
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

GERGONNE

**Astronomie physique. Essai analytique sur la nature
des queues des comètes**

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 20 (1829-1830), p. 65-84

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1829-1830__20__65_0

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1829-1830, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ASTRONOMIE PHYSIQUE.

Essai analytique sur la nature des queues des comètes ;

Par M. GERGONNE.



Si un étudiant de quelque université d'Allemagne prenait pour sujet de thèse la question dont je vais m'occuper, eût-il cent fois raison pour le fond, il trouverait difficilement grâce devant ses doctes juges, s'il ne prenait soin de débiter par une description détaillée des diverses apparences qu'ont présenté jusqu'ici les queues des comètes, et par un exposé historique des hypothèses, plus ou moins plausibles, qui ont été imaginées, depuis Aristote jusqu'à nous, dans la vue d'expliquer la cause de ces singulières apparences. Cette partie de sa tâche ne serait pourtant pas la plus difficile à remplir, car elle n'exigerait à peu près de lui que de transcrire ce qu'on rencontre sur ce sujet dans le V.^{me} chapitre du 2.^{me} volume de la *Cométographie* de PINGRÉ.

Mes lecteurs voudront bien, je pense, trouver pour agréable que je leur fasse grâce de cette érudition d'emprunt, et que, me bornant à leur indiquer la source où j'aurais pu moi-même puiser, j'entre de suite en matière par un exposé sommaire de l'origine et du progrès de mes idées sur le phénomène auquel je me propose de consacrer cet essai.

A l'époque où je m'occupais, pour la première fois, de la recherche des lois du mouvement de la lumière, à travers les milieux transparents de densité variable, la comète de 1807 brillait toutes les nuits sur notre horizon ; je ne pouvais porter mes re-

gards vers elle sans réfléchir sur la nature de cette apparence singulière qui, sous le nom de *queue*, *barbe* ou *chevelure*, accompagne communément et exclusivement ces sortes d'astres. Je m'empressai de relire avec soin tout ce qu'on avait écrit sur ce sujet ; mais je ne trouvais dans tout cela que des suppositions vagues, insuffisantes et inconciliables avec les lois d'une saine physique. Dans mes recherches sur le phénomène du mirage j'avais eu soin d'abord de tenir compte de la courbure des couches atmosphériques de densité constante, comme l'a fait postérieurement M. Biot. Quelques résultats d'analyse que je venais d'obtenir me firent faire de singuliers rapprochemens, et je fus conduit, presque involontairement, à une hypothèse tellement hardie et tellement éloignée des idées reçues, que je crus devoir mettre tous mes soins à la repousser, comme j'aurais pu le faire d'une pensée coupable.

J'étais presque parvenu, non sans beaucoup d'effort et de peine, à bannir tout-à-fait cette hypothèse de mon esprit, lorsque la belle comète de 1811 s'offrit à mes regards et me fit retomber, malgré moi, dans mes premières réflexions. Plus j'envisageais mon hypothèse et plus elle me paraissait plausible, et même la seule que l'on pût raisonnablement admettre. Toutefois, éloigné, par goût, de tout ce qui n'est point susceptible de démonstration rigoureuse, je ne fis part de mes réflexions à personne ; seulement ayant eu l'occasion d'écrire, dans le même temps, à M. l'astronome Flaugergues, au sujet d'un mémoire sur la diffraction, qu'il avait adressé à l'Académie de Nismes, et ne pouvant guère me dispenser de lui parler de la comète qui alors attirait tous les regards, même ceux des plus indifférens, et dont je venais de calculer une éphéméride, je lui touchai quelque chose de mes conjectures, dont je ne lui donnai d'ailleurs qu'une idée très-succincte, ayant même soin d'aller au devant des principales objections qui pourraient m'être opposées. Ce patriarche de l'astronomie en fut si peu offusqué que, par une lettre de Viviers, en date du 25 novembre 1811, il me fit l'honneur de me répondre en ces termes :

« J'ai examiné, Monsieur, avec le plus grand soin, l'hypothèse
» sur la nature des queues des comètes, que vous m'avez fait l'hon-
» neur de me communiquer; j'en ai été enchanté. Elle est très-
» simple, et la simplicité est le cachet de la nature. Votre idée est
» sublime, mais elle vous donnera sans doute de grandes difficul-
» tés pour la réduire au calcul. Il me tarde beaucoup de vous voir
» achever ce travail, et de lire le beau mémoire que vous nous
» faites espérer sur cet intéressant sujet. »

On ne me taxera pas sans doute d'un engouement excessif pour mes idées, si l'on considère que, malgré une approbation si flatteuse et si encourageante, j'ai résisté, pendant dix-huit ans encore, à la tentation de publier mes conjectures sur un sujet qui m'avait tant préoccupé. Mes recherches récentes sur le mouvement de la lumière dans un milieu transparent de densité variable (tom. XIX, pag. 257) ont rendu la tentation plus forte, et, comme en même temps les glaces de l'âge ont rendu la résistance moins énergique, j'y succombe aujourd'hui, ne fassent que pour m'en ôter le tourment et n'être plus tenté à l'avenir. C'est, si l'on veut, un vieux procès bien chanceux que, quelle qu'en puisse être l'issue, je veux faire juger définitivement pour n'avoir plus désormais à m'en occuper en aucune sorte.

Au surplus, quand bien même mon hypothèse serait de nature à ne pouvoir absolument être admise, ce qui va suivre pourrait encore être digne de quelque intérêt, comme exercice de calcul, et comme supplément aux exemples que j'ai donnés dans le mémoire rappelé plus haut. On a quelque fois reproché à Euler de créer des hypothèses pour se donner le plaisir de faire des calculs, et je sens fort bien que, si c'est là un travers, je suis loin d'avoir les mêmes titres que cet illustre géomètre à me le faire pardonner; mais je n'ai pas non plus la prétention de valoir mieux que lui sous aucun rapport.

Soit, dans l'espace, une masse très-étendue d'une substance ga-

zeuse transparente, enveloppant ou du moins pouvant envelopper un noyau solide, qui pourra lui-même être recouvert d'une couche plus ou moins épaisse d'un liquide également transparent. Le liquide et le gaz se disposeront, autour du noyau solide, suivant les lois de l'équilibre; et la densité de la masse gazeuse, par l'effet combiné de son élasticité et de l'attraction exercée sur elle, tant par le noyau que par les couches inférieures, décroîtra sans cesse du dedans au-dehors, ainsi qu'il arrive à la masse atmosphérique qui enveloppe notre terre, si ce n'est qu'elle pourra s'étendre à une beaucoup plus grande distance du centre. Telle est, dans mon hypothèse, l'idée qu'on doit se faire d'une *comète*, du moins de celles qui se montrent accompagnées d'une queue ou chevelure.

Pour ne pas trop compliquer d'abord la question, supposons que le noyau solide de l'astre soit rigoureusement sphérique et que toute la masse de cet astre soit assez distante des autres corps célestes, et du soleil en particulier, pour que l'attraction exercée par ces corps divers sur les molécules qui la composent soit sensiblement la même pour chacune de ces molécules, et pour qu'en même temps elles reçoivent toutes de l'action échauffante du soleil une température sensiblement constante. Alors, abstraction faite de tout mouvement, soit de rotation soit de translation dans l'espace, les parties mobiles de la comète ne seront soumises qu'à leur action mutuelle, et la masse gazeuse, qui concourt à la former, et que j'appellerai à l'avenir *l'atmosphère cométaire*, s'arrangera de telle sorte; autour du noyau, que ses couches de densité constante seront à la fois sphériques et concentrique; et, comme je l'ai déjà observé plus haut, la densité de ces couches sera d'autant moindre qu'elles auront un plus grand rayon. Il en sera donc de même de leur pouvoir réfringent; si, du moins, comme je le suppose encore pour le moment, l'atmosphère cométaire est chimiquement homogène.

Considérons présentement un des points lumineux de la surface du soleil; ce point lance des rayons dans toutes les directions. Ceux d'entre eux qui ne rencontrent pas l'atmosphère cométaire poursui-

vent leur trajet en ligne droite, dans les profondeurs de l'espace ; et il en est de même du rayon unique qui se dirige vers le centre du noyau , puisqu'il traverse toutes les couches gazeuses de densité constante dans des directions normales. Dans le cas particulier où il n'existerait pas de noyau opaque , ce dernier rayon poursuivrait sa route au-delà du centre de l'astre , sans être plus dévié qu'avant de l'avoir atteint.

Les rayons intermédiaires qui s'éloigneront peu de ces rayons extrêmes ne s'écarteront pas sensiblement de la direction rectiligne , savoir : les uns parce qu'ils traverseront des couches extrêmement rares de l'atmosphère cométaire , et les autres parce qu'ils en traverseront les couches , même les plus denses , dans des directions presque normales. Quant aux rayons qui s'écarteront plus sensiblement de ces deux limites , on conçoit que , suivant les variétés que pourra présenter leur direction initiale , ils seront plus ou moins infléchis vers le centre de l'astre , de telle sorte qu'il y aura une certaine direction initiale à laquelle répondra le *maximum* de courbure. Il est d'ailleurs manifeste que les trajectoires décrites par ces rayons seront toutes des courbes planes , dont les plans passeront tous par le point rayonnant que nous considérons sur la surface du soleil , et par le centre de la comète.

Il y aura donc , comme l'on voit , dans l'un quelconque de ces plans , une infinité de trajectoires dont celle qui passera par le centre de l'astre sera rectiligne , tandis que celles qui s'écarteront de part et d'autre de celle-là auront des courbures continuellement croissantes jusqu'à un certain terme , au-delà duquel leur courbure diminuera , au contraire , continuellement de manière à devenir enfin , de nouveau , tout-à-fait nulle.

Il est aisé de conclure de là que les trajectoires , appartenant à un même plan quelconque , se couperont consécutivement , de manière à être toutes tangentes à une sorte de caustique qui en sera l'enveloppe commune , ou , en d'autres termes , qui sera la solution particulière de leur équation différentielle. Il est même visible que la droite

qui joindra le point rayonnant au centre de la comète sera un diamètre principal de cette caustique, puisque les circonstances seront rigoureusement les mêmes de part et d'autre de cette droite. Voilà donc une courbe sur laquelle viendront converger, tour à tour, les rayons émanés du point lumineux; de sorte que les molécules de l'atmosphère cométaire qui se trouveront situées sur cette courbe, devront être plus éclairées que celles qui se trouveront situées en d'autres points de son plan; or, comme il en ira de même pour tous les plans conduits par le point rayonnant et par le centre de l'astre, il s'ensuit que, si l'on fait tourner cette caustique autour de la droite qui joint ces deux points, elle engendrera une surface de révolution qui sera le lieu des points les plus éclairés de l'atmosphère cométaire.

Voilà de quelle manière les choses se passeraient si le soleil se trouvait réduit à un simple point lumineux, et il est probable qu'alors la portion fortement éclairée de l'atmosphère cométaire formerait une couche trop mince pour pouvoir affecter, d'une manière sensible, l'œil d'un spectateur placé sur la surface de notre terre; mais chacun des points de la portion de la surface solaire qui regarde la comète, donnera naissance à une pareille surface caustique; et l'ensemble des surfaces caustiques qui répondront à tous ces points, lesquelles se succéderont les unes aux autres, sans interruption, produira, dans l'atmosphère cométaire, non plus une simple surface, mais un volume de molécules fortement éclairées. Il arrive un phénomène assez analogue, lorsque, de nuit, on tient un verre plein d'eau, à quelque distance de la flamme d'une chandelle; en regardant par-dessus le verre, on aperçoit distinctement, dans son intérieur, un volume de liquide plus ou moins considérable, sensiblement plus éclairé que le reste de la masse. Ajoutons que les surfaces caustiques, dont l'ensemble formera la portion la plus éclairée de l'atmosphère cométaire, se succédant les unes aux autres, sans interruption, pourront avoir elles-mêmes leur surface caustique, leur surface enveloppe, solution particulière de leur équation différen-

tielle commune , laquelle pourra avoir plusieurs nappes , telles que les molécules de l'atmosphère cométaire qui s'y trouveront situées seront éclairées d'une lumière plus intense encore.

Telle est , dans mon hypothèse , la cause purement optique de cette apparence qui , sous le nom de queue , de barbe ou de chevelure , accompagne la plupart des comètes observées jusqu'ici ; et l'on voit que cette hypothèse ne tend à rien moins qu'à attribuer à l'atmosphère des comètes , un rayon au moins égal à la longueur de leur queue , c'est-à-dire , pour beaucoup d'entre elles , un rayon de plusieurs dizaines de millions de lieues. Voilà ce qui m'avait , en quelque sorte , effrayé au premier abord ; je craignais sérieusement qu'à notre très-grand préjudice , les atmosphères cométaires ne vinssent quelquefois se mêler avec la nôtre ; mais , peu à peu , je me suis familiarisé avec cette idée , et je suis présentement tout-à-fait aguerri.

Cette hypothèse explique tout naturellement pourquoi la queue d'une comète est constamment opposée au soleil ; et l'on voit même , qu'abstraction faite des causes perturbatrices dont je m'occuperai tout-à-l'heure , cette apparence devrait constamment affecter la figure d'un solide de révolution , ayant son axe dans le prolongement de la droite qui joint les centres des deux astres. Cette hypothèse explique également la transparence de cette traînée lumineuse , les courbes plus lumineuses qu'elle dont elle est quelquefois sillonnée , et enfin l'espèce de vague indéfinissable que ses bords offrent à la vue , et qui fait qu'au même instant deux spectateurs ont souvent beaucoup de peine à tomber d'accord sur son étendue et ses limites.

Si une comète s'approche du soleil , les rayons solaires qui traverseront son atmosphère y pénétreront dans des directions de plus en plus divergentes ; les diverses trajectoires qu'ils y décriront , iront donc se couper de plus en plus loin derrière l'astre , à peu près comme le foyer d'une lentille convexe s'éloigne de plus en plus derrière elle , à mesure que le point rayonnant en devient plus

voisin. En outre, l'action échauffante du soleil, devenue plus énergique, par l'effet d'une plus grande proximité, dilatera de plus en plus l'atmosphère cométaire ; cette atmosphère acquerra donc une plus grande étendue, et, par suite, la queue de la comète une plus grande longueur.

Cette dernière considération explique fort bien aussi comment ce n'est pas d'ordinaire à l'époque du périhélie, mais un peu après, que la queue d'une comète parvient à sa plus grande extension. On conçoit, en effet, que l'action dilatante de la chaleur solaire continuant à s'exercer après le périhélie, ce ne doit être également qu'après cette époque que l'astre aura acquis son *maximum* de température et par suite son *maximum* de dilatation et de volume. C'est ainsi que le jour le plus chaud de l'année est d'ordinaire postérieur à l'époque du solstice, et l'heure la plus chaude du jour, postérieure à celle de midi.

Si la comète n'est pas aussi distante des autres corps célestes, et du soleil en particulier, que je l'ai d'abord supposé, ni l'action attractive exercée sur elle par ces différens corps, ni l'action dilatante de ce dernier ne seront les mêmes pour tous les points de son atmosphère ; les couches de densité uniforme de cette atmosphère pourront donc cesser d'être, à la fois, sphériques et concentriques ; et il en sera de même, à plus forte raison, si un mouvement de rotation de la comète, sur son axe, développe dans son atmosphère une force centrifuge ; de là les variétés infinies que pourra présenter la queue des comètes, qui cessera dès lors d'être un solide de révolution ; de là aussi les variétés que présentera la queue d'une même comète aux diverses époques de son apparition ; de là enfin le peu de régularité et de symétrie que ces sortes d'apparences offriront quelquefois à la vue du spectateur. On peut conjecturer que, parmi ces diverses causes d'anomalie, il s'en trouvera d'à peu près communes à toutes les comètes, en vertu desquelles l'extrémité de la queue de la plupart d'entre elles se courbera dans un sens opposé à celui du mouvement.

J'ai tacitement supposé, dans tout ce qui précède, que les différentes couches de l'atmosphère cométaire avaient exactement la même constitution chimique, et ne différaient uniquement les unes des autres que par leur densité; mais il pourrait fort bien n'en être pas toujours ainsi. Il se pourrait quelquefois que cette atmosphère fût un mélange de gaz divers, dont l'action sur la lumière ne suivît pas exactement le rapport des densités, c'est-à-dire qu'il se pourrait que la loi de décroissement de ce que j'ai appelé récemment *densité optique* (*), fût différente de la loi de décroissement de la *densité physique*; il se pourrait même que la première de ces densités fût croissante de l'intérieur à l'extérieur, tandis qu'au contraire, l'autre irait en décroissant dans cette même direction; c'est en particulier ce qui arriverait si, par exemple, les couches les plus voisines du noyau étant formées d'un gaz à peu près pareil à notre air atmosphérique, les couches supérieures étaient formées de quelque gaz de la nature du gaz hydrogène, ou même de quelque autre gaz, tout-à-fait inconnu sur notre planète, réfractant plus encore la lumière, à densité égale, que ne le fait celui-là; et de là encore une autre source de variété dans la figure de la queue. Le calcul prouve, en effet, que le changement le plus léger, dans la loi de variation de la densité optique des différentes couches, suffit pour opérer un changement notable dans la figure des trajectoires, et par suite dans celle de la caustique. Ajoutons encore que la queue d'une comète n'est point vue sous sa figure effective, puisqu'elle est vue à travers l'atmosphère de cet astre, dont l'interposition doit nécessairement en changer l'apparence.

Il pourrait, en particulier, arriver souvent que les trajectoires décrites par les rayons de la lumière solaire, infléchis par l'action de l'atmosphère cométaire, fissent une portion de révolution ou même une ou plusieurs révolutions autour de son noyau, de telle sorte

(*) Voy. la pag. 268 du précédent volume.

que le centre de l'astre se trouvât dans l'intérieur des nœuds de ces diverses trajectoires (*) ; et il est aisé de comprendre qu'alors les caustiques passeraient entre la comète et le soleil. Il arriverait donc ainsi que la queue de la comète ne serait pas entièrement située derrière cet astre ; cette queue pourrait , par exemple , figurer une sorte de parabole fort allongée , dont le foyer serait à peu près au centre de la comète ; et c'est , en effet , sous cette forme que ces traînées lumineuses s'offrent le plus souvent à nos regards.

Quant aux comètes qui ont paru totalement dépourvues de queues, il est presque superflu de dire qu'il faut admettre que celles-là doivent être dépourvues d'atmosphère sensible, ou du moins que leur atmosphère doit être extrêmement circonscrite ; ces comètes seront, pour bien dire, de véritables planètes ne différent uniquement des autres que par une plus grande excentricité de leur orbite et par une plus grande inclinaison de son plan sur le plan de l'écliptique. Au surplus, il se pourrait fort bien qu'une comète, environnée d'une atmosphère très-étendue, se montrât dépourvue de queue ; il suffirait pour cela que les trajectoires, décrites dans cette atmosphère par les rayons de la lumière solaire, fussent de nature à n'avoir pas d'enveloppe commune ; et le calcul prouve qu'il peut quelquefois en être ainsi. Il se pourrait aussi que les caustiques fussent des spirales dont les circonvolutions les plus lumineuses s'écarteraient peu du noyau qui alors paraîtrait simplement enveloppé d'une nébulosité, ainsi qu'il arrive quelquefois.

La plus grave objection qu'on puisse opposer à cette hypothèse, est la suivante que je n'avais pas dissimulée à M. Flaugergues qui en fut si peu offusqué, qu'il n'en fit absolument aucune mention dans la lettre dont j'ai rapporté plus haut un fragment. Si l'at-

(*) Ces circonvolutions de la trajectoire autour du noyau étaient ce que M. Flaugergues répugnait le plus à admettre, sans doute, à cause de l'insuffisance de mes développemens ; le calcul en met la possibilité tout-à-fait hors de doute.

mosphère cométaire, dira-t-on, a communément l'immense étendue que vous lui supposez, et si elle a la propriété de dévier plus ou moins fortement les rayons de la lumière solaire qui la traversent, elle doit agir d'une manière analogue sur la lumière des étoiles, lesquelles conséquemment, vues à travers cette atmosphère, ne doivent point paraître à leur véritable place. Or, on détermine le plus souvent le lieu des comètes par leur comparaison aux étoiles voisines; donc, dans cette hypothèse, ajoutera-t-on, de telles déterminations, et par suite les élémens auxquels elles conduisent, devraient être tout-à-fait erronés; ce qui pourtant n'est point confirmé par le fait.

Pour atténuer la force de cette objection, je rappellerai d'abord que, malgré les nombreux perfectionnemens qu'ont acquis de nos jours les instrumens, l'art d'en faire usage et les méthodes de calcul, il est fort rare que des élémens, conclus de la comparaison d'une comète aux étoiles voisines, aient, du premier jet, toute l'exactitude qu'on se croirait fondé à en attendre; de sorte que des élémens déterminés par deux observateurs offrent quelquefois des disparates assez choquantes, et que même des élémens conclus par un même observateur, de comparaisons d'une même comète aux étoiles, faites à deux époques un peu distantes l'une de l'autre, ne sont souvent pas mieux d'accord entre eux. Pour expliquer ce défaut de concordance, on s'est retranché jusqu'ici sur les perturbations causées par les planètes, sur la résistance de l'éther et surtout sur l'espèce de vague que présentent les limites du noyau, à raison de la nébulosité qui l'environne communément; mais pourquoi ne pourrait-on pas, tout aussi bien, l'attribuer, du moins en grande partie, à la déviation à travers l'atmosphère cométaire des rayons de lumière émanés des étoiles? Et pourquoi ne viendrais-je pas de signaler ici une nouvelle cause d'erreur, contre laquelle on n'aurait pas songé jusqu'à ce jour à se mettre en garde?

Remarquons présentement que, lorsqu'on détermine les lieux d'une comète, par sa comparaison aux étoiles, on choisit constamment de

préférence les étoiles les plus voisines , des étoiles qui puissent être comprises avec l'astre dans le champ souvent peu étendu de la lunette , sans même approcher trop de ses bords ; les rayons , par lesquels ces étoiles sont rendues visibles à l'observateur , passent donc , dans leur trajet , à travers l'atmosphère cométaire , assez près du centre de l'astre ; et j'ai déjà fait observer plus haut que ces rayons doivent être fort peu déviés. On sait d'ailleurs que , toutes les fois que la chose est possible , les astronomes préfèrent à la comparaison aux étoiles voisines l'observation de la hauteur méridienne et celle de l'heure du passage au méridien , observations qui , dans mon hypothèse , ne sauraient être passibles de l'erreur dont il s'agit ici.

Des physiciens , comme on en rencontre tant encore aujourd'hui , même quelquefois dans les chaires des hautes écoles , pourraient croire la question suffisamment débattue et mon hypothèse complètement justifiée ; et il est , en effet , dans la philosophie naturelle , un grand nombre d'hypothèses universellement admises , bien qu'elles ne soient pas appuyées sur des fondemens plus solides ; mais je sais que j'écris pour des physiciens géomètres , et je sens que je ne saurais espérer d'entraîner leur conviction , si je ne soumettais mon hypothèse à l'épreuve délicate mais décisive du calcul. S'il fallait ici attaquer la question dans toute sa généralité , le problème serait assez difficile à manier ; mais , en écartant toutes les causes d'aberration , on parvient à des résultats assez simples et suffisans pour faire pressentir ce qu'on pourrait se promettre d'une analyse plus savante et plus rigoureuse.

Je supposerai donc constamment , dans tout ce qui va suivre , que la comète , sans noyau solide ni liquide , est uniquement formée d'une substance gazeuse , dans laquelle les couches de densité constante sont à la fois sphériques et concentriques ; la densité , variant d'une couche à celle qui la suit immédiatement suivant une loi mathématique quelconque , que je supposerai uniforme pour toute l'étendue de la masse cométaire. Alors , comme je l'ai observé plus

haut, les trajectoires décrites par la lumière, à travers une telle masse, seront des courbes planes dont les plans contiendront à la fois le centre de cette masse et le point rayonnant auquel je supposerai le soleil réduit.

Soit pris le plan de l'une quelconque de ces trajectoires pour celui des coordonnées supposées rectangulaires, et le centre de la comète pour origine. Faisons passer l'axe des x positives par le point rayonnant que nous supposerons à une distance a de l'origine. En représentant par u la densité de la comète, en l'un quelconque (x, y) de ses points, nous aurons

$$u = \psi(\sqrt{x^2 + y^2}) ; \quad (1)$$

d'où nous concluons

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = P = x \frac{\psi'(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \left(\frac{du}{dy}\right) = Q = y \frac{\psi'(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}} ; \quad (2)$$

en conséquence (tom. XIX , pag. 282) les équations du mouvement d'une molécule lumineuse, à travers la masse gazeuse, seront

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2k^2 x \cdot \frac{\psi'(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 2k^2 y \cdot \frac{\psi'(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}} ; \quad (3)$$

équations dans lesquelles, comme on l'a vu à l'endroit cité, k^2 est un coefficient constant, relatif au mode d'action des milieux sur la lumière, et auxquelles on pourra joindre, comme s'y trouvant implicitement comprise, l'équation (pag. 273)

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \omega^2 + 4k^2 \psi(\sqrt{x^2 + y^2}), \quad (4)$$

dans laquelle ω exprime la vitesse de la lumière dans le vide.

Si l'on représente par φ la force accélératrice, on aura, comme l'on sait,

$$\varphi = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2} ;$$

d'où on conclura (3), en substituant ,

$$\varphi = 2h^2\psi'(\sqrt{x^2+y^2}) ; \quad (5)$$

ainsi, généralement, *la force accélératrice est proportionnelle à la dérivée de la fonction du rayon des couches sphériques concentriques qui exprime la densité optique de ces couches.*

Les équations (3) donnent, par division ,

$$y \frac{d^2x}{dt^2} - x \frac{d^2y}{dt^2} = 0 ,$$

d'où , en intégrant ,

$$ydx - xdy = Cdt ; \quad (6)$$

équation qui est l'expression du principe des aires, et dans laquelle C est la constante arbitraire. En portant la valeur de dt , donnée par cette équation, dans l'équation (4), on obtiendra, pour l'équation générale de la trajectoire décrite ,

$$C^2(dx^2 + dy^2) = \{w^2 + 4h^2\psi'(\sqrt{x^2+y^2})\}(ydx - xdy)^2 . \quad (7)$$

Ici, comme dans la théorie du mirage, il nous sera permis, sans rien changer à la nature des trajectoires, ni conséquemment des caustiques, d'augmenter ou de diminuer la densité de la masse gazeuse que nous supposons composer la comète d'une même quantité quelconque en tous ses points, et nous profiterons de cette liberté pour la rendre constamment nulle à la distance a du centre de l'astre à laquelle le point rayonnant se trouve situé, ce qui donnera $\psi(a) = 0$. En supposant donc que le rayon fait, à son point de départ, avec l'axe des x , un angle dont la tangente tabulaire est égale à m , on devra avoir, en même temps ,

$$x=a, \quad y=0, \quad dy=mdx, \quad \psi(\sqrt{x^2+y^2})=\psi(a)=0;$$

ce qui donnera, en substituant dans (7),

$$C^2(1+m^2)=m^2a^2w^2; \quad (8)$$

tirant de cette équation la valeur de C^2 , pour la substituer dans l'équation (7), celle-ci deviendra

$$m^2a^2w^2(dx^2+dy^2)=(1+m^2)\{w^2+4k^2\psi(\sqrt{x^2+y^2})\}(ydx-xdy)^2;$$

posant enfin, pour abrégier, comme dans la théorie du mirage,

$$w=2\lambda k,$$

on aura, pour l'équation différentielle de la trajectoire décrite par le rayon qui fait, à son point de départ, avec la droite qui joint ce point au centre de l'astre, un angle dont la tangente tabulaire est m ,

$$m^2\lambda^2a^2(dx^2+dy^2)=(1+m^2)\{\lambda^2+\psi(\sqrt{x^2+y^2})\}(ydx-xdy)^2. \quad (9)$$

L'intégrale de cette équation, dans chaque hypothèse sur la forme de la fonction ψ , fera connaître la trajectoire décrite.

Il conviendra pour séparer les variables, et ramener ainsi le problème aux quadratures, de passer aux coordonnées polaires, en posant

$$x=r\cos.\theta, \quad y=r\sin.\theta;$$

il en résultera successivement

$$\begin{aligned} dx &= dr\cos.\theta - r dr\sin.\theta, & dy &= dr\sin.\theta + r dr\cos.\theta, \\ \sqrt{x^2+y^2} &= r, & dx^2+dy^2 &= dr^2+r^2d\theta^2, & (ydx-xdy)^2 &= r^4d\theta^2, \end{aligned}$$

ce qui donnera, en substituant dans l'équation (9),

$$m^2\lambda^2a^2(dr^2+r^2d\theta^2)=(1+m^2)\{\lambda^2+\psi(r)\}r^4d\theta^2, \quad (10)$$

équation d'où on tirera

$$d\theta = \frac{m\lambda a dr}{r\sqrt{(1+m^2)r^2\psi(r)+\lambda^2[(1+m^2)r^2-m^2a^2]}}; \quad (11)$$

équation séparée, dans laquelle on pourra faire, sur la forme de la fonction ψ , quelle hypothèse on voudra. La constante qu'introduira l'intégration devra d'ailleurs être déterminée de telle sorte qu'à $\theta=0$ réponde $r=a$.

Mais ce qui nous intéresse particulièrement ici, c'est beaucoup moins la figure des trajectoires qui peuvent répondre aux diverses formes de la fonction ψ et aux différentes valeurs de m , que la figure de la caustique ou courbe enveloppe de ces trajectoires qui, pour une même forme quelconque de cette fonction ψ , répond aux diverses valeurs de m . Or, rien n'est plus facile que d'obtenir l'équation différentielle générale de cette caustique, puisqu'il ne s'agit pour cela que d'éliminer m entre l'équation (10) et sa différentielle prise uniquement par rapport à ce paramètre. Or, par la forme de cette équation, m disparaît de lui-même de sa différentielle; de sorte que l'équation différentielle générale de la caustique est simplement

$$\lambda^2a^2(dr^2+r^2d\theta^2)=\{\lambda^2+\psi(r)\}r^4d\theta^2. \quad (12)$$

Si l'on connaît l'équation polaire de la caustique on en tirera, par différentiation, la valeur de $d\theta$ en r et dr ; en substituant cette valeur dans l'équation (12), dr disparaîtra de lui-même; de sorte que l'équation résultante fera connaître la forme de la fonction ψ , d'où l'on conclura ensuite, si on le juge convenable, au moyen de l'équation (11), la nature de la trajectoire.

On doit seulement observer, 1.^o que, d'après l'hypothèse que nous avons admise sur la constitution de la comète, on ne peut prendre,

pour la caustique, qu'une courbe symétrique, par rapport à l'axe des x ; 2.° qu'ayant diminué arbitrairement d'une même quantité la densité de la comète, en tous ses points, il faudra, pour avoir la valeur complète de $\psi(r)$, ajouter une constante à la valeur qu'on aura déduite du procédé que nous venons d'indiquer.

Observons encore que la caustique admise ne sera pas proprement la queue de la comète; mais que, pour l'en déduire, il faudra supposer que l'axe de cette caustique oscille autour du centre de l'astre, de part et d'autre de l'axe des x , d'une quantité angulaire égale à l'angle sous lequel serait, vu de ce centre, le demi-diamètre du disque solaire.

Faisons présensément quelques applications; et, pour prendre un cas un peu général, supposons que la caustique soit une section conique quelconque, ayant son axe dans l'axe des x et son foyer à l'origine; son équation polaire sera, comme l'on sait

$$r = \frac{\frac{1}{2}p}{1 + \varepsilon \cos. \theta} ,$$

p étant le paramètre et ε le rapport de l'excentricité au demi-axe, cela revient à

$$2(1 + \varepsilon \cos. \theta)r = p ,$$

d'où, en différentiant,

$$(1 + \varepsilon \cos. \theta)dr = \varepsilon r d\theta \sin. \theta ;$$

ces deux équations donnent

$$\sin. \theta = \frac{p dr}{2\varepsilon r^2 d\theta} , \quad \cos. \theta = \frac{r(p - 2r)d\theta}{2\varepsilon r^2 d\theta} ;$$

d'où

$$\sin.^2 \theta + \cos.^2 \theta = 1 = \frac{p^2 dr^2 + r^2(p - 2r)^2 d\theta^2}{4\varepsilon^2 r^4 d\theta^2} ,$$

ce qui revient à

$$d\theta^2 = \frac{p^2 dr^2}{r^2 \{ 4\varepsilon^2 r^2 - (p - 2r)^2 \}} ;$$

substituant cette valeur dans l'équation (12), elle deviendra, toutes réductions faites,

$$4\lambda^2 a^2 \{(\varepsilon^2 - 1)r + p\} = p^2 r \{\lambda^2 + \psi(r)\} ;$$

d'où l'on tirera

$$\psi(r) = \lambda^2 \cdot \frac{\{4a^2(\varepsilon^2 - 1) - p^2\}r + 4a^2 p}{p^2 r} ,$$

ou encore

$$\psi(r) = \lambda^2 \left\{ \frac{4a^2(\varepsilon^2 - 1) - p^2}{p^2} + \frac{4a^2}{pr} \right\} ;$$

mais, à cause de la constante qu'il faudra introduire, on pourra poser simplement

$$\psi(r) = 4\lambda^2 \left(n + \frac{a^2}{pr} \right) ,$$

cela donne une densité infinie au centre de l'astre, et une densité finie à une distance infinie, ce qu'on peut très-bien admettre. Il n'est donc pas surprenant, d'après cela, que la queue d'une comète affecte fort souvent, comme nous l'avons déjà dit, à peu près, la figure d'une parabole, ayant son foyer au centre de l'astre.

De cette équation on tire, par différentiation,

$$\psi'(r) = - \frac{4\lambda^2 a^2}{pr^2} ;$$

donc, d'après ce que nous avons dit ci-dessus, la force accélératrice est ici inverse du carré de la distance; ce qui prouve, sans autres développemens, que les trajectoires décrites par les rayons lumineux sont-elles mêmes des coniques ayant pour foyer le centre de l'astre.

Si j'étais assez heureux pour avoir rencontré juste dans l'explication du phénomène auquel j'ai consacré cet écrit, l'observation de la figure exacte des queues des comètes acquerrait à l'avenir beaucoup d'intérêt. La connaissance précise de cette figure fournirait, en effet, sur la constitution physique de ces astres, des lumières qui pourraient être ensuite utilement appliquées à corriger les erreurs dont seraient nécessairement affectées les comparaisons des comètes aux étoiles voisines.

Pour second exemple, supposons que la caustique soit une spirale logarithmique donnée par l'équation

$$r = ce^{\theta},$$

auquel cas la comète paraîtra simplement enveloppée d'une nébulosité. Il viendra, en différentiant,

$$dr = ce^{\theta} d\theta = r d\theta;$$

d'où

$$r^2 d\theta^2 = dr^2;$$

portant cette valeur dans l'équation (12), elle deviendra

$$2\lambda^2 a^2 = \{\lambda^2 + \psi(r)\} b^2,$$

ce qui donne

$$\psi(r) = \lambda^2 \left(\frac{2a^2}{r^2} - 1 \right);$$

mais, à cause de la constante qu'il faudra introduire, on pourra écrire, plus généralement,

$$\psi(r) = 2\lambda^2 \left(n + \frac{a^2}{r^2} \right);$$

on aura donc encore ici une densité infinie au centre de l'astre et une densité finie à une distance infinie.

On tire de là, par différentiation,

$$\psi'(r) = - \frac{4\lambda^2 a^2}{r^3};$$

ce qui montre qu'ici la force accélératrice sera inverse du cube de la distance; d'où on peut conclure, par les principes connus, et notamment par ce qui a été observé par M. Ampère, dans un précédent mémoire, que les trajectoires décrites par les rayons lumineux seront elles-mêmes des spirales; ce qui résout complètement la difficulté qui m'avait été opposée par M. l'astronome Flaugergues.

Je crois inutile de pousser plus loin ces applications, qui n'ont, comme l'on voit, rien de bien difficile, et que pourront étendre indéfiniment ceux qui y mettront quelque intérêt. On voit, en ef-

fet, qu'on pourra toujours façonner une comète, de manière à lui faire avoir une queue de telle figure qu'on voudra.
