VALLÈS

Questions résolues. Solution du problème de géométrie énoncé à la pag. 96 du présent volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 19 (1828-1829), p. 252-255
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1828-1829__19__252_0>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution du problème de géométrie énoncé à la pag. 96 du présent volume ;

Par M. Vallès, élève ingénieur des ponts et chaussées.

Soient inscrits à un angle donné 2α deux cercles se touchant extérieurement. Soient r, r' les rayons de ces cercles, et d, d' les distances de leurs centres au sommet de l'angle ; en supposant $r>r'$, et par suite $d>d'$, on aura évidemment

$$r=d\text{Sin.}\alpha\,,\quad r'=d'\text{Sin.}\alpha\,,\quad r+r'=d-d'\ ;$$

éliminant d et d' entre ces trois équations, on en tirera

$$\frac{r}{r'}=\frac{1+\text{Sin.}\alpha}{1-\text{Sin.}\alpha}\quad (*)\ :$$

(*) On peut écrire

$$\frac{r}{r'}=\frac{1+\text{Sin.}\alpha}{1-\text{Sin.}\alpha}=\left(\frac{\sqrt{1+\text{Cos.}\alpha}+\sqrt{1-\text{Cos.}\alpha}}{\sqrt{1+\text{Cos.}\alpha}-\sqrt{1-\text{Cos.}\alpha}}\right)^2=\left\{\frac{1+\sqrt{\dfrac{1-\text{Cos.}\alpha}{1+\text{Cos.}\alpha}}}{1-\sqrt{\dfrac{1-\text{Cos.}\alpha}{1+\text{Cos.}\alpha}}}\right\}^2$$

$$=\left(\frac{1+\text{Tang.}\frac{1}{2}\alpha}{1-\text{Tang.}\frac{1}{2}\alpha}\right)^2=\left(\frac{\text{Tang.}\frac{1}{4}\varpi+\text{Tang.}\frac{1}{2}\alpha}{1-\text{Tang.}\frac{1}{4}\varpi\,\text{Tang.}\frac{1}{2}\alpha}\right)^2=\text{Tang.}^2(\tfrac{1}{4}\varpi+\tfrac{1}{2}\alpha)$$

c'est-à-dire que le rapport entre les rayons de ces deux cercles est indépendant de leur grandeur. De là résulte ce théorème :

Si l'on inscrit à un même angle une suite de cercles se touchant consécutivement, les rayons de ces cercles, et par suite leurs circonférences et leurs surfaces, formeront une progression par quotiens.

Concevons que l'on fasse tourner la moitié de l'angle donné 2α, autour de la droite qui le divise en deux parties égales ; cette moitié engendrera un cône de révolution dont l'angle générateur sera α ; et les demi-cercles engendreront des sphères inscrites à ce cône, lesquelles se toucheront consécutivement ; on a donc cet autre théorème :

Si l'on inscrit à un cône droit une suite de sphères qui se touchent consécutivement ; les rayons de ces sphères, et par suite les circonférences et les surfaces de leurs grands cercles, leurs surfaces et leurs volumes formeront une progression par différences.

A un angle trièdre donné soit inscrite une suite de sphères qui se touchent consécutivement ; ces sphères seront aussi inscrites à la surface conique inscrite à cet angle trièdre ; on a donc ce troisième théorème qui est précisément celui qu'il s'agissait d'établir :

Si, à un angle trièdre donné, on inscrit une suite de sphères qui se touchent consécutivement, les rayons de ces sphères, et par

---

c'est sous cette forme que $\frac{r}{r'}$ a été donnée par M. L. P. E. R., qui a aussi résolu le problème.

On pourrait encore écrire $\frac{r}{r'}=\frac{\text{Sin}.\frac{1}{2}\varpi+\text{Sin}.\alpha}{\text{Sin}.\frac{1}{2}\varpi-\text{Sin}.\alpha}=\frac{\text{Tang}.(\frac{1}{4}\varpi+\frac{1}{2}\alpha)}{\text{Tang}.(\frac{1}{4}\varpi-\frac{1}{2}\alpha)}$, formule qui rentre dans la première, en observant qu'en général $\text{Tang}.(\frac{1}{4}\varpi+x).\text{Tang}.(\frac{1}{4}\varpi-x)=1$; mais qui a l'inconvénient d'exiger l'emploi de deux logarithmes.

J. D. G.

suite les circonférences et les surfaces de leurs grands cercles, leurs surfaces et leurs volumes formeront une progression par quotiens.

Un cercle d'un rayon r étant inscrit à l'angle plan 2α, on pourra, en marchant vers son sommet, lui inscrire une infinité d'autres cercles, de plus en plus petits. Les rayons de ces cercles formeront une progression décroissante par quotiens, dont la raison sera, comme nous l'avons vu ci-dessus, $\frac{1+\text{Sin}.\alpha}{1-\text{Sin}.\alpha}$; on aura donc pour la somme de ces rayons $\frac{r(1+\text{Sin}.\alpha)}{2\text{Sin}.\alpha}$. La somme des circonférences de ces mêmes cercles sera d'après cela $\frac{\varpi r(1+\text{Sin}.\alpha)}{\text{Sin}\,\alpha}$. Quant à leurs surfaces, elles formeront une progression décroissante par quotiens dont le premier terme sera ϖr^2 et la raison $\left(\frac{1+\text{Sin}.\alpha}{1-\text{Sin}.\alpha}\right)^2$; en conséquence, on trouvera pour la somme des aires de ces cercles

$$\frac{\varpi r^2(1+\text{Sin}.\alpha)^2}{4\text{Sin}.\alpha}.$$

De même, une sphère d'un rayon r étant inscrite à un cône droit dont l'angle générateur est α, on pourra, en marchant vers son sommet, lui inscrire une infinité d'autres sphères, de plus en plus petites. On trouvera, pour la somme des rayons de ces sphères $\frac{r(1+\text{Sin}.\alpha)}{2\text{Sin}.\alpha}$; pour la somme des circonférences de leurs grands cercles $\frac{\varpi r(1+\text{Sin}\,\alpha)}{\text{Sin}.\alpha}$; pour la somme des aires de ces grands cercles $\frac{\varpi r^2(1+\text{Sin}.\alpha)^2}{4\text{Sin}.\alpha}$; pour la somme des surfaces des sphères $\frac{\varpi r^2(1+\text{Sin}\,\alpha)^2}{\text{Sin}.\alpha}$. Enfin, les volumes de ces sphères formeront une progression décroissante par quotiens, dont le premier terme sera $\frac{4}{3}\varpi r^3$, et la raison $\left(\frac{1+\text{Sin}\,\alpha}{1-\text{Sin}.\alpha}\right)^3$; ce qui donnera, pour la somme de ces volumes,

$$\frac{2\varpi r^3(1+\text{Sin}.\alpha)^3}{3(3+\text{Sin}.\alpha)\text{Sin}.\alpha}\ .$$

On sait (*Annales*, tom. XV, pag. 298) que, si a, b, c sont les trois angles plans d'un angle trièdre, et que α soit l'angle générateur du cône inscrit, en posant, pour abréger,

$$a+b+c=2s\ ,$$

$$p^2=\text{Sin}.s\text{Sin}.(s-a)\text{Sin}.(s-b)\text{Sin}.(s-c)\ ;$$

on a

$$\text{Tang}.\alpha=\frac{p}{\text{Sin}.s}\ ,$$

d'où

$$\text{Sin}.\alpha=\frac{p}{\sqrt{p^2+\text{Sin}.^2s}}\ ;$$

et

$$\frac{1+\text{Sin}.\alpha}{1-\text{Sin}.\alpha}=\frac{\sqrt{p^2+\text{Sin}.^2s}+p}{\sqrt{p^2+\text{Sin}.^2s}-p}=\frac{(\sqrt{p^2+\text{Sin}.^2s}+p)^2}{\text{Sin}.^2s}\ ;$$

et telle sera conséquemment la raison de la progression par quotiens que formeront les rayons et les circonférences des grands cercles des sphères inscrites ; les surfaces de ces grands cercles et celles des sphères formeront une progression dont la raison sera le carré de cette quantité, et les volumes de ces sphères formeront une progression dont la raison en sera le cube (*).

(*) C'est précisément à ce résultat que parvient M. Steiner; et qui nous a aussi été adressé postérieurement par M. Bobillier et par M. Martinelli, cadet au corps royal des pionniers, à Modène.

J. D. G.