
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

LENTHÉRIC

Questions résolues. Démonstration du théorème d'analyse indéterminée énoncé à la pag. 212 du présent volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 20 (1829-1830), p. 379-382

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1829-1830__20__379_1

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1829-1830, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Démonstration du théorème d'analyse indéterminée énoncé à la pag. 212 du présent volume ;

Par M. LENTHÉRIC, docteur ès sciences, professeur au collège royal de Montpellier.

~~~~~

**THÉORÈME.** *Si trois nombres entiers positifs sont tels que le carré du plus grand soit égal à la somme des carrés des deux autres, le produit de ces trois nombres sera nécessairement divisible par soixante.*

*Démonstration.* Considérons d'abord un produit tel que

$$P = mn(m-n)(m+n),$$

dans lequel  $m$  et  $n$  sont supposés deux nombres entiers positifs. Ces nombres pourront être ou tous deux pairs ou tous deux impairs, ou bien l'un pair et l'autre impair.

Dans le premier cas,  $m-n$  et  $m+n$  seront aussi de nombres pairs, de sorte que le produit  $P$  sera divisible par 16.

Dans le second cas,  $m-n$  et  $m+n$  seront encore deux nombres pairs, de sorte que le produit  $P$  sera divisible par 4.

Enfin, dans le troisième cas,  $m-n$  et  $m+n$  seront tous deux des nombres impairs; de sorte que le produit  $P$  ne sera plus divisible que par 2; ainsi ce produit sera pair dans tous les cas.

Je dis présentement que ce même produit sera aussi, dans tous les cas, divisible par 3. Cela est d'abord manifeste si  $m$  ou  $n$  et à plus forte raison si l'un et l'autre sont divisibles par 3; de sorte qu'il ne peut y avoir lieu à discussion que lorsqu'ils ne le sont ni l'un ni l'autre.

Or, dans cette hypothèse,  $m$  et  $n$  ne peuvent présenter chacun que ces deux formes; savoir :

$$m \text{ les formes } 3p+1 \text{ et } 3p+2,$$

$$n \text{ les formes } 3q+1 \text{ et } 3q+2;$$

s'ils sont des deux premières ou des deux dernières,  $m-n$  sera divisible par 3; et ce sera  $m+n$  qui le sera s'ils sont l'un de la première et l'autre de la seconde; d'où l'on voit que, dans tous les cas, le produit  $P$  sera divisible par 3; et puisque, dans tous les cas, il est aussi divisible par 2, il sera, dans tous les cas, divisible par 6.

Je dis en outre que si, ni  $m$ , ni  $n$ , ni  $m+n$ , ni  $m-n$  ne sont divisibles par 5,  $m^2+n^2$  sera nécessairement divisible par 5; en effet, dans ce cas,  $m$  et  $n$  ne pourront avoir que les formes respectives  $5p+\alpha$  et  $5q+\beta$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  étant l'un et l'autre moindres que 5, et l'on aura alors

$$\begin{aligned} m-n &= 5(p-q) + (\alpha-\beta) , \\ m+n &= 5(p+q) + (\alpha+\beta) , \\ m^2+n^2 &= 5(5p^2+5q^2+2p\alpha+2q\beta) + (\alpha^2+\beta^2) ; \end{aligned}$$

d'où l'on voit que tout se réduit à démontrer que,  $\alpha$  et  $\beta$  étant deux nombres moindres que 5, si  $\alpha-\beta$  ni  $\alpha+\beta$  ne sont divisibles par 5,  $\alpha^2+\beta^2$  le sera nécessairement.

Or, sur les dix systèmes de valeurs qu'on peut admettre pour  $\alpha$  et  $\beta$ , les quatre systèmes 1 et 1, 2 et 2, 3 et 3, 4 et 4 se trouvent exclus par la condition que  $\alpha-\beta$  ne soit pas divisible par 5; les deux systèmes 1 et 4, 2 et 3 le sont aussi, par la condition que  $\alpha+\beta$  ne soit pas divisible par 5; de sorte qu'il ne reste d'admissibles que les quatre hypothèses 1 et 2, 1 et 3, 2 et 4, 3 et 4; or, on a

$$\begin{aligned} 1^2+2^2 &= 5 , \\ 1^2+3^2 &= 10 , \\ 2^2+4^2 &= 20 , \\ 3^2+4^2 &= 25 ; \end{aligned}$$

donc, dans toutes les hypothèses admissibles,  $\alpha^2+\beta^2$  et par suite  $m^2+n^2$  sont divisibles par 5.

Donc, dans tous les cas, le produit

$$mn(m-n)(m+n)(m^2+n^2) ,$$

est divisible par 5; et comme il l'est aussi, dans tous les cas, par 6; il doit l'être, dans tous les cas, par 30; et conséquemment son double

$$2mn(m-n)(m+n)(m^2+n^2) = 2mn(m^2-n^2)(m^2+n^2) ,$$

doit, dans tous les cas, être divisible par 60.

Cela posé soient  $x, y, z$  trois nombres entiers positifs, tels qu'on ait

$$z^2 = x^2 + y^2 ;$$

il est connu que l'on devra avoir

$$x = m^2 - n^2 , \quad y = 2mn , \quad z = m^2 + n^2 ,$$

donc on aura

## QUESTIONS

$$xyz = 2mn(m^2 - n^2)(m^2 + n^2) ;$$

donc, d'après ce qui précède,  $xyz$  sera divisible par 60 ; ce qu'il s'agissait de démontrer (\*).

---



---

(\*) MM. Vallès, ingénieur à Rodez, et François Paulet, de Genève, se sont aussi occupés de ce théorème. Ce dernier observe que la quatrième puissance d'un nombre non divisible par 5, ne pouvant avoir, pour son dernier chiffre à droite, que 1 ou 6, il s'ensuit immédiatement que, si deux nombres  $m$  et  $n$  ne sont, ni l'un ni l'autre, divisibles par 5,  $m^4 - n^4 = (m^2 - n^2)(m^2 + n^2)$  le sera nécessairement.

J. D. G.