
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

LENTHÉRIC

Analyse élémentaire. Note sur la limite supérieure des racines positives des équations numériques

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 20 (1829-1830), p. 297-299

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1829-1830__20__297_0

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1829-1830, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ANALYSE ÉLÉMENTAIRE.

Note sur la limite supérieure des racines positives des équations numériques ;

Par M. LENTHÉRIC, docteur ès sciences, professeur au collège royal de Montpellier.

~~~~~

LA note que l'on va lire n'a d'autre but que de rendre un peu plus claire et plus brève la démonstration d'un théorème que l'on rencontre dans tous les Traités élémentaires.

Les racines réelles d'une équation numérique étant les seuls nombres qui, substitués dans son premier membre à la place de l'inconnue, réduisent ce premier membre à zéro ; il s'ensuit que, s'il existe un nombre positif duquel on puisse prouver que, soit ce nombre lui-même soit tout autre nombre plus grand que lui, substitué à la place de l'inconnue, dans le premier membre d'une équation, donne un résultat positif ; on pourra être certain que toutes les racines réelles de cette équation, si toutefois elle en admet de telles, sont plus petites que ce même nombre qui sera dit, pour cette raison, la *limite supérieure* des racines réelles de l'équation proposée.

On sera certain qu'un nombre est limite supérieure des racines réelles d'une équation, si ce nombre, et tout nombre plus grand que lui, mis à la place de l'inconnue, rend la somme des termes positifs plus grande que la somme des termes négatifs, prise positivement ; c'est donc un tel nombre qu'il s'agit d'obtenir.

Soient  $m$  le degré de l'équation proposée,  $n$  le nombre des termes qui précèdent le premier terme négatif et  $G$  le plus grand de tous les coefficients négatifs pris positivement. Si nous trouvons une limite pour le cas le plus défavorable, à plus forte raison pourrions-nous l'admettre pour les cas qui le seront moins.

Or, le cas le plus défavorable est celui où les termes qui suivent le  $n.$ <sup>ième</sup> seraient tous négatifs et auraient tous  $G$  pour coefficient, et où tous les termes entre le premier et le  $(n+1).$ <sup>ième</sup> seraient nuls; de sorte qu'il suffit de trouver la plus petite des valeurs de  $x$  qui puissent satisfaire à l'inégalité

$$x^m > G(x^{m-n} + x^{m-n-1} + \dots + x^2 + x + 1).$$

Or, cette inégalité peut être mise sous cette forme

$$x^m > G \cdot \frac{x^{m-n+1} - 1}{x-1},$$

puis sous celle-ci

$$x-1 > G \cdot \frac{x^{m-n+1} - 1}{x^m},$$

puis enfin sous cette autre

$$x > \frac{G}{x^{n-1}} \cdot \frac{x^{m-n+1} - 1}{x^{m+n-1}};$$

or, on satisfait évidemment à cette dernière inégalité en posant

$$x-1 > \frac{G}{x^{n-1}};$$

car alors,  $x$  étant plus grand que l'unité,  $\frac{x^{m-n+1} - 1}{x^{m+n-1}}$  sera une fraction proprement dite.

$x$  étant ainsi  $> 1$ , il s'ensuit qu'on doit avoir  $x^{n-1} > (x-1)^{n-1}$ , et, par suite,

$$\frac{G}{x^{n-1}} > \frac{G}{(x-1)^{n-1}};$$

donc, à plus forte raison, on aura

$$x-1 > \frac{G}{(x-1)^{n-1}} ,$$

ou bien

$$(x-1)^n > G ,$$

ou encore

$$x-1 > \sqrt[n]{G} ;$$

et, par suite,

$$x > 1 + \sqrt[n]{G} ,$$

le signe  $>$  n'excluant par le signe d'égalité; ainsi on peut prendre pour limite supérieure des racines réelles d'une équation proposée tout nombre qui ne sera pas moindre que l'unité augmentée d'une racine du plus grand coefficient négatif, pris positivement, dont l'exposant soit le nombre des termes qui précèdent le premier terme négatif.

---