troisième et donnera, outre l'équation (10), l'équation

$$\left.\begin{array}{l}\quad(Bv-Cu)(Dt+Ku+Hv)\\+(Ct-Av)(Eu+Gv+Kt)\\+(Au-Bt)(Fv+Ht+Gu)\end{array}\right\}=0\ ;\qquad(27)$$

équation commune à deux plans coupant le plan (10) suivant les diamètres principaux de la courbe donnée par les équations (10) et (11). Il est visible d'ailleurs que ces deux plans se coupent suivant une droite donnée par la double équation

$$\frac{t}{A}=\frac{u}{B}=\frac{v}{C}\ ,\qquad(28)$$

perpendiculaire au plan (10) de la courbe et passant par son centre ; de manière qu'ils sont eux-mêmes perpendiculaires à ce plan.

Si, dans l'équation (11), on substitue pour t, u, v leurs valeurs en r, données par la double équation (12), elle deviendra

$$\left.\begin{array}{l}\quad D\mathrm{Cos.}^2\alpha+2G\mathrm{Cos.}\beta\mathrm{Cos.}\gamma\\+E\mathrm{Cos.}^2\beta+2H\mathrm{Cos.}\gamma\mathrm{Cos.}\alpha\\+F\mathrm{Cos.}^2\gamma+2K\mathrm{Cos.}\alpha\mathrm{Cos.}\beta\end{array}\right\}r^2=L\ ;\qquad(29)$$

de sorte que, si l'on substitue, tour à tour, dans cette dernière, pour $\mathrm{Cos.}\alpha$, $\mathrm{Cos.}\beta$, $\mathrm{Cos.}\gamma$, les doubles valeurs données par les équations (14), (16), (26), on obtiendra les deux valeurs de r^2 qui conviennent aux demi-diamètres principaux de la courbe. Donc aussi on obtiendra l'équation de laquelle dépendent ces deux valeurs de r^2, en éliminant ces trois cosinus entre les quatre équations (14), (16), (26), (29).

Mais, pour faciliter l'élimination, tâchons de remplacer les équations (16) et (29) par deux autres qui soient linéaires par rapport à ces mêmes cosinus. Pour cela remarquons d'abord que l'équation (29) peut être écrite comme il suit :

$$\left.\begin{array}{l} r^2(D\mathrm{Cos}.\alpha+K\mathrm{Cos}.\beta+H\mathrm{Cos}.\gamma)\mathrm{Cos}.\alpha \\ +r^2(E\mathrm{Cos}.\beta+G\mathrm{Cos}.\gamma+K\mathrm{Cos}.\alpha)\mathrm{Cos}.\beta \\ +r^2(F\mathrm{Cos}.\gamma+H\mathrm{Cos}.\alpha+G\mathrm{Cos}.\beta)\mathrm{Cos}.\gamma \end{array}\right\}=L\,. \quad (30)$$

Or, si présentement on élimine, tour à tour, entre les deux équations (26) et (30) chacun des trinomes

$$D\mathrm{Cos}.\alpha+K\mathrm{Cos}.\beta+H\mathrm{Cos}.\gamma\ ,$$

$$E\mathrm{Cos}.\beta+G\mathrm{Cos}.\gamma+K\mathrm{Cos}.\alpha\ ;$$

$$F\mathrm{Cos}.\gamma+H\mathrm{Cos}.\alpha+G\mathrm{Cos}.\beta\ ;$$

en opérant toutes les simplifications que pourront permettre les relations (14) et (16), on trouvera

$$\left.\begin{array}{l} B(F\mathrm{Cos}.\gamma+H\mathrm{Cos}.\alpha+G\mathrm{Cos}.\beta) \\ -C(E\mathrm{Cos}.\beta+G\mathrm{Cos}.\gamma+K\mathrm{Cos}.\alpha) \end{array}\right\}r^2=(B\mathrm{Cos}.\gamma-C\mathrm{Cos}.\beta)L\ ,$$

$$\left.\begin{array}{l} C(D\mathrm{Cos}.\alpha+K\mathrm{Cos}.\beta+H\mathrm{Cos}.\gamma) \\ -A(F\mathrm{Cos}.\gamma+H\mathrm{Cos}.\alpha+G\mathrm{Cos}.\beta) \end{array}\right\}r^2=(C\mathrm{Cos}.\alpha-A\mathrm{Cos}.\gamma)L\ ,$$

$$\left.\begin{array}{l} A(E\mathrm{Cos}.\beta+G\mathrm{Cos}.\gamma+K\mathrm{Cos}.\alpha) \\ -B(D\mathrm{Cos}.\alpha+K\mathrm{Cos}.\beta+H\mathrm{Cos}.\gamma) \end{array}\right\}r^2=(A\mathrm{Cos}.\beta-B\mathrm{Cos}.\alpha)L\ ;$$

équations linéaires dont chacune est évidemment comportée par les deux autres, et dont deux quelconques peuvent remplacer les équations (26) et (29). Si, dans les deux premières, par exemple, on substitue pour Cos.γ sa valeur donnée par l'équation (16), elles deviendront

$$\left\{\begin{array}{l}\{[C^2K-C(AG+BH)+ABF]r^2-ABL\}\text{Cos}.\alpha\\+\{(B^2F-2BCG+C^2E)r^2-(B^2+C^2)L\}\text{Cos}.\beta\end{array}\right\}=0\ ,\quad (31)$$

$$\left\{\begin{array}{l}\{[C^2K-C(AG+BH)+ABF]r^2-ABL\}\text{Cos}.\beta\\+\{(C^2D-2CAH+A^2F)r^2-(C^2+A^2)L\}\text{Cos}.\alpha\end{array}\right\}=0\ ,\quad (32)$$

ce qui donnera, en transposant, multipliant membre à membre, et supprimant le facteur Cos.α, Cos.β, commun aux deux membres de l'équation résultante

$$\{[C^2K-C(AG+BH)+ABF]r^2-ABL\}^2$$

$$-\{(B^2F-2BCG+C^2E)r^2-(B^2+C^2)L\}\{(C^2D-2CAH+A^2E)r^2-(C^2+A^2L)\}=0$$

En développant, réduisant, divisant par C^2, ordonnant et posant, pour abréger

$$\left\{\begin{array}{l}A^2(G^2-EF)+2BC(DG-HK)\\+B^2(H^2-FD)+2CA(EH-KG)\\+C^2(K^2-DE)+2AB(FK-GH)\end{array}\right\}=P\ ,\quad (33)$$

$$\left\{\begin{array}{l}B^2D-2BCG+C^2E\\+C^2E-2CAH+A^2F\\+A^2F-2ABK+B^2D\end{array}\right\}=Q\ ,\quad (34)$$

$$A^2+B^2+C^2=R\ ,\quad (35)$$

cette équation deviendra

$$Pr^4+QLr^2-RL^2=0\,, \tag{36}$$

et donnera, pour ses quatre racines, ne différant deux à deux que par le signe, les quatre demi-diamètres principaux de la courbe exprimée par l'ensemble des équations (10) et (11).

Le dernier terme de l'équation (36) étant essentiellement négatif, cette équation ne pourra signifier quelque chose qu'autant que les coefficiens P et QL ne seront pas tous deux négatifs. Si alors P est positif, quel que soit d'ailleurs le signe de QL, l'équation aura toujours une variation et une permanence; c'est-à-dire, que les deux valeurs de r^2 seront alors de signes contraires; de sorte que, des quatre valeurs de r deux seront réelles et les deux autres imaginaires, la courbe donnée par les deux équations (10) et (11) sera donc alors une hyperbole.

Si, dans le cas de P positif, Q se trouvait être nul, les deux valeurs de r^2 ne différant alors l'une de l'autre que par le signe, l'hyperbole serait équilatère.

Lorsqu'au contraire P est négatif, l'équation (36) ne peut signifier quelque chose qu'autant que QL est positif; et comme alors cette équation présente deux variations, les deux valeurs de r^2 doivent être positives, et, par suite, les valeurs de r sont toutes quatre réelles; la courbe doit donc être une ellipse.

Si l'on avait $P=0$ et QL positifs; des deux valeurs de r^2 une serait infinie et l'autre finie et positive; des quatre valeurs de r deux seraient donc infinies et les deux autres finies et réelles; la courbe se réduirait donc ainsi à deux droites parallèles, d'autant plus rapprochées l'une de l'autre que L serait plus petit, et qui conséquemment se confondraient en une seule droite, si L était nul.

Pour que la courbe soit un cercle, c'est-à-dire, pour qu'elle ait une infinité de systèmes de diamètres principaux, il faut qu'en exprimant que le diamètre (12) est un diamètre principal, Cos α, Cos.β, Cos.γ demeurent indéterminés, et que conséquemment il en soit de même de leurs rapports deux à deux ; il faudra donc que, dans les équations (31) et (32), on ait

$$(B^2F-2BCG+C^2E)r^2=(B^2+C^2)L\ , \qquad (37)$$

$$(C^2D-2CAH+A^2F)r^2=(C^2+A^2)L\ , \qquad (38)$$

$$\{C^2K-C(AG+BH)+ABF\}r^2=ABL\ .$$

En prenant la somme des produits respectifs de ces trois équations par A^2, B^2 et $-2AB$, on obtient, en réduisant et divisant par C^2,

$$(A^2E-2ABK+B^2G)r^2=(A^2+B^2)L\ ; \qquad (39)$$

équation qui peut conséquemment remplacer la dernière. Les équations (37), (38), (39) donneront la valeur du quarré du rayon du cercle, sous trois formes différentes ; et, en égalant entre elles les trois expressions obtenues, on obtiendra, pour la double condition exprimant que la courbe donnée par les équations (10) et (11) est un cercle,

$$\frac{B^2F-2BCG+C^2E}{B^2+C^2}=\frac{C^2D-2CAH+A^2F}{C^2+A^2}=\frac{A^2E-2ABK+B^2G}{A^2+B^2}\ . \qquad (40)$$

VI. Pour appliquer présentement ces divers résultats au point de contact d'une surface courbe avec son plan tangent, il ne s'agit que de faire coïncider respectivement les deux équations (10) et (11) avec les deux équations (6) et (9), ce qui se réduit simplement à poser, en supprimant les accens,

$$\left.\begin{array}{lll}
A=\dfrac{dS}{dx}\,, & B=\dfrac{dS}{dy}\,, & C=\dfrac{dS}{dz}\,,\\[2ex]
D=\dfrac{d^2S}{dx^2}\,, & E=\dfrac{d^2S}{dy^2}\,, & F=\dfrac{d^2S}{dz^2}\,,\\[2ex]
G=\dfrac{d^2S}{dydz}\,, & H=\dfrac{d^2S}{dzdx}\,, & K=\dfrac{d^2S}{dxdy}\,.
\end{array}\right\}\quad(41)$$

et l'on obtiendra ainsi les propositions suivantes :

1.° *Il existe, en général, sur toute surface courbe une courbe à double courbure le long de laquelle les points de contact des plans tangens sont tous paraboliques. Cette courbe partage la surface courbe en deux régions dans l'une desquelles les points de contact des plans tangens sont hyperboliques tandis, que, dans l'autre, ils sont elliptiques.*

Si $S=f(x,y,z)=0$ est l'équation de la surface courbe dont il s'agit, rapportée à trois axes rectangulaires quelconques, la courbe à double courbure, dont il vient d'être question, sera donnée sur cette surface, par son intersection avec une autre surface ayant (33) pour équation

$$\left\{\begin{array}{l}
\left(\dfrac{dS}{dx}\right)^2\left[\left(\dfrac{d^2S}{dydz}\right)^2-\dfrac{d^2S}{dy^2}\,\dfrac{d^2S}{dz^2}\right]+2\,\dfrac{dS}{dy}\,\dfrac{dS}{dz}\left(\dfrac{d^2S}{dx^2}\,\dfrac{d^2S}{dydz}-\dfrac{d^2S}{dzdx}\,\dfrac{d^2S}{dxdy}\right)\\[2ex]
+\left(\dfrac{dS}{dy}\right)^2\left[\left(\dfrac{d^2S}{dzdx}\right)^2-\dfrac{d^2S}{dz^2}\,\dfrac{d^2S}{dx^2}\right]+2\,\dfrac{dS}{dz}\,\dfrac{dS}{dx}\left(\dfrac{d^2S}{dy^2}\,\dfrac{d^2S}{dzdx}-\dfrac{d^2S}{dxdy}\,\dfrac{d^2S}{dydz}\right)\\[2ex]
+\left(\dfrac{dS}{dz}\right)^2\left[\left(\dfrac{d^2S}{dxdy}\right)^2-\dfrac{d^2S}{dx^2}\,\dfrac{d^2S}{dy^2}\right]+2\,\dfrac{dS}{dx}\,\dfrac{dS}{dy}\left(\dfrac{d^2S}{dz^2}\,\dfrac{d^2S}{dxdy}-\dfrac{d^2S}{dydz}\,\dfrac{d^2S}{dzdx}\right)
\end{array}\right\}=0\,,\quad(42)$$

Un point (x,y,z) de la surface $S=0$ appartient à la région des points de contact hyperboliques ou à la région des points de contact elliptiques, suivant que, pour ce point, le premie membre de l'équation (42) est positif ou négatif.

2.° *Dans la région des points de contact hyperboliques, il existe une courbe à double courbure le long de laquelle les points de contact sont tous des hyperboles équilatères. Cette courbe à double courbure subdivise cette région en deux autres telles que, dans l'une, l'angle des asymptotes est aigu, tandis qu'il est obtus dans l'autre.*

Cette nouvelle courbe à double courbure est donnée, sur la surface $S=0$, par son intersection avec une autre surface ayant pour équation (34)

$$\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{dS}{dy}\right)^2\frac{d^2S}{dz^2}-2\frac{dS}{dy}\frac{dS}{dz}\frac{d^2S}{dydz}+\left(\frac{dS}{dz}\right)^2\frac{d^2S}{dy^2}\\ +\left(\frac{dS}{dz}\right)^2\frac{d^2S}{dx^2}-2\frac{dS}{dz}\frac{dS}{dx}\frac{d^2S}{dzdx}+\left(\frac{dS}{dx}\right)^2\frac{d^2S}{dz^2}\\ +\left(\frac{dS}{dx}\right)^2\frac{d^2S}{dy^2}-2\frac{dS}{dx}\frac{dS}{dy}\frac{d^2S}{dxdy}+\left(\frac{dS}{dy}\right)^2\frac{d^2S}{dx^2}\end{array}\right\}=0\,. \quad (43)$$

3.° *Enfin dans la région des points de contact elliptiques, il se trouve un nombre limité de ces points de contact qui sont circulaires.* Ce sont les points de contact de cette dernière sorte que Monge a appelé des *Ombilic.*

Les points ombilicaux de la surface $S=0$ sont ceux où cette surface est percée par la courbe à double courbure donnée (40) par la double équation

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\left(\frac{dS}{dy}\right)^2\frac{d^2S}{dz^2}-2\frac{dS}{dy}\frac{dS}{dz}\frac{d^2S}{dydz}+\left(\frac{dS}{dz}\right)^2\frac{d^2S}{dy^2}}{\left(\frac{dS}{dy}\right)^2+\left(\frac{dS}{dz}\right)^2}\\
=&\frac{\left(\frac{dS}{dz}\right)^2\frac{d^2S}{dx^2}-2\frac{dS}{dz}\frac{dS}{dx}\frac{d^2S}{dzdx}+\left(\frac{dS}{dx}\right)^2\frac{d^2S}{dz^2}}{\left(\frac{dS}{dz}\right)^2+\left(\frac{dS}{dx}\right)^2}\\
=&\frac{\left(\frac{dS}{dx}\right)^2\frac{d^2S}{dy^2}-2\frac{dS}{dx}\frac{dS}{dy}\frac{d^2S}{dxdy}+\left(\frac{dS}{dy}\right)^2\frac{d^2S}{dx^2}}{\left(\frac{dS}{dx}\right)^2+\left(\frac{dS}{dy}\right)^2}
\end{aligned}\right\}. \quad (44)$$

On peut ajouter à tout ceci que, généralement pour que deux droites menées par un quelconque (x, y, z), des points de la surface $S=0$, et formant avec les axes des coordonnées des angles α et α', β et β', γ et γ', soient des diamètres conjugués du point de contact de cette surface avec son plan tangent en ce point, il faut qu'on ait (14), (15), (16), (17), (22),

$$\mathrm{Cos.}^2\alpha+\mathrm{Cos.}^2\beta+\mathrm{Cos.}^2\gamma=1\,, \quad (45) \qquad \mathrm{Cos.}^2\alpha'+\mathrm{Cos.}^2\beta'+\mathrm{Cos.}^2\gamma'=1\,, \quad (46)$$

$$\frac{dS}{dx}\mathrm{Cos.}\alpha+\frac{dS}{dy}\mathrm{Cos.}\beta+\frac{dS}{dz}\mathrm{Cos.}\gamma=0\,, \quad (47) \qquad \frac{dS}{dx}\mathrm{Cos.}\alpha'+\frac{dS}{dy}\mathrm{Cos.}\beta'+\frac{dS}{dz}\mathrm{Cos.}\gamma'=0\,, \quad (48)$$

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{d^2S}{dx^2}\mathrm{Cos.}\alpha\mathrm{Cos.}\alpha'+\frac{d^2S}{dydz}(\mathrm{Cos.}\beta\mathrm{Cos.}\gamma'+\mathrm{Cos.}\gamma\mathrm{Cos.}\beta')\\
+&\frac{d^2S}{dy^2}\mathrm{Cos.}\beta\mathrm{Cos.}\beta'+\frac{d^2S}{dzdx}(\mathrm{Cos.}\gamma\mathrm{Cos.}\alpha'+\mathrm{Cos.}\alpha\mathrm{Cos.}\gamma')\\
+&\frac{d^2S}{dz^2}\mathrm{Cos.}\gamma\mathrm{Cos.}\gamma'+\frac{d^2S}{dxdy}(\mathrm{Cos.}\alpha\mathrm{Cos.}\beta'+\mathrm{Cos.}\beta\mathrm{Cos.}\alpha')
\end{aligned}\right\}=0\,. \quad (49)$$

En outre, pour un point déterminé quelconque (x', y', z') de la surface $S=0$, pour lequel on a conséquemment $S'=0$, les directions des diamètres principaux du point de contact sont donnés par les intersections du plan tangent (6) avec les deux plans donnés (27) par l'équation unique

$$\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{dS'}{dy'}v-\frac{dS'}{dz'}u\right)\left(\frac{d^2S'}{dx'^2}t+\frac{d^2S'}{dx'dy'}u+\frac{d^2S'}{dz'dx'}v\right)\\ \left(\frac{dS'}{dz'}t-\frac{dS'}{dx'}v\right)\left(\frac{d^2S'}{dy'^2}u+\frac{d^2S'}{dy'dz'}v+\frac{d^2S'}{dx'dy'}t\right)\\ \left(\frac{dS'}{dx'}u-\frac{dS'}{dy'}t\right)\left(\frac{d^2S'}{dz'^2}v+\frac{d^2S'}{dz'dx'}t+\frac{d^2S'}{dy'dz'}u\right)\end{array}\right\}=0\,. \quad (50)$$

Enfin si ce point de contact est hyperbolique, les directions de ses asymptotes seront déterminées par les intersections du même plan tangent (6) avec les deux plans donnés (24) par l'équation unique

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{d^2S'}{dx'^2}t^2+2\frac{d^2S'}{dy'dz'}uv\\ +\frac{d^2S'}{dy'^2}u^2+2\frac{d^2S'}{dz'dx'}vt\\ +\frac{d^2S'}{dz'^2}v^2+2\frac{d^2S'}{dx'dy'}tu\end{array}\right\}=0\,. \quad (51)$$

On rendra ces deux derniers résultats propres au système de coordonnées primitifs, en y remplaçant t, u, v par leurs valeurs $x-x'$, $y-y'$, $z-z'$, données par les formules (5).

Par l'un quelconque des points d'une surface courbe, on peut toujours concevoir, tracée sur cette surface, une courbe telle que sa tangente, en chacun de ses points, soit dirigée suivant l'un des diamètres principaux du point de contact du plan tangent en ce point. Une telle courbe, qui est en général une courbe à double courbure, est ce que Euler a appelé une *ligne de courbure* de la surface dont il s'agit. Il est clair qu'il doit, en général, en passer deux par chacun des points de cette surface, et qu'elles doivent s'y couper orthogonalement, comme le font les deux diamètres principaux de ce point, considéré comme point de contact du plan tangent. Toutes les lignes de courbure d'une même série doivent aller concourir aux différens points ombilicaux, tandis que celles de l'autre série, à mesure qu'elles se rapprochent d'un tel point, tendent de plus en plus à devenir des cercles, dont il est le centre commun. Les lignes de courbure d'une surface courbe, que nous verrons se représenter plus loin sous un autre aspect, partagent donc cette surface en quadrilatères curvilignes, ayant leurs quatre angles droits, comme le font les méridiens et les parallèles dans l'ellipsoïde de révolution.

VII. En repassant au système primitif, au moyen des formules (5), l'équation (6) du plan tangent à la surface $S=0$, en un quelconque (x', y', z') de ses points, devient

$$\frac{dS'}{dx'}(x-x')+\frac{dS'}{dy'}(y-y')+\frac{dS'}{dz'}(z-z')=0\ ; \qquad (52)$$

et rien, d'après cela, ne sera plus facile que d'obtenir l'équation du plan tangent à une surface proposée, en un point donné sur cette surface.

Si le point (x', y', z') n'est pas donné, cette équation (52), en y mettant pour x', y', z' tous les systèmes de valeurs compatibles avec la relation $S'=0$, pourra indistinctement exprimer tous les plans tangens à la surface proposée. On pourra donc alors profiter de l'indétermination de x', y', z' pour assujétir le plan tangent à deux conditions données. Comme cela ne saurait offrir de difficulté, d'après ce que nous avons déjà dit (pag. 9), sur les tangentes aux courbes planes, nous ne nous y arrêterons pas.

D'après l'équation (52), la *normale* à la surface $S=0$ au point (x', y', z') de cette surface, c'est-à-dire, la perpendiculaire à son plan tangent en ce point, aura pour sa double équation

$$\frac{x-x'}{\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}x'}}=\frac{y-y'}{\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}y'}}=\frac{z-z'}{\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}z'}}, \qquad (53)$$

et rien, d'après cela, ne sera plus facile que d'obtenir les équations de la normale à une surface proposée, en un point donné sur cette surface.

Si le point (x', y', z') n'est pas donné, cette équation (53), en y mettant pour x', y', z', tous les systèmes de valeur compatibles avec la relation $S'=0$, pourra indistinctement exprimer toutes les normales à la surface proposées. On pourra donc alors profiter de l'indétermination de x', y', z', pour assujétir la normale à une condition donnée. Comme cela ne saurait offrir de difficulté, d'après ce que nous avons déjà dit (pag. 12) sur les normales aux courbes planes, nous ne nous y arrêterons pas.

VIII. D'après ce qui vient d'être dit, si, pour abréger, on représente par Ω le second membre de l'équation (4) et par Ω' ce que devient ce second membre, lorsque t, u, v se changent respectivement en t', u', v', l'équation du plan tangent à la surface (4), en un quelconque (t', u', v') de ses points, sera

$$\frac{\mathrm{d}\Omega'}{\mathrm{d}t'}(t-t')+\frac{\mathrm{d}\Omega'}{\mathrm{d}u'}(u-u')+\frac{\mathrm{d}\Omega'}{\mathrm{d}v'}(v-v')=0,$$

ou bien encore

$$\frac{d\Omega'}{dt'}t+\frac{d\Omega'}{du'}u+\frac{d\Omega'}{dv'}v=\frac{d\Omega'}{dt'}t'+\frac{d\Omega'}{du'}u'+\frac{d\Omega'}{dv'}v', \qquad (54)$$

sous la condition

$$\begin{aligned}0=\Omega'=\frac{dS}{dx}t'+\frac{dS}{dy}u'+\frac{d^2S}{dx^2}\frac{t'^2}{1.2}&+2\frac{d^2S}{dxdy}\frac{t'u'}{1.2}+\frac{d^2S}{dy^2}\frac{u'^2}{1.2}+\ldots\ldots \qquad (55)\\ +\frac{dS}{dz}v' \qquad &+2\frac{d^2S}{dzdx}\frac{v't'}{1.2}+2\frac{d^2S}{dydz}\frac{u'v'}{1.2}\\ &+\frac{d^2S}{dz^2}\frac{v'^2}{1.2},\end{aligned}$$

en ne conservant, pour la facilité de l'écriture, que les accens de t, u, v. Or, cela donne

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\Omega'}{dt'}&=\frac{dS}{dx}+\left(\frac{d^2S}{dx^2}t'+\frac{d^2S}{dxdy}u'+\frac{d^2S}{dzdx}v'\right)+\ldots\ldots\\ \frac{d\Omega'}{du'}&=\frac{dS}{dy}+\left(\frac{d^2S}{dy^2}u'+\frac{d^2S}{dydz}v'+\frac{d^2S}{dxdy}t'\right)+\ldots\ldots\\ \frac{d\Omega'}{dv'}&=\frac{dS}{dz}+\left(\frac{d^2S}{dz^2}v'+\frac{d^2S}{dzdx}t'+\frac{d^2S}{dydz}u'\right)+\ldots\ldots\end{aligned}\right\} \qquad (56)$$

et, par suite,

$$\begin{aligned}\frac{d\Omega'}{dt'}t'+\frac{d\Omega'}{du'}u'+\frac{d\Omega'}{dv'}v'=\frac{dS}{dx}t'+\frac{dS}{dy}u'&+\frac{d^2S}{dx^2}t'^2+2\frac{d^2S}{dxdy}t'u'+\frac{d^2S}{dy^2}u'^2+\ldots\ldots\\ +\frac{dS}{dz}v' \qquad &+2\frac{d^2S}{dzdx}v't'+2\frac{d^2S}{dydz}u'v'\\ &+\frac{d^2S}{dz^2}v'^2\end{aligned}$$

ou bien, en ayant égard à la relation (55),

$$\frac{d\Omega'}{dt'}t'+\frac{d\Omega'}{du'}u'+\frac{d\Omega'}{dv'}v'=\frac{d^2S}{dx^2}\frac{t'^2}{1.2}+2\frac{d^2S}{dxdy}\frac{t'u'}{1.2}+\frac{d^2S}{dy^2}\frac{u'^2}{1.2}+\ldots$$
$$+2\frac{d^2S}{dzdx}\frac{v't'}{1.2}+2\frac{d^2S}{dxdy}\frac{u'v'}{1.2}$$
$$+\frac{d^2S}{dz^2}\frac{v'^2}{1.2}$$

ce qui donnera, en substituant dans l'équation (54) du plan tangent en (t', u', v'),

$$\left.\begin{array}{l}\left[\frac{dS}{dx}+\left(\frac{d^2S}{dx^2}t'+\frac{d^2S}{dxdy}u'+\frac{d^2S}{dzdx}v'\right)+\ldots\right]t\\ +\left[\frac{dS}{dy}+\left(\frac{d^2S}{dy^2}u'+\frac{d^2S}{dydz}v'+\frac{d^2S}{dxdy}t'\right)+\ldots\right]u\\ +\left[\frac{dS}{dz}+\left(\frac{d^2S}{dz^2}v'+\frac{d^2S}{dzdx}t'+\frac{d^2S}{dydz}u'\right)+\ldots\right]v\end{array}\right\}=\frac{d^2S}{dx^2}\frac{t'^2}{1.2}+2\frac{d^2S}{dxdy}\frac{t'u'}{1.2}+\frac{d^2S}{dy^2}\frac{u'}{1.2}+\ldots\ldots;\quad(57)$$
$$+2\frac{d^2S}{dzdx}\frac{v't'}{1.2}+2\frac{d^2S}{dxdy}\frac{u'v'}{1.2}$$
$$+\frac{d^2S}{dz^2}\frac{v'^2}{1.2}$$

Ce plan coupera le plan tangent à l'origine des t, u, v suivant une droite qui sera donnée par l'ensemble de cette dernière équation et de l'équation

$$\frac{dS}{dx}t+\frac{dS}{dy}u+\frac{dS}{dz}v=0\;;\qquad(58)$$

on pourra d'ailleurs, dans la recherche de cette droite, substituer à l'une ou à l'autre équation toute combinaison qu'on en voudra faire, de manière à n'en pas élever le degré. On pourra, par exemple, substituer à l'équation (57) sa différence avec l'équation (58), et dire, en conséquence, que l'intersection du plan tangent à l'origine des t, u, v, avec le plan tangent (t', u', v') est donnée par l'équation (58), combinée avec l'équation

$$\left\{\begin{array}{l} \left(\frac{d^2S}{dx^2}t'+\frac{d^2S}{dxdy}u'+\frac{d^2S}{dzdx}v'+\ldots.\right)t \\ +\left(\frac{d^2S}{dy^2}u'+\frac{d^2S}{dydz}v'+\frac{d^2S}{dxdy}t'+\ldots.\right)u \\ +\left(\frac{d^2S}{dz^2}v'+\frac{d^2S}{dzdx}t'+\frac{d^2S}{dydz}u'+\ldots.\right)v \end{array}\right\}=\begin{array}{l}\frac{d^2S}{dx^2}\frac{t'^2}{1.2}+2\frac{d^2S}{dxdy}\frac{t'u'}{1.2}+\frac{d^2S}{dy^2}\frac{u'^2}{1.2}+\ldots..;\\ +2\frac{d^2S}{dzdx}\frac{v't'}{1.2}+2\frac{d^2S}{dydx}\frac{u'v'}{1.2}\\ +\frac{d^2S}{dz^2}\frac{v'^2}{1.2}\end{array} \quad (59)$$

et, quant à la droite qui joindra les deux points de contact, elle sera donnée par la double équation

$$\frac{t}{t'}=\frac{u}{u'}=\frac{v}{v'}. \quad (60)$$

Si présentement on suppose que le point (t', u', v') est très-voisin de l'origine des t, u, v, à raison de la petitesse de t', u', v', on pourra, sans erreur sensible, supprimer, dans l'équation (59), tous les termes de plus d'une dimension, par rapport à ces coordonnées ; ce qui la changera en celle-ci :

$$\left\{\begin{array}{l} \left(\frac{d^2S}{dx^2}t'+\frac{d^2S}{dxdy}u'+\frac{d^2S}{dzdx}v'\right)t \\ +\left(\frac{d^2S}{dy^2}u'+\frac{d^2S}{dydz}v'+\frac{d^2S}{dxdy}t'\right)u \\ +\left(\frac{d^2S}{dz^2}v'+\frac{d^2S}{dzdx}t'+\frac{d^2S}{dydz}u'\right)v \end{array}\right\}=0\ ;$$

ou bien encore

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{d^2S}{dx^2}tt'+\frac{d^2S}{dydz}(uv'+vu') \\ +\frac{d^2S}{dy^2}uu'+\frac{d^2S}{dzdx}(vt'+tv') \\ +\frac{d^2S}{dz^2}vv'+\frac{d^2S}{dxdy}(tu'+ut') \end{array}\right\}=0\ ; \quad (61)$$

et telle sera alors l'équation qu'il faudra combiner avec l'équation (58) pour avoir, par approximation, la droite intersection des deux plans. Ces deux équations donneront donc rigoureusement cette droite, lorsque le point (t', u', v') sera venu se confondre avec l'origine des t, u, v. On voit, en effet, que les deux plans qui, déterminent cette droite, passant alors l'un et l'autre par l'origine, cette droite y passera elle-même; et, comme l'un de ces plans est le plan tangent à l'origine, cette droite sera devenue elle-même, comme la droite (58), une tangente à la surface courbe en ce point.

Soient présentement α et α', β et β', γ et γ' les angles que font ces deux droites avec les trois axes, de telle sorte qu'on ait

$$\frac{t}{\mathrm{Cos}.\alpha}=\frac{u}{\mathrm{Cos}.\beta}=\frac{v}{\mathrm{Cos}.\gamma}, \quad (62) \qquad \frac{t'}{\mathrm{Cos}.\alpha'}=\frac{u'}{\mathrm{Cos}.\beta'}=\frac{v'}{\mathrm{Cos}.\gamma'}; \quad (63)$$

il en résultera d'abord

$$\mathrm{Cos}.^2\alpha+\mathrm{Cos}.^2\beta+\mathrm{Cos}.^2\gamma=1, \quad (64) \qquad \mathrm{Cos}.^2\alpha'+\mathrm{Cos}.^2\beta'+\mathrm{Cos}.^2\gamma'=1; \quad (65)$$

ensuite, parce que ces droites sont dans le plan tangent (53), on aura

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}\mathrm{Cos}.\alpha+\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}y}\mathrm{Cos}.\beta+\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}z}\mathrm{Cos}.\gamma=0, \quad (66) \qquad \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}\mathrm{Cos}.\alpha'+\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}y}\mathrm{Cos}.\beta'+\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}z}\mathrm{Cos}.\gamma'=0, \quad (67)$$

enfin, en éliminant de l'équation (61), au moyen des équations (62) et (63), deux quelconques des coordonnées t, u, v, et deux quelconques des coordonnées t', u', v', les deux coordonnées restantes disparaîtront d'elles-mêmes, et il viendra

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{Cos}.\alpha\mathrm{Cos}.\alpha'+\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}(\mathrm{Cos}.\beta\mathrm{Cos}.\gamma'+\mathrm{Cos}.\gamma\mathrm{Cos}.\beta') \\ +&\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}y^2}\mathrm{Cos}.\beta\mathrm{Cos}.\beta'+\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}z\mathrm{d}x}(\mathrm{Cos}.\gamma\mathrm{Cos}.\alpha'+\mathrm{Cos}.\alpha\mathrm{Cos}.\gamma') \\ +&\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}z^2}\mathrm{Cos}.\gamma\mathrm{Cos}.\gamma'+\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}(\mathrm{Cos}.\alpha\mathrm{Cos}.\beta'+\mathrm{Cos}.\beta\mathrm{Cos}.\alpha') \end{aligned}\right\}=0; \quad (68)$$

or, ces cinq dernières équations sont exactement les mêmes que les équations (45), (46), (47), (48), (49), qui expriment que deux tangentes en un même point de la surface (4) sont dirigées suivant des diamètres conjugués de ce point, considéré comme point de contact du plan tangent ; on a donc ce théorème :

Si un angle dièdre mobile et variable est constamment circonscrit à une surface courbe ; à mesure que l'angle s'ouvrira, son arrête et la droite qui joindra les points de contact de ses deux faces s'approcheront de plus en plus de la surface courbe, de laquelle elles deviendront enfin deux tangentes en un même point, lorsque l'angle dièdre sera devenu égal à deux angles droits ; et ces deux tangentes auront alors les directions de deux diamètres conjugués de leur point de concours, considéré comme point de contact de la surface courbe avec son plan tangent ; de sorte que la direction de l'une de ces tangentes étant déterminées à l'avance, celle de l'autre le sera aussi.

A raison de cette propriété, M. Ch. Dupin, qui en a fait le premier la remarque, a désigné un tel système de tangentes sous la dénomination de *tangentes conjuguées* ; d'où l'on voit que, non seulement, *une surface courbe a, en chacun de ses points, une infinité de systèmes de deux tangentes conjuguées*, mais qu'en outre *il n'est aucune tangente à une surface courbe à laquelle il n'en réponde une autre comme conjuguée de celle-là.* On voit aussi que *les directions de deux tangentes conjuguées rectangulaires ne sont autre chose que celles des deux diamètres principaux de leur point de concours, considéré comme point de contact de la surface avec son plan tangent.* A raison de cette propriété, les tangentes conjuguées de cette dernière sorte sont appelées des *tangentes conjuguées principales.*

Il est encore facile de conclure de tout cela, avec M. Ch. Dupin, que *si, à une surface courbe quelconque, on circonscrit arbitrairement une surface développable, la tangente à la ligne de contact, en l'un quelconque de ses points, et la génératrice rectiligne de la surface développable qui répondra à ce point, seront deux tangentes conjuguées de la surface en ce même point.*

IX. Soit conduit par l'origine des t, u, v, un plan arbitraire, ayant pour équation

$$At+Bu+Cv=0\ , \qquad (69)$$

dans laquelle il est permis de supposer, sans que le plan cesse d'être quelconque,

$$A^2+B^2+C^2=1\ . \qquad (70)$$

Ce plan déterminera, dans la surface (4), une section plane. Proposons-nous de déterminer le centre et le rayon de courbure de cette section pour celui des points de son périmètre qui répond à l'origine des coordonnées. D'après ce que nous avons déjà dit (pag. 24) sur les centres et rayons de courbure des courbes planes, il faudra pour cela concevoir deux normales à la section, la première par l'origine des t, u, v, et la seconde par un autre point (t', u', v') de son périmètre. Ces deux normales concourront en un point qui variera de position sur la première, à mesure que le point (t', u', v') variera lui-même de position sur la courbe, et qui deviendra le centre de courbure cherché, lorsque ce point (t', u', v') sera venu se confondre avec l'origine.

Les deux normales seront évidemment données par l'équation (69) combinée tour à tour avec celles de deux plans conduits par l'origine des t, u, v et par le point (t', u', v'), perpendiculairement aux tangentes à la courbe en ces deux points ; et ces tangentes, à leur tour, seront données, en combinant tour à tour l'équation (69) avec celles des tangentes à la surface (4), en ces deux mêmes points.

Imitons, par le calcul, cette conception géométrique. D'abord, parce que le point (x', y', z') est supposé un des points du périmètre de la section ; on doit avoir, à la fois,

$$At'+Bu'+Cv'=0\ , \quad (71) \qquad \Omega'=0\ ; \quad (55)$$

Ω ayant la même signification que ci-dessus (VIII), ce qui permettra de mettre l'équation (69) sous la forme

$$A(t-t')+B(u-u')+C(v-v')=0\ . \qquad (72)$$

Les plans tangens à la surface (4), en ces deux points, auront respectivement pour équations

$$\frac{dS}{dx}t+\frac{dS}{dy}u+\frac{dS}{dz}v=0\ ; \qquad (58)$$

$$\frac{d\Omega'}{dt'}(t-t')+\frac{d\Omega'}{du'}(u-u')+\frac{d\Omega'}{dv'}(v-v')=0\ . \qquad (54)$$

En combinant la première avec l'équation (69) et la seconde avec l'équation (72), on obtiendra, pour les équations des tangentes à la section, en ces deux points,

$$\frac{t}{B\frac{dS}{dz}-C\frac{dS}{dy}}=\frac{u}{C\frac{dS}{dx}-A\frac{dS}{dz}}=\frac{v}{A\frac{dS}{dy}-B\frac{dS}{dx}}\ , \qquad (73)$$

$$\frac{t-t'}{B\frac{d\Omega'}{dv'}-C\frac{d\Omega'}{du'}}=\frac{u-u'}{C\frac{d\Omega'}{dt'}-A\frac{d\Omega'}{dv'}}=\frac{v-v'}{A\frac{d\Omega'}{du'}-B\frac{d\Omega'}{dt'}}\ . \qquad (74)$$

En conséquence, les plans conduits par ces mêmes points, perpendiculairement à ces mêmes tangentes, auront respectivement pour équations

$$\left(B\frac{dS}{dz}-C\frac{dS}{dy}\right)t+\left(C\frac{dS}{dx}-A\frac{dS}{dz}\right)u+\left(A\frac{dS}{dy}-B\frac{dS}{dx}\right)v=0\ , \qquad (75)$$

$$\left(B\frac{d\Omega'}{dv'}-C\frac{d\Omega'}{du'}\right)(t-t')+\left(C\frac{d\Omega'}{dt'}-A\frac{d\Omega'}{dv'}\right)(u-u')+\left(A\frac{d\Omega'}{du'}-B\frac{d\Omega'}{dt'}\right)(v-v')=0\ , \qquad (76)$$

et couperont le plan (69) suivant les normales menées à la section par l'origine et par le point (t', u', v') ; on aura donc le point de concours de ces deux normales, en combinant entre elles les trois équations (69), (75), (76). En traitant donc ces trois équations comme celles d'un même problème déterminé, opérant toutes les simplifications que pourra permettre la relation (70), et posant, pour abréger,

$$M=\left\{\begin{array}{l}(Bv'-Cu')\frac{d\Omega'}{dt'}\\ +(Ct'-Av')\frac{d\Omega'}{du'}\\ +(Au'-Bt')\frac{d\Omega'}{dv'}\end{array}\right\}, \quad (77) \qquad N=\left\{\begin{array}{l}\left(B\frac{dS}{dz}-C\frac{dS}{dy}\right)\frac{d\Omega'}{dt'}\\ +\left(C\frac{dS}{dx}-A\frac{dS}{dz}\right)\frac{d\Omega'}{du'}\\ +\left(A\frac{dS}{dy}-B\frac{dS}{dx}\right)\frac{d\Omega'}{dv'}\end{array}\right\}; \quad (78)$$

on obtiendra, pour les équations du point de concours des deux normales,

$$\left.\begin{aligned}
t&=\frac{M}{N}\left\{\frac{dS}{dx}-A\left(A\frac{dS}{dx}+B\frac{dS}{dy}+C\frac{dS}{dz}\right)\right\},\\
u&=\frac{M}{N}\left\{\frac{dS}{dy}-B\left(A\frac{dS}{dx}+B\frac{dS}{dy}+C\frac{dS}{dz}\right)\right\},\\
v&=\frac{M}{N}\left\{\frac{dS}{dz}-C\left(A\frac{dS}{dx}+B\frac{dS}{dy}+C\frac{dS}{dz}\right)\right\};
\end{aligned}\right\}\qquad(79)$$

de sorte qu'en désignant par ρ la distance de ce point de concours à l'origine des t, u, v, ce qui donnera

$$\rho^2=t^2+u^2+v^2\,,\qquad(80)$$

on aura, en faisant toujours usage de la relation (70),

$$\rho^2=\frac{M^2}{N^2}\left\{\begin{aligned}
&\left(B\frac{dS}{dz}-C\frac{dS}{dy}\right)^2\\
+&\left(C\frac{dS}{dx}-A\frac{dS}{dz}\right)^2\\
+&\left(A\frac{dS}{dy}-B\frac{dS}{dx}\right)^2
\end{aligned}\right\};\qquad(81)$$

employant donc cette relation pour éliminer $\frac{M}{N}$ des formules (79), on trouvera

$$\left.\begin{aligned}
t&=\frac{\rho\left\{\frac{dS}{dx}-A\left(A\frac{dS}{dx}+B\frac{dS}{dy}+C\frac{dS}{dz}\right)\right\}}{\sqrt{\left(B\frac{dS}{dz}-C\frac{dS}{dy}\right)^2+\left(C\frac{dS}{dx}-A\frac{dS}{dz}\right)^2+\left(A\frac{dS}{dy}-B\frac{dS}{dx}\right)^2}}\\
u&=\frac{\rho\left\{\frac{dS}{dy}-B\left(A\frac{dS}{dx}+B\frac{dS}{dy}+C\frac{dS}{dz}\right)\right\}}{\sqrt{\left(B\frac{dS}{dz}-C\frac{dS}{dy}\right)^2+\left(C\frac{dS}{dx}-A\frac{dS}{dz}\right)^2+\left(A\frac{dS}{dy}-B\frac{dS}{dx}\right)^2}}\\
v&=\frac{\rho\left\{\frac{dS}{dz}-C\left(A\frac{dS}{dx}+B\frac{dS}{dy}+C\frac{dS}{dz}\right)\right\}}{\sqrt{\left(B\frac{dS}{dz}-C\frac{dS}{dy}\right)^2+\left(C\frac{dS}{dx}-A\frac{dS}{dz}\right)^2+\left(A\frac{dS}{dy}-B\frac{dS}{dx}\right)^2}}
\end{aligned}\right\}\qquad(82)$$

A mesure que le point (x', y', z') se rapprochera de l'origine, en suivant le périmètre de la section, le point (82) tendra de plus en plus à devenir, pour cette origine, le centre de courbure de la courbe, et ρ à être son rayon de courbure pour le même point.

Si présentement on substitue dans M et N (77) et (78), pour $\frac{d\Omega'}{dt'}$, $\frac{d\Omega'}{du'}$, $\frac{d\Omega'}{dv'}$, leurs valeurs (56), on trouvera

$$\left\{\begin{array}{l} A\left(\frac{dS}{dz}u'-\frac{dS}{dy}v'\right)+(Bv'-Cu')\left(\frac{d^2S}{dx^2}t'+\frac{d^2S}{dxdy}u'+\frac{d^2S}{dzdx}v'\right)+\ldots\ldots \\ +B\left(\frac{dS}{dx}v'-\frac{dS}{dz}t'\right)+(Ct'-Av')\left(\frac{d^2S}{dy^2}u'+\frac{d^2S}{dydz}v'+\frac{d^2S}{dxdy}t'\right)+\ldots\ldots \\ +C\left(\frac{dS}{dy}t'-\frac{dS}{dx}u'\right)+(Au'-Bt')\left(\frac{d^2S}{dz^2}v'+\frac{d^2S}{dzdx}t'+\frac{d^2S}{dydz}u'\right)+\ldots\ldots \end{array}\right\}, \quad (83)$$

$$N=\left\{\begin{array}{l} \left(B\frac{dS}{dz}-C\frac{dS}{dy}\right)\left(\frac{d^2S}{dx^2}t'+\frac{d^2S}{dxdy}u'+\frac{d^2S}{dzdx}v'\right)+\ldots \\ +\left(C\frac{dS}{dx}-A\frac{dS}{dz}\right)\left(\frac{d^2S}{dy^2}u'+\frac{d^2S}{dydz}v'+\frac{d^2S}{dxdy}t'\right)+\ldots \\ +\left(A\frac{dS}{dy}-B\frac{dS}{dx}\right)\left(\frac{d^2S}{dz^2}v'+\frac{d^2S}{dzdx}t'+\frac{d^2S}{dydz}u'\right)+\ldots\ldots \end{array}\right\}; \quad (84)$$

valeurs qui devront être substituées dans la formule (81). Mais, si l'on suppose que le point (t', u', v') est très-voisin de l'origine des t, u, v, on pourra, sans erreur sensible, négliger, dans M et N, les termes de plus d'une dimension, par rapport à ces coordonnées, ce qui donnera simplement

$$\frac{M}{N}=-\frac{\left(B\frac{dS}{dz}-C\frac{dS}{dy}\right)t'+\left(C\frac{dS}{dx}-A\frac{dS}{dz}\right)u'+\left(A\frac{dS}{dy}-B\frac{dS}{dx}\right)v'}{\left\{\begin{array}{l} \left(B\frac{dS}{dz}-C\frac{dS}{dy}\right)\left(\frac{d^2S}{dx^2}t'+\frac{d^2S}{dxdy}u'+\frac{d^2S}{dzdx}v'\right) \\ +\left(C\frac{dS}{dx}-A\frac{dS}{dz}\right)\left(\frac{d^2S}{dy^2}u'+\frac{d^2S}{dydz}v'+\frac{d^2S}{dxdy}t'\right) \\ +\left(A\frac{dS}{dy}-B\frac{dS}{dx}\right)\left(\frac{d^2S}{dz^2}v'+\frac{d^2S}{dzdx}t'+\frac{d^2S}{dydz}u'\right) \end{array}\right\}}; \quad (85)$$

mais, dans la même hypothèse, l'équation $\Omega'=0$ se réduit à

$$\frac{dS}{dx}t'+\frac{dS}{dy}u'+\frac{dS}{dz}v'=0, \qquad (86)$$

qui, combinée avec (71), donne

$$\frac{t'}{B\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}z}-C\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}y}}=\frac{u'}{C\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}-A\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}z}}=\frac{v'}{A\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}y}-B\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}}\ ; \tag{87}$$

de sorte que, λ étant un multiplicateur convenable, on aura

$$t'=\lambda\left(B\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}z'}-C\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}y'}\right),\quad u'=\lambda\left(C\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}x'}-A\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}z'}\right),\quad v'=\lambda\left(A\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}y'}-B\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}x'}\right).$$

En substituant ces valeurs dans la formule (85), λ disparaîtra de lui-même, et nous aurons

$$\frac{M}{N}=-\frac{\left(B\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}z'}-C\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}y'}\right)^2+\left(C\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}x'}-A\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}z'}\right)^2+\left(A\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}y'}-B\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}x'}\right)^2}{\left\{\begin{array}{l}\left(B\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}z'}-C\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}y'}\right)^2\frac{\mathrm{d}^2S'}{\mathrm{d}x'^2}+2\left(C\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}x'}-A\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}z'}\right)\left(A\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}y'}-B\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}x'}\right)\frac{\mathrm{d}^2S'}{\mathrm{d}y'\mathrm{d}z'}\\+\left(C\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}x'}-A\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}z'}\right)^2\frac{\mathrm{d}^2S'}{\mathrm{d}y'^2}+2\left(A\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}y'}-B\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}x'}\right)\left(B\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}z'}-C\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}y'}\right)\frac{\mathrm{d}^2S'}{\mathrm{d}z'\mathrm{d}x'}\\+\left(A\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}y'}-B\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}x'}\right)^2\frac{\mathrm{d}^2S'}{\mathrm{d}z'^2}+2\left(B\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}z'}-C\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}y'}\right)\left(C\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}x'}-A\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}z'}\right)\frac{\mathrm{d}^2S'}{\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'}\end{array}\right\}},$$

d'où nous conclurons (81)

$$\rho=-\frac{\left\{\left(B\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}z'}-C\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}y'}\right)^2+\left(C\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}x'}-A\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}z'}\right)^2+\left(A\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}y'}-B\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}x'}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\left\{\begin{array}{l}\left(B\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}z'}-C\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}y'}\right)^2\frac{\mathrm{d}^2S'}{\mathrm{d}x'^2}+2\left(C\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}x'}-A\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}z'}\right)\left(A\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}y'}-B\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}x'}\right)\frac{\mathrm{d}^2S'}{\mathrm{d}y'\mathrm{d}z'}\\+\left(C\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}x'}-A\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}z'}\right)^2\frac{\mathrm{d}^2S'}{\mathrm{d}y'^2}+2\left(A\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}y'}-B\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}x'}\right)\left(B\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}z'}-C\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}y'}\right)\frac{\mathrm{d}^2S'}{\mathrm{d}z'\mathrm{d}x'}\\+\left(A\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}y'}-B\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}z'}\right)^2\frac{\mathrm{d}^2S'}{\mathrm{d}z'^2}+2\left(B\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}z'}-C\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}y'}\right)\left(C\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}x'}-A\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}x'}\right)\frac{\mathrm{d}^2S'}{\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'}\end{array}\right\}}. \tag{88}$$

Comme t', u', v' ont disparu, nous pouvons les supposer nuls; de sorte que cette valeur de ρ est rigoureusement celle du rayon de courbure, à l'origine des coordonnées, de la section faite dans la surface $S=0$ par le plan (69). En substituant cette valeur dans les formules (82), nous obtiendrons rigoureusement les coordonnées du centre de courbure de la section.

La formule générale (88), que nous n'avons encore rencontrée nulle part, est susceptible d'un grand nombre de conséquences qu'il nous reste présentement à développer.