ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

BOBILLIER

# Géométrie de situation. Théorèmes sur les polaires successives

*Annales de Mathématiques pures et appliquées*, tome 19 (1828-1829), p. 302-307
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1828-1829__19__302_0>

# GÉOMÉTRIE DE SITUATION.

## *Théorèmes sur les polaires successives ;*

Par M. Bobillier, professeur à l'école des arts et métiers de Châlons-sur-Marne.

Soient

$$M=0\ ,\quad M_1=0\ ,\quad M_2=0\ ,\ \ldots\ldots\ M_{m-n}=0\ ,\ \ldots\ldots\ M_n=0$$

les équations d'une suite de courbes des $m.^{ieme}$, $(m-1)^{ieme}$, $(m-1)^{ieme}$, .... $(m-n)^{ieme}$, ...... $n.^{ieme}$ degrés, dont la première seule soit arbitraire, et dont chacune soit, par rapport à celle qui la précède immédiatement, considérée comme directrice, la *courbe polaire* d'un point donné $(x',y')$ ; ces courbes sont ce que nous appelerons les *polaires successives* de ce point, par rapport à cette directrice, et nous les désignerons sous les dénominations de $1.^{iere}$, $2.^{ieme}$, $3.^{ieme}$, ..... $(m-n)^{ieme}$, ...... $n.^{ieme}$ polaires du point $(x',y')$.

D'après un théorème précédemment démontré ( pag. 106 ), nous aurons

$$M_1=\quad mM-\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}(x-x')-\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}y}(y-y')\ ,$$

$$M_2=(m-1)M_1-\frac{\mathrm{d}M_1}{\mathrm{d}x}(x-x')-\frac{\mathrm{d}M_1}{\mathrm{d}y}(y-y')\ ,$$

$$M_3=(m-2)M_2-\frac{\mathrm{d}M_2}{\mathrm{d}x}(x-x')-\frac{\mathrm{d}M_2}{\mathrm{d}y}(y-y')\ ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ ,$$

$$M_n=(m-n+1)M_{n-1}-\frac{dM_{n-1}}{dx}(x-x')-\frac{dM_{n-1}}{dy}(y-y') .$$

A l'aide de cette suite d'équations, il nous sera facile, par des différentiations et substitutions successives d'obtenir tour à tour les valeurs de $M_2$, $M_3$, ..... $M_n$, en fonction de $M$, en égalant la dernière à zéro, et posant, pour abréger,

$$1.2.3........k=k!$$

nous trouverons, pour l'équation de la $n.^{ième}$ polaire du point $(x',y')$, par rapport à la directrice $M=0$,

$$0=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{m!}{n!}M \\ -\dfrac{(m-1)!}{(n-1)!}\left\{\dfrac{dM}{dx}\dfrac{(x-x')}{1}+\dfrac{dM}{dy}\dfrac{(y-y')}{1}\right\} \\ +\dfrac{(m-2)!}{(n-2)!}\left\{\dfrac{d^2M}{dx^2}\dfrac{(x-x')^2}{1.2}+\dfrac{d^2M}{dxdy}\dfrac{(x-x')}{1}\dfrac{(y-y')}{1}+\dfrac{d^2M}{dy^2}\dfrac{(y-y')^2}{1.2}\right\} \\ -\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \pm\dfrac{(m-n)!}{1}\left\{\dfrac{d^nM}{dx^n}\dfrac{(x-x')^n}{n!}+\dfrac{d^nM}{dx^{n-1}dy}\dfrac{(x-x')^{n-1}}{(n-1)!}\dfrac{(y-y')}{1}+\cdots\cdots+\dfrac{d^nM}{dy^n}\dfrac{(y-y')^n}{n!}\right\}\end{array}\right\}.$$

Supposons que le point $(x',y')$ étant indéterminé, on veuille le déterminer de telle sorte que cette polaire passe par un point donné $(x'',y'')$, il faudra pour cela exprimer que l'équation ci-dessus est satisfaite en changeant simultanément $x$ et $y$ en $x''$ et $y''$. Changeant ensuite respectivement $x'$ et $y'$ en $x$ et $y$, on trouvera pour l'équation du lieu du point $(x',y')$

$$
(\mathrm{P})\quad 0=\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{m\,!}{n\,!}M'' \\[2ex]
+\dfrac{(m-1)\,!}{(n-1)\,!}\left\{\dfrac{\mathrm{d}M''}{\mathrm{d}x''}\,\dfrac{(x-x'')}{1}+\dfrac{\mathrm{d}M''}{\mathrm{d}y''}\,\dfrac{(y-y'')}{1}\right\} \\[2ex]
+\dfrac{(m-2)\,!}{(n-2)\,!}\left\{\dfrac{\mathrm{d}^2M''}{\mathrm{d}x''^2}\,\dfrac{(x-x'')^2}{1.2}+\dfrac{\mathrm{d}^2M''}{\mathrm{d}x''\mathrm{d}y''}\,\dfrac{(x-x'')}{1}\,\dfrac{(y-y'')}{1}+\dfrac{\mathrm{d}^2M''}{\mathrm{d}y''^2}\,\dfrac{(y-y'')^2}{1.2}\right\} \\[2ex]
+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\[2ex]
+\dfrac{(m-n)\,!}{1}\left\{\dfrac{\mathrm{d}^nM''}{\mathrm{d}x''^n}\,\dfrac{(x-x'')^n}{n\,!}+\dfrac{\mathrm{d}^nM''}{\mathrm{d}x''^{n-1}\mathrm{d}y''}\,\dfrac{(x-x'')^{n-1}}{(n-1)\,!}\,\dfrac{(y-y'')}{1}+\ldots\ldots+\dfrac{\mathrm{d}^nM''}{\mathrm{d}y''^n}\,\dfrac{(y-y'')^n}{n\,!}\right\}
\end{array}\right\}
$$

Si, présentement, on représente généralement par $u_k$ une fonction homogène du $k$.$^{ieme}$ degré en $x$ et $y$, toute courbe du $m$.$^{ieme}$ degré aura une équation de la forme

$$u_0+u_1+u_2+\ldots\ldots+u_n+\ldots\ldots+u_m=0\ .$$

Si l'on cherche les polaires successives de l'origine, par rapport à cette courbe prise pour directrice, au moyen des considérations exposées à la pag. 89 du précédent volume, on trouvera facilement, pour l'équation de la $(m-n)^{ieme}$ polaire,

$$\frac{m\,!}{n\,!}u_0+\frac{(m-1)\,!}{(n-1)\,!}u_1+\frac{(m-2)\,!}{(n-2)\,!}u_2+\ldots\ldots+\frac{(m-n)\,!}{1}u_n=0\ .$$

En conséquence, pour obtenir l'équation de la $(m-n)^{ieme}$ polaire d'un point $(x'',y'')$, relativement à la directrice $M=0$, il faudra d'abord transporter l'origine en ce point, en changeant respectivement dans $M$, $x$ et $y$ en $x+x''$ et $y+y''$, et développer; puis dans le développement multiplier respectivement les termes de $0$, $1$, $2$,...... $n$ dimensions par

$$\frac{m!}{n!}\,,\quad \frac{(m-1)!}{(n-1)!}\,,\quad \frac{(m-2)!}{(n-2)!}\,,\ \ldots\ldots\ \frac{(m-n)!}{1}\,,$$

et supprimer tous ceux de dimensions plus élevées ; après quoi, il faudra remplacer respectivement $x$ et $y$ par $x-x''$ et $y-y''$, afin de retourner à l'origine primitive. Or, il est visible que l'équation résultante ne sera autre chose que l'équation (P) ci-dessus. En invoquant donc le principe de dualité, on obtiendra les deux théorèmes que voici :

*THÉORÈME I. Si, par rapport à une même directrice du* (p+q)ieme *degré, on détermine la* p ieme *polaire d'un point* P *et la* q.ieme *polaire d'un point* Q, *et que l'un quelconque de ces deux points ait été choisi sur la polaire de l'autre, ce dernier point se trouvera réciproquement sur la polaire du premier* (*).

*THÉORÈME I. Si, par rapport à une même directrice de* (p+q)ieme *classe, on détermine la* p.ieme *polaire d'une droite* P *et la* q.ieme *polaire d'une droite* Q, *et que l'une quelconque de ces deux droites ait été choisie tangente à la polaire de l'autre, cette dernière droite se trouvera réciproquement tangente à la polaire de la première.*

Si l'on fait $p=m-1$ et $q=1$, on retombe sur le théorème de la pag. 157 du précédent volume, qui n'est ainsi qu'un cas très-particulier de celui-ci.

Au moyen de ces deux théorèmes, on pourra résoudre les deux problèmes que voici :

*PROBLÈME I. Trouver, sur le plan d'une directrice donnée du* m.ieme *degré, un point dont la*

*PROBLÈME I. Trouver, sur le plan d'une directrice donnée de* m.ieme *classe, une droite dont*

(*) M. Plucker nous a adressé postérieurement, sans démonstration, un théorème tout à fait analogue.

J. D. G.

$n^{ieme}$ *polaire, relative à cette directrice, passe par deux points donnés ?*

Si, en effet, on détermine, par rapport à la directrice proposée, les $(m-n)^{iemes}$ polaires des deux points donnés, il résulte de notre théorème que les $n.^{iemes}$ polaires de leurs intersections, relatives à la même directrice, passeront par les deux points donnés. Et, comme les $(m-n)^{iemes}$ polaires des deux points donnés seront l'une et l'autre du $n.^{ieme}$ degré, le problème aura $n^2$ solutions.

*la* $n.^{ieme}$ *polaire, relative à cette directrice, touche deux droites données ?*

Si, en effet, on détermine, par rapport à la directrice proposée, les $(m-n)^{iemes}$ polaires des deux droites données, il résulte de notre théorème que les $n.^{iemes}$ polaires de leurs tangentes communes, relatives à la même directrice, toucheront les deux droites données. Et, comme les $(m-n)^{iemes}$ polaires des deux droites données seront l'une et l'autre de $n.^{ieme}$ classe, le problème aura $n^2$ solutions.

En appliquant aux fonctions de trois variables $x, y, z$ les considérations qui nous ont guidés dans ce qui précède, on parviendra, sans autre peine que celle d'écrire des développemens, à établir les deux théorèmes que voici :

*THÉORÈME II. Si, par rapport à une même surface directrice du* $(p+q)^{ieme}$ *degré, on détermine la* $p.^{ieme}$ *polaire d'un point* P *et la* $q.^{ieme}$ *polaire d'un point* Q, *et que l'un quelconque de ces deux points ait été choisi sur la polaire de l'autre, ce dernier point se trouvera réciproquement sur la polaire du premier.*

*THÉORÈME II. Si, par rapport à une même surface directrice de* $(p+q)^{ieme}$ *classe, on détermine la* $p.^{ieme}$ *polaire d'un plan* P *et la* $q^{ieme}$ *polaire d'un plan* Q, *et que l'un quelconque de ces deux plans ait été choisi tangent à la polaire de l'autre, ce dernier plan se trouvera réciproquement tangent à la polaire du premier.*

Si l'on fait $p=m-1$ et $q=1$, on retombe sur le théorème de la pag. 164 du précédent volume, qui n'est ainsi qu'un cas très-particulier de celui-ci.

Au moyen de ces deux théorèmes, on pourra résoudre les deux problèmes que voici :

*PROBLÈME II. Une surface directrice du* m.ieme *degré étant donnée, trouver, dans l'espace, un point dont la* n.ieme *polaire, relative à cette surface, passe par trois points donnés ?*

Si, en effet, on détermine, par rapport à la surface directrice proposée, les $(m-n)^{iemes}$ polaires des trois points donnés, il résulte de notre théorème que les $n.^{iemes}$ polaires de leurs intersections, relatives à la même directrice, passeront par les trois points donnés. Et, comme les $(m-n)^{iemes}$ polaires des trois points donnés seront toutes trois du $n.^{ieme}$ degré, le problème aura $n^3$ solutions.

*PROBLÈME II. Une surface de* m.ieme *classe étant donnée, trouver, dans l'espace, un plan dont la* n.ieme *polaire, relative à cette surface, touche trois plans donnés ?*

Si, en effet, on détermine, par rapport à la surface directrice proposée, les $(m-n)^{iemes}$ polaires des trois plans donnés, il résulte de notre théorème que les $n.^{iemes}$ polaires de leurs plans tangens communs, relatives à la même directrice, toucheront les trois plans donnés. Et, comme les $(m-n)^{iemes}$ polaires des trois plans donnés seront toutes trois de $n.^{ieme}$ classe, le problème aura $n^3$ solutions.

Châlons, le 20 avril 1828.