

---

---

# ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

---

---

F. SARRUS

**Hydro-dynamique. Mémoire sur les oscillations des corps flottans**

*Annales de Mathématiques pures et appliquées*, tome 19 (1828-1829), p. 185-210

[http://www.numdam.org/item?id=AMPA\\_1828-1829\\_\\_19\\_\\_185\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1828-1829__19__185_0)

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1828-1829, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

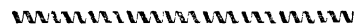
NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## HYDRO - DYNAMIQUE.

*Mémoire sur les oscillations des corps flottans ;*

Par M. F. SARRUS, docteur agrégé ès sciences, professeur  
de mathématiques et de physique à Perpignan.



LE problème qui fait le sujet de cet essai, traité avec toute la généralité dont il est susceptible, consisterait à déterminer les divers mouvemens d'oscillation que peut prendre un corps solide libre, pesant, plongé en tout ou en partie dans un fluide également soumis à l'action de la pesanteur, mais qui peut être indifféremment compressible ou incompressible, homogène ou composé de couches de nature différente.

Dans l'état actuel de la science, la solution rigoureuse de ce problème est, pour ainsi dire, impossible; aussi les divers géomètres qui ont essayé d'en résoudre quelques cas particuliers, n'ont-ils pu y parvenir qu'au moyen des hypothèses suivantes, savoir :

1.<sup>o</sup> Que la pression qu'éprouve chacun des points du corps flottant peut être calculée comme si le fluide n'avait aucun mouvement ;

2.<sup>o</sup> Que les divers mouvemens du corps flottant sont assez petits pour qu'il soit permis de négliger, sans erreur sensible, les quantités de l'ordre des carrés ou produits de ces mouvemens ;

3.<sup>o</sup> Que les dimensions du corps flottant sont assez petites pour qu'on puisse regarder la pesanteur comme une force de grandeur constante, agissant suivant des directions parallèles.

Comme dans les cas réellement utiles, ces diverses suppositions ne s'écartent que bien peu de la vérité, les résultats auxquels elles conduisent peuvent être considérés comme suffisamment approchés; nous les adopterons donc dans ce qui va suivre; mais, à cela près, nous présenterons une solution purement analytique du problème général, tel que nous l'avons posé ci-dessus.

Représentons, suivant l'usage, par  $g$  la gravité, la masse d'une molécule quelconque du corps flottant par  $Dm$ , la pression normale qu'éprouve chaque point d'un élément  $\omega$  de la surface de ce corps par  $p$ , la normale correspondante, mesurée depuis un point de cette droite pris dans l'intérieur du corps, par  $r$ , prenant l'axe des  $z$  vertical et dirigé de haut en bas, et observant que la pression  $p$  tend à diminuer la longueur  $r$  de la normale, nous aurons, pour déterminer le mouvement du corps flottant, l'équation

$$S \left( \frac{d^2x dx + d^2y dy + d^2z dz}{dt^2} \right) Dm = Sg \delta z Dm - \int p \omega dr, \quad (1)$$

dans laquelle les intégrales indiquées par la caractéristique  $S$  sont relatives à la molécule  $Dm$ , et doivent s'étendre à toute la masse du corps flottant, tandis que l'intégrale indiquée par la caractéristique  $\int$  est relative à l'élément  $\omega$ , et doit s'étendre seulement à toute la partie de la surface de ce même corps qui est baignée par le fluide. On doit observer, en outre, que les variations  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  ne sont pas entièrement arbitraires, parce qu'elles doivent satisfaire à la condition d'invariabilité de distance entre deux molécules quelconques. Cette condition va nous conduire à la forme la plus générale de ces variations.

En désignant par  $x, y, z; X, Y, Z$  les coordonnées de deux molécules quelconques du corps flottant, le carré de leur distance sera exprimé par

$$(x-X)^2 + (y-Y)^2 + (z-Z)^2,$$

dont la variation doit être identiquement nulle; ce qui donne

$$0 = (x-X)(\delta x - \delta X) + (y-Y)(\delta y - \delta Y) + (z-Z)(\delta z - \delta Z),$$

laquelle doit être satisfaite, quelles que soient les valeurs particulières des coordonnées  $x, y, z, X, Y, Z$ .

En prenant successivement pour  $(X, Y, Z)$  trois points fixés invariablement avec la masse du corps flottant, l'on arriverait à trois équations semblables à la précédente, et au moyen desquelles on parviendrait à déterminer  $\delta x, \delta y, \delta z$ , en fonction de  $x, y, z$ , des coordonnées des trois points auxiliaires et des variations de ces coordonnées; c'est-à-dire en fonction de  $x, y, z$  et d'autres quantités qui ont la même valeur pour toute autre molécule. Cela posé, si l'on différentie l'équation ci-dessus, successivement par rapport à  $x, y, z$ , et que l'on observe que  $X, Y, Z$  doivent être traités comme des constantes, l'on trouvera

$$0 = \delta x - \delta X + (x-X) \frac{d\delta x}{dx} + (y-Y) \frac{d\delta y}{dx} + (z-Z) \frac{d\delta z}{dx},$$

$$0 = \delta y - \delta Y + (x-X) \frac{d\delta x}{dy} + (y-Y) \frac{d\delta y}{dy} + (z-Z) \frac{d\delta z}{dy},$$

$$0 = \delta z - \delta Z + (x-X) \frac{d\delta x}{dz} + (y-Y) \frac{d\delta y}{dz} + (z-Z) \frac{d\delta z}{dz}.$$

En différentiant celles-ci, à leur tour, successivement par rapport à  $X, Y, Z$ , et observant que, dans ce cas, ces quantités et leurs variations sont les seules que l'on doive traiter comme variables, on trouvera

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d\delta x}{dx} + \frac{d\delta X}{dX} , & 0 &= \frac{d\delta x}{dy} + \frac{d\delta Y}{dY} , & 0 &= \frac{d\delta x}{dz} + \frac{d\delta Z}{dZ} , \\
0 &= \frac{d\delta y}{dx} + \frac{d\delta X}{dY} , & 0 &= \frac{d\delta y}{dy} + \frac{d\delta Y}{dY} , & 0 &= \frac{d\delta y}{dz} + \frac{d\delta Z}{dY} , \\
0 &= \frac{d\delta z}{dx} + \frac{d\delta X}{dZ} ; & 0 &= \frac{d\delta z}{dy} + \frac{d\delta Y}{dZ} ; & 0 &= \frac{d\delta z}{dz} + \frac{d\delta Z}{dZ} .
\end{aligned}$$

Comme les différens termes qui entrent dans ces équations sont indépendans les uns des  $x, y, z$  et les autres de  $X, Y, Z$ , on en conclura sans peine qu'ils sont tous indépendans tant de  $x, y, z$  que de  $X, Y, Z$ , et que, par conséquent, on doit avoir idéntiquement

$$\begin{aligned}
\frac{d\delta x}{dx} &= \frac{d\delta X}{dX} , & \frac{d\delta x}{dy} &= \frac{d\delta X}{dY} , & \frac{d\delta x}{dz} &= \frac{d\delta X}{dZ} , \\
\frac{d\delta y}{dx} &= \frac{d\delta Y}{dX} , & \frac{d\delta y}{dy} &= \frac{d\delta Y}{dY} , & \frac{d\delta y}{dz} &= \frac{d\delta Y}{dZ} , \\
\frac{d\delta z}{dx} &= \frac{d\delta Z}{dX} ; & \frac{d\delta z}{dy} &= \frac{d\delta Z}{dY} ; & \frac{d\delta z}{dz} &= \frac{d\delta Z}{dZ} ;
\end{aligned}$$

dont la comparaison avec celles qui précédent nous conduit à faire

$$\begin{aligned}
\frac{d\delta x}{dx} &= 0 , & \frac{d\delta y}{dz} &= - \frac{d\delta z}{dy} = \lambda , \\
\frac{d\delta y}{dy} &= 0 , & \frac{d\delta z}{dx} &= - \frac{d\delta x}{dz} = \mu , \\
\frac{d\delta z}{dz} &= 0 , & \frac{d\delta x}{dy} &= - \frac{d\delta y}{dx} = \nu ;
\end{aligned}$$

en désignant par  $\lambda, \mu, \nu$  des quantités quelconques indépendantes de  $x, y, z$ , et qui doivent conserver leurs valeurs pour toutes les molécules.

Présentement les différentielles totales de  $\delta x, \delta y, \delta z$ , prises en regardant le temps comme constant, donnent identiquement

$$d\delta x = \frac{d\delta x}{dx} dx + \frac{d\delta x}{dy} dy + \frac{d\delta x}{dz} dz ,$$

$$d\delta y = \frac{d\delta y}{dx} dx + \frac{d\delta y}{dy} dy + \frac{d\delta y}{dz} dz ,$$

$$d\delta z = \frac{d\delta z}{dx} dx + \frac{d\delta z}{dy} dy + \frac{d\delta z}{dz} dz ;$$

lesquelles, au moyen des résultats que nous venons d'obtenir, se réduiront à

$$d\delta x = \nu dy - \mu dz ,$$

$$d\delta y = \lambda dz - \nu dx ,$$

$$d\delta z = \mu dx - \lambda dy ;$$

qui, par leur intégration, nous donneront pour  $\delta x, \delta y, \delta z$  les valeurs suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= \alpha + \nu y - \mu z , \\ \delta y &= \beta + \lambda z - \nu x , \\ \delta z &= \gamma + \mu x - \lambda y ; \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

dans lesquelles  $\alpha, \beta, \gamma$  sont des quantités indépendantes de  $x, y, z$ , mais d'ailleurs arbitraires.

Avant de substituer ces valeurs de  $\delta x, \delta y, \delta z$  dans l'équation (1),

il convient de mettre le terme  $\int \rho \omega \delta r$  de cette équation sous une forme qui se prête plus facilement aux calculs que nous aurons à effectuer par la suite.

Lorsque le corps flottant est entièrement plongé dans le fluide, cette intégrale  $\int \rho \omega \delta r$  doit être prise dans toute l'étendue de la surface de ce corps. Or, on pourra toujours admettre qu'il en est ainsi, pourvu qu'on regarde, s'il le faut, la densité du fluide comme étant nulle dans une étendue plus ou moins considérable. Au moyen de ce petit artifice, nous n'aurons plus besoin de distinguer le cas où le corps flottant est entièrement plongé dans le fluide de celui où il ne l'est qu'en partie seulement.

Cela posé, soient  $a, b, c$  les coordonnées de l'origine de la normale; nous aurons

$$r^2 = (a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2$$

et par suite

$$\delta r = -\frac{a-x}{r} \delta x - \frac{b-y}{r} \delta y - \frac{c-z}{r} \delta z,$$

d'où on conclura

$$-\int \rho \omega \delta r = \int \rho \omega \cdot \frac{a-x}{r} \delta x + \int \rho \omega \cdot \frac{b-y}{r} \delta y + \int \rho \omega \cdot \frac{c-z}{r} \delta z :$$

Présentement nous observerons que l'expression  $\frac{a-x}{r}$  est celle du cosinus de l'angle que ferait cette normale avec une parallèle menée par son pied, à l'axe des  $x$ ; et que, par suite, cette expression est aussi celle du cosinus de l'inclinaison de l'élément  $\omega$  sur le plan des  $yz$ ; de sorte que la projection de cet élément sur le plan des  $yz$  est, abstraction faite de son signe, égale à  $\omega \cdot \frac{a-x}{r}$ . Appelant donc  $d y dz$  cette projection, nous aurons

$$\omega. \frac{a-x}{r} = \pm dydz ;$$

le signe  $+$  ou  $-$  devant être convenablement déterminé. Pour reconnaître quel est celui de ces deux signes qu'il faut prendre, dans chaque cas particulier, considérons une droite indéfinie parallèle à l'axe des  $x$ ; les valeurs de  $y$  et de  $z$ , relatives aux différens points de cette droite, seront toujours les mêmes; il n'y aura que celle de  $x$  qui changera. Nommant donc  $x_1, x_2, x_3, \dots$  les valeurs de  $x$  qui sont relatives aux points où la droite perce la surface du corps flottant, et supposant ces valeurs rangées dans un ordre tel que l'on ait

$$x_2 - x_1 > 0, \quad x_3 - x_2 > 0, \quad x_4 - x_3 > 0, \dots,$$

ce qui est toujours possible, on verra sans peine que les différens points de cette droite, pour lesquels  $x$  se trouve compris entre  $x_1$  et  $x_2$ ,  $x_3$  et  $x_4$ ,  $x_5$  et  $x_6, \dots$  sont situés dans l'intérieur du corps flottant, et les autres, c'est-à-dire, ceux pour lesquels  $x$  se trouve compris entre  $x_2$  et  $x_3$ ,  $x_4$  et  $x_5, \dots$  en dehors de ce corps; ce qui exige que les points d'intersection de la droite avec la surface du corps flottant soient en nombre pair, et, de plus, que, par cela seul que la normale  $r$  doit être tout entière dans l'intérieur du corps flottant, on ait

$$a_1 - x_1 > 0, \quad a_2 - x_2 < 0, \quad a_3 - x_3 > 0, \dots$$

$a_1, a_2, a_3, \dots$  représentant les valeurs de  $a$  qui correspondent aux normales  $r_1, r_2, r_3, \dots$  relatives à  $x_1, x_2, x_3, \dots$ . Si donc on représente par  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$  les élémens de la surface du corps flottant qui se trouvent situés aux différens points où cette surface est percée par la parallèle à l'axe des  $x$  dont il vient d'être question, nous pourrons faire



$$\omega_1 \cdot \frac{a_1 - x_1}{r_1} = +dydz ,$$

$$\omega_2 \cdot \frac{a_2 - x_2}{r_2} = -dydz ,$$

$$\omega_3 \cdot \frac{a_3 - x_3}{r_3} = +dydz ,$$

. . . . .

En observant que ces élémens peuvent toujours être pris de telle grandeur que leurs projections soient égales entre elles, nous concluons de là

$$\begin{aligned} p_1 \omega_1 \cdot \frac{a_1 - x_1}{r_1} \delta x_1 + p_2 \omega_2 \cdot \frac{a_2 - x_2}{r_2} \delta x_2 + p_3 \omega_3 \cdot \frac{a_3 - x_3}{r_3} \delta x_3 + \dots \\ = -dydz (p_2 \delta x_2 - p_1 \delta x_1 + p_4 \delta x_4 - p_3 \delta x_3 + \dots) , \end{aligned}$$

en désignant par  $p_1, p_2, p_3, \dots$  les valeurs de  $p$  qui sont relatives aux élémens  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$

Maintenant nous observerons que les valeurs de  $\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3, \dots$  doivent être données par la première des équations (2), et que, par conséquent, elles ne sont fonctions que des coordonnées  $y, z$ , lesquelles conservent leurs valeurs dans toute l'étendue de la transversale, et qu'ainsi l'on a

$$\delta x_1 = \delta x_2 = \delta x_3 = \dots = \delta x ;$$

ce qui change le résultat obtenu ci-dessus en celui qui suit :

$$\begin{aligned} p_1 \omega_1 \cdot \frac{a_1 - x_1}{r_1} \delta x_1 + p_2 \omega_2 \cdot \frac{a_2 - x_2}{r_2} \delta x_2 + p_3 \omega_3 \cdot \frac{a_3 - x_3}{r_3} \delta x_3 + \dots \\ = -dydz \delta x (p_2 - p_1 + p_4 - p_3 + \dots) . \end{aligned}$$

Présentement, si l'on regarde  $p$  comme une fonction purement analytique dont l'existence a lieu dans tous les points de l'espace, on pourra faire

$$p_2 - p_1 + p_3 - p_4 + \dots = \int \frac{dp}{dx} dx ,$$

pourvu seulement que l'on ne prenne l'intégrale du second membre que pour les points situés dans l'intérieur du corps flottant ; par suite nous aurons

$$p_1 \omega_1 \cdot \frac{a_1 - x_1}{r_1} \delta x_1 + p_2 \omega_2 \cdot \frac{a_2 - x_2}{r_2} \delta x_2 + p_3 \omega_3 \cdot \frac{a_3 - x_3}{r_3} + \dots = -dydz \delta x \int \frac{dp}{dx} dx .$$

Pour obtenir l'intégrale  $\int p \omega \cdot \frac{a-x}{r} \delta x$ , nous n'aurons qu'à prendre la somme de toutes les expressions analogues à celle qui forme le second membre de cette équation, ce qui nous donnera

$$\int p \omega \cdot \frac{a-x}{r} \delta x = -\iint dydz \delta x \int \frac{dp}{dx} dx = -\iiint dx dy dz \cdot \frac{dp}{dx} \delta x ,$$

on aura semblablement

$$\int p \omega \cdot \frac{b-y}{r} \delta y = -\iiint dx dy dz \cdot \frac{dp}{dy} \delta y , \quad \int p \omega \cdot \frac{c-z}{r} \delta z = -\iiint dx dy dz \cdot \frac{dp}{dz} \delta z ,$$

et par suite

$$\int p \omega \delta r = +\iiint dx dy dz \left( \frac{dp}{dx} \delta x + \frac{dp}{dy} \delta y + \frac{dp}{dz} \delta z \right) ;$$

ou enfin

$$\int p \omega \delta r = +\iiint \delta p \cdot dx dy dz ;$$

l'intégrale du second membre devant être prise dans toute l'éten-

due de l'espace occupé par le corps flottant. En substituant cette valeur dans l'équation (1) elle deviendra

$$S \left( \frac{d^2x\delta x + d^2y\delta y + d^2z\delta z}{dt^2} \right) Dm = gS\delta z Dm - \iiint \delta p . dx dy dz . \quad (3)$$

Il nous reste à mettre dans cette équation la valeur de  $\delta p$ , valeur que nous ne pouvons trouver qu'en supposant l'équilibre du fluide; ce qui donne, comme l'on sait,

$$\delta p = g\Delta\delta z , \quad (4)$$

en désignant par  $\Delta$  la densité de ce fluide. Au moyen de cette valeur, l'équation (3) deviendra

$$S \left( \frac{d^2x\delta x + d^2y\delta y + d^2z\delta z}{dt^2} \right) Dm = gS\delta z Dm - g\iiint \Delta\delta z . dx dy dz ; \quad (5)$$

dans laquelle il faudra substituer les valeurs de  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$ , données par les équations (2); mais il convient auparavant de lui faire subir encore une transformation.

Désignons par  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  les coordonnées du centre de gravité du corps flottant, et faisant

$$x = X + x' , \quad y = Y + y' , \quad z = Z + z' ,$$

nous aurons identiquement

$$Sx Dm = SX Dm + Sx' Dm = mX + Sx' Dm ,$$

$$Sy Dm = SY Dm + Sy' Dm = mY + Sy' Dm ,$$

$$Sz Dm = SZ Dm + Sz' Dm = mZ + Sz' Dm ;$$

mais d'un autre côté, par la propriété du centre de gravité, on doit avoir

$$mX = Sx Dm, \quad mY = Sy Dm, \quad mZ = Sz Dm ;$$

d'où on conclura

$$Sx'Dm = 0, \quad Sy'Dm = 0, \quad Sz'Dm = 0 .$$

Au moyen de ces valeurs, le premier membre de l'équation (5) deviendra

$$S \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2X\delta X + d^2Y\delta Y + d^2Z\delta Z + d^2X\delta x' + d^2Y\delta y' + d^2Z\delta z'}{dt^2} \\ + \frac{d^2x'\delta X + d^2y'\delta Y + d^2z'\delta Z + d^2x'\delta x' + d^2y'\delta y' + d^2z'\delta z'}{dt^2} \end{array} \right\} Dm .$$

Maintenant les valeurs de  $X, Y, Z$  étant les mêmes pour toutes les molécules  $Dm$ , ces quantités et leurs différentielles pourront se mettre hors du signe  $S$ , ce qui nous donnera

$$S \left( \frac{d^2X\delta X + d^2Y\delta Y + d^2Z\delta Z}{dt^2} \right) Dm = m \left( \frac{d^2X\delta X + d^2Y\delta Y + d^2Z\delta Z}{dt^2} \right)$$

$$S \frac{d^2X}{dt^2} \delta x' Dm = \frac{d^2X}{dt^2} S \delta x' Dm ,$$

$$S \frac{d^2Y}{dt^2} \delta y' Dm = \frac{d^2Y}{dt^2} S \delta y' Dm ,$$

$$S \frac{d^2Z}{dt^2} \delta z' Dm = \frac{d^2Z}{dt^2} S \delta z' Dm ,$$

$$S \frac{d^2x'}{dt^2} \delta X Dm = \delta X S \frac{d^2x'}{dt^2} Dm ;$$

$$S \frac{d^2y'}{dt^2} \delta Y Dm = \delta Y S \frac{d^2y'}{dt^2} Dm ,$$

$$S \frac{d^2 z'}{dt^2} \delta Z Dm = \delta Z T \frac{d^2 z'}{dt^2} Dm .$$

Au moyen de ces valeurs, le premier membre de l'équation (5) deviendra

$$m \left( \frac{d^2 X \delta X + d^2 Y \delta Y + d^2 Z \delta Z}{dt^2} \right) + S \left( \frac{d^2 x' \delta x' + d^2 y' \delta y' + d^2 z' \delta z'}{dt^2} \right) Dm$$

tandis que le second sera

$$gS(\delta Z + \delta z') Dm - g \iiint (\delta Z + \delta z') \Delta dx' dy' dz' ,$$

ou encore

$$gm\delta Z - g\delta Z \iiint \Delta dx' dy' dz' - g \iiint \delta z' \Delta dx' dy' dz' ,$$

en observant que  $S\delta z' Dm = 0$ . Cette équation (5) pourra donc se mettre sous la forme

$$\left. \begin{aligned} m \left( \frac{d^2 X \delta X + d^2 Y \delta Y + d^2 Z \delta Z}{dt^2} \right) + S \left( \frac{d^2 x' \delta x' + d^2 y' \delta y' + d^2 z' \delta z'}{dt^2} \right) Dm \\ = gm\delta Z - g\delta Z \iiint \Delta dx' dy' dz' - g \iiint \delta z' \Delta dx' dy' dz' . \end{aligned} \right\} (6)$$

Lorsque le corps flottant est entièrement libre, les valeurs de  $\delta X$ ,  $\delta Y$ ,  $\delta Z$  sont arbitraires et indépendantes de  $\delta x'$ ,  $\delta y'$ ,  $\delta z'$ ; d'où il résulte que leurs coefficients doivent être identiquement égaux dans les deux membres de cette équation, ce qui donne les équations

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 Y}{dt^2} = 0, \quad m \cdot \frac{d^2 Z}{dt^2} = gm - g \iiint \Delta dx' dy' dz' , \quad (7)$$

lesquelles serviront à déterminer le mouvement du centre de gravité du corps flottant et réduiront l'équation (6) à la suivante:

$$S\left(\frac{d^2x'\delta x'+d^2y'\delta y'+d^2z'\delta z'}{dt^2}\right)Dm=-g\iiint\delta z'\Delta dx'dy'dz'. \quad (8)$$

Présentement, les équations (2) nous donneront, comme cas particulier,

$$\delta X=\alpha+\nu Y-\mu Z,$$

$$\delta Y=\beta+\lambda Z-\nu X,$$

$$\delta Z=\gamma+\mu X-\lambda Y,$$

lesquelles retranchées des équations (2) donnent

$$\nu(y-Y)-\mu(z-Z)=\delta x-\delta X,$$

$$\lambda(z-Z)-\nu(x-X)=\delta y-\delta Y,$$

$$\mu(x-X)-\lambda(y-Y)=\delta z-\delta Z;$$

ou, ce qui revient au même,

$$\delta x'=\nu y'-\mu z',$$

$$\delta y'=\lambda z'-\nu x',$$

$$\delta z'=\mu x'-\lambda y',$$

d'après les valeurs  $x=X+x'$ ,  $y=Y+y'$ ,  $z=Z+z'$ , posées ci-dessus.

Au moyen de ces valeurs, l'équation (8) deviendra, en mettant  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  hors du signe d'intégration,

$$\left. \begin{aligned} &\lambda S\left(\frac{z'd^2y'-y'd^2z'}{dt^2}\right)Dm \\ &+\mu S\left(\frac{x'd^2z'-z'd^2x'}{dt^2}\right)Dm \\ &+\nu S\left(\frac{y'd^2x'-x'd^2y'}{dt^2}\right)Dm \end{aligned} \right\} =-g\mu\iiint\Delta x'dx'dy'dz'+g\lambda\iiint\Delta y'dx'dy'dz';$$

laquelle devant avoir lieu quelles que soient les valeurs de  $\lambda, \mu, \nu$ , donnera identiquement

$$\left. \begin{aligned} S\left(\frac{y'd^2x' - x'd^2y'}{dt^2}\right) Dm &= 0, \\ S\left(\frac{x'd^2z' - z'd^2x'}{dt^2}\right) Dm &= -g \iiint \Delta x' dx' dy' dz', \\ S\left(\frac{y'd^2z' - z'd^2y'}{dt^2}\right) Dm &= -g \iiint \Delta y' dx' dy' dz'; \end{aligned} \right\} (9)$$

équations qui serviront à déterminer le mouvement du corps flottant autour de son centre de gravité.

Pour déduire les conditions d'équilibre du corps flottant de celles qui précèdent, il suffit évidemment de supposer les vitesses

$$\frac{dX}{dt}, \quad \frac{dY}{dt}, \quad \frac{dZ}{dt}, \quad \frac{dx'}{dt}, \quad \frac{dy'}{dt}, \quad \frac{dz'}{dt}$$

constantes et nulles; ce qui réduit les équations (7) et (9) aux suivantes

$$\left. \begin{aligned} m &= \iiint \Delta dx' dy' dz', \\ 0 &= \iiint \Delta x' dx' dy' dz', \\ 0 &= \iiint \Delta y' dx' dy' dz'; \end{aligned} \right\} (10)$$

dont la première indique que, dans l'état d'équilibre, la masse du corps flottant doit être égale à celle du fluide qu'il déplace, tandis que les deux autres indiquent que les centres de gravité de ces deux masses doivent être situés dans une même verticale. Telles sont en effet les conditions nécessaires et suffisantes pour assurer l'équilibre. Nous nous occuperons plus loin de la recherche de celles qui peuvent en garantir la stabilité.

Présentement, concevons, par le centre de gravité du corps flottant, trois axes rectangulaires fixes par rapport à ce corps, mais mobiles avec lui dans l'espace. Si l'on représente par  $a, b, c$  les coordonnées d'un point quelconque relatives à ces axes, nous aurons

$$dx'dy'dz' = dadbdc,$$

puisque les deux membres de cette équation représentent également le volume  $Dm$  d'une molécule quelconque du corps flottant. Par suite, on aura, en général

$$\iiint P dx'dy'dz' = \int P dadbdc. \quad (11)$$

On parviendrait au surplus à la même conclusion par l'application des procédés connus pour la transformation des intégrales. C'est ainsi que nous transformerons les seconds membres des équations (7) et (9).

Ce qui précède aura toujours lieu, quelles que soient les directions des axes  $a, b, c$ ; de sorte que rien ne nous empêche de supposer que, si le corps flottant était en équilibre, ont eût  $x' = a, y' = b, z' = c$ . Si l'on fait, dans ce cas,

$$x' = a + x'', \quad y' = b + y'', \quad z' = c + z'';$$

les quantités  $x'', y'', z''$  seront très-petites et de même ordre que les vitesses que peuvent prendre les molécules  $Dm$ ; on pourra donc, sans erreur sensible, négliger les quantités de l'ordre de leurs carrés et produits. De plus, les quantités  $x'', y'', z''$  devront être telles que la distance de deux molécules ne soit pas altérée par leur présence et conserve la même valeur que si ces quantités étaient absolument nulles. On peut donc employer, pour les déterminer, les considérations qui nous ont conduit aux équations (2), et poser par conséquent



$$x'' = \nu b - \mu c ,$$

$$y'' = \lambda c - \nu a ,$$

$$z'' = \mu a - \lambda b ,$$

ou  $\lambda, \mu, \nu$  sont des fonctions inconnues, autres que celles des équations (2), du temps et de constantes indépendantes de  $a, b, c$ , qu'il s'agit de déterminer, et où nous supprimons les constantes  $\alpha, \beta, \gamma$ , attendu que  $x'', y'', z''$  doivent être nuls en même temps que  $a, b, c$ . Nous aurons ainsi

$$x' = a + \nu b - \mu c ,$$

$$y' = b + \lambda c - \nu a ,$$

$$z' = c + \mu a - \lambda b ,$$

et par suite, en négligeant les carrés et produits de  $\lambda, \mu, \nu$ ,

$$\frac{y'd^2x' - x'd^2y'}{dt^2} = +(a^2 + b^2) \frac{d^2\nu}{dt^2} - ca \frac{d^2\lambda}{dt^2} - bc \frac{d^2\mu}{dt^2} ,$$

$$\frac{x'd^2z' - z'd^2x'}{dt^2} = +(c^2 + a^2) \frac{d^2\mu}{dt^2} - bc \frac{d^2\nu}{dt^2} - ab \frac{d^2\lambda}{dt^2} ,$$

$$\frac{y'd^2z' - z'd^2y'}{dt^2} = -(b^2 + c^2) \frac{d^2\lambda}{dt^2} + ab \frac{d^2\mu}{dt^2} + ca \frac{d^2\nu}{dt^2} ,$$

multipliant les deux membres de ces équations par  $Dm$ , intégrant par rapport à la caractéristique  $S$  et posant, pour abrégé,

$$S(b^2 + c^2)Dm = A , \quad SbcDm = G ,$$

$$S(c^2 + a^2)Dm = B , \quad ScaDm = H ,$$

$$S(a^2 + b^2)Dm = C , \quad SabDm = K ,$$

on trouvera

$$\left. \begin{aligned} S\left(\frac{y'd^2x' - x'd^2y'}{dt^2}\right) Dm &= +C \frac{d^2y}{dt^2} - H \frac{d^2\lambda}{dt^2} - G \frac{d^2\mu}{dt^2}, \\ S\left(\frac{x'd^2z' - z'd^2x'}{dt^2}\right) Dm &= +B \frac{d^2\mu}{dt^2} - G \frac{d^2y}{dt^2} - K \frac{d^2\lambda}{dt^2}, \\ S\left(\frac{y'd^2z' - z'd^2y'}{dt^2}\right) Dm &= -A \frac{d^2\lambda}{dt^2} + K \frac{d^2\mu}{dt^2} + H \frac{d^2y}{dt^2}; \end{aligned} \right\} (12)$$

valeurs qu'il convient de mettre à la place des premiers membres des équations (9), et c'est ce que nous ferons dès que nous aurons mis en évidence les quantités  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ ,  $Z$  qui doivent entrer dans leurs seconds membres.

L'équation (4), relative à l'équilibre du fluide, ne peut avoir lieu qu'autant que la densité  $\Delta$  est fonction de  $z$  seulement; mais nous avons fait

$$z = Z + z' = c + \mu a - \lambda b + Z;$$

par suite  $\Delta$  doit être supposé fonction de cette quantité  $c + \mu a - \lambda b + Z$ , et d'autres quantités constantes, mais indépendantes de  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Supposant donc que l'origine des coordonnées primitives  $x$ ,  $y$ ,  $z$  ait été prise de telle sorte que, dans l'état d'équilibre, l'on eût  $Z = 0$ , ce qui est toujours possible, nous pourrions regarder  $Z$  comme étant de même ordre que  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ , et par conséquent négliger son carré et les autres termes de même ordre, ce qui nous permettra de faire

$$\Delta = \Delta_0 + \frac{d\Delta_0}{dc} (\mu a - \lambda b + Z),$$

en désignant par  $\Delta_0$  la valeur de  $\Delta$  qui aurait lieu dans le cas d'équilibre. Nous trouverons ainsi, en négligeant toujours les quantités de l'ordre des carrés et produits de  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ ,  $Z$ ,

$$\Delta x' = a\Delta_0 + \nu b\Delta_0 - \mu \left( c\Delta_0 - a^2 \frac{d\Delta_0}{dc} \right) - \lambda ab \frac{d\Delta_0}{dc} + a \frac{d\Delta_0}{dc} + Z,$$

$$\Delta y' = b\Delta_0 - \nu a\Delta_0 + \lambda \left( c\Delta_0 - b^2 \frac{d\Delta_0}{dc} \right) - \mu ab \frac{d\Delta_0}{dc} + b \frac{d\Delta_0}{dc} Z ;$$

Au moyen de ces valeurs, nous trouverons, en employant la transformation indiquée par l'équation (11),

$$\iint\iint \Delta dx'dy'dz' = \iint\iint \Delta dadbdc = \iint\iint \Delta_0 dadbdc + Z \iint\iint \frac{d\Delta_0}{dc} dadbdc$$

$$+ \mu \iint\iint a \frac{d\Delta_0}{dc} dadbdc - \lambda \iint\iint b \frac{d\Delta_0}{dc} dadbdc ;$$

$$\iint\iint \Delta x' dx'dy'dz' = \iint\iint \Delta x' dadbdc = \iint\iint a \Delta_0 dadbdc + Z \iint\iint a \frac{d\Delta_0}{dc} dadbdc$$

$$+ \nu \iint\iint b \Delta_0 dadbdc - \mu \iint\iint \left( c\Delta_0 - a^2 \frac{d\Delta_0}{dc} \right) dadbdc - \lambda \iint\iint ab \frac{d\Delta_0}{dc} dadbdc ;$$

$$\iint\iint \Delta y' dx'dy'dz' = \iint\iint \Delta y' dadbdc = \iint\iint b \Delta_0 dadbdc + Z \iint\iint b \frac{d\Delta_0}{dc} dadbdc$$

$$- \nu \iint\iint a \Delta_0 dadbdc + \lambda \iint\iint \left( c\Delta_0 - b^2 \frac{d\Delta_0}{dc} \right) dadbdc + \mu \iint\iint ab \frac{d\Delta_0}{dc} dadbdc .$$

Maintenant on doit observer que  $a, b, c, \Delta_0$  sont les valeurs de  $x', y', z', \Delta$  qui auraient lieu dans le cas d'équilibre, et que, conséquemment, on doit avoir identiquement (10)

$$\iint\iint \Delta_0 dadbdc = m ,$$

$$\iint\iint a \Delta_0 dadbdc = 0 ;$$

$$\iiint b \Delta_0 da db dc = 0 ;$$

ayant donc égard à ces conditions et posant, pour abrégé ;

$$\iiint \frac{d\Delta_0}{dc} da db dc = \iint (\Delta'' - \Delta') da db = L ,$$

$$\iiint a \frac{d\Delta_0}{dc} da db dc = \iint (\Delta'' - \Delta') a da db = M ,$$

$$\iiint b \frac{d\Delta_0}{dc} da db dc = \iint (\Delta'' - \Delta') b da db = N ,$$

$$\iiint a^2 \frac{d\Delta_0}{dc} da db dc = \iint (\Delta'' - \Delta') a^2 da db = P ,$$

$$\iiint b^2 \frac{d\Delta_0}{dc} da db dc = \iint (\Delta'' - \Delta') b^2 da db = Q ,$$

$$\iiint ab \frac{d\Delta_0}{dc} da db dc = \iint (\Delta'' - \Delta') ab da db = R ,$$

$$\iiint c \Delta_0 da db dc = MV ;$$

nous trouverons

$$\iiint \Delta dx' dy' dz' = m + LZ + \mu M - \lambda N ,$$

$$\iiint \Delta x' dx' dy' dz' = MZ - \mu(mV - P) - \lambda R ,$$

$$\iiint \Delta y' dx' dy' dz' = NZ + \lambda(mV - Q) + \mu R ;$$

équations dans lesquelles  $L, M, N, P, Q, R, V$  expriment des

constantes qui dépendent de la nature du fluide, de celle du corps flottant et de la figure de ce corps.

En comparant ces résultats et ceux que donnent les équations (12) avec les équations (7) et (9), nous trouverons enfin

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 X}{dt^2} &= 0, & \frac{d^2 Y}{dt^2} &= 0, \\ m \frac{d^2 Z}{dt^2} + g LZ + g M \mu - g N \lambda &= 0, \\ C \frac{d^2 \nu}{dt^2} - G \frac{d^2 \mu}{dt^2} - H \frac{d^2 \lambda}{dt^2} &= 0, \\ B \frac{d^2 \mu}{dt^2} - K \frac{d^2 \lambda}{dt^2} - G \frac{d^2 \nu}{dt^2} + g M Z - g (m V - P) \mu - g R \lambda &= 0, \\ A \frac{d^2 \lambda}{dt^2} - H \frac{d^2 \nu}{dt^2} - K \frac{d^2 \mu}{dt^2} - g N Z + g (m V - Q) \lambda - g R \mu &= 0; \end{aligned} \right\} (13)$$

et telles sont les équations finales qu'il nous reste à intégrer pour avoir résolu le problème que nous nous étions proposé.

Les deux premières donnent, par une première intégration,  $\frac{dX}{dt}$  et  $\frac{dY}{dt}$  constantes, et conséquemment nulles lorsque le corps flottant est parti du repos, ou même, lorsqu'ayant reçu une impulsion primitive, les composantes transversales sont nulles. Dans ce cas, les valeurs de  $X$  et  $Y$  sont constantes et par conséquent si, *à l'origine des petites oscillations, le centre de gravité du corps flottant se meut sur une verticale, il ne sortira pas de cette droite pendant toute leur durée.*

Pour intégrer les quatre équations restantes, nous les réduirons d'abord à trois, en éliminant  $\nu$  entre elles; les équations à intégrer seront ainsi

$$\begin{aligned}
 m \frac{d^2 Z}{dt^2} + g(LZ + M\mu - N\lambda) &= 0, \\
 (BC - G^2) \frac{d^2 \mu}{dt^2} - (CK + GH) \frac{d^2 \lambda}{dt^2} + Cg\{MZ - (mV - P)\mu - R\lambda\} &= 0, \\
 (CK + GH) \frac{d^2 \mu}{dt^2} - (AC - H^2) \frac{d^2 \lambda}{dt^2} + Cg\{NZ - (mV - Q)\lambda + R\mu\} &= 0;
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

auxquelles nous appliquerons le procédé indiqué dans la section VI de la *Mécanique analytique*. Nous poserons donc

$$\lambda = pZ, \quad \mu = qZ,$$

et chacune de ces équations prendra la forme

$$\frac{d^2 Z}{dt^2} + rZ = 0; \tag{15}$$

$p, q, r$  désignant des constantes qui doivent satisfaire aux équations de condition que l'on trouvera en mettant ces valeurs dans les équations (14); équations de condition qui seront

$$g(L + Mq - Np) - mr = 0,$$

$$Cg\{M - (mV - P)q - Rp\} = r\{(BC - G^2)q - (CK + GH)p\},$$

$$Cg\{N - (mV - Q)p + Rq\} = r\{(CK + GH)q - (AC - H^2)p\},$$

et qui serviront à déterminer ces constantes. En effet, les deux dernières, résolues par rapport à  $p$  et  $q$ , donnent

$$\begin{aligned}
 p &= -gC \frac{M[(CK + GH)r - gCR] - N[(BC - G^2)r - gC(mV - P)]}{[(CK + GH)r - gCR]^2 - [(AC - H^2)r - gC(mV - Q)][(BC - G^2)r - gC(mV - P)]}, \\
 q &= +gC \frac{N[(CK + GH)r - gCR] - M[AC - H^2]r - gC(mV - Q)}{[(CK + GH)r - gCR]^2 - [(AC - H^2)r - gC(mV - Q)][(BC - G^2)r - gC(mV - P)]}.
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

Mettant ces valeurs dans la première, nous trouverons, en chassant le dénominateur,

$$\begin{aligned} (mr-gL)\{[(CK+GH)r-gCR]^2-[(AC-H^2)r-gC(mV-Q)][(BC-G^2)r-gC(mV-P)]\} \\ +gC\{M^2[(AC-H^2)r-gC(mV-Q)]-2MN[(CK+GH)r-gCR]+N^2[(BC-G^2)r-gC(mV-P)]\}=0; \end{aligned} \quad (17)$$

équation du troisième degré qui fera connaître toutes les valeurs de  $r$ , d'où on conclura ensuite celles de  $p$  et  $q$  au moyen des formules (16); de sorte qu'en général il y aura trois systèmes de valeurs pour les constantes  $p, q, r$ , correspondant aux trois racines de l'équation (17).

Maintenant en intégrant l'équation (15) on trouve

$$Z = T \cos.t\sqrt{r} + U \sin.t\sqrt{r},$$

$T$  et  $U$  étant deux constantes; il en résulte

$$\lambda = p(T \cos.t\sqrt{r} + U \sin.t\sqrt{r}),$$

$$\mu = q(T \cos.t\sqrt{r} + U \sin.t\sqrt{r});$$

cette solution n'est que particulière, mais en même temps elle est triple, puisqu'il y a trois systèmes de valeurs de  $p, q, r$ ; donc, d'après la théorie de l'intégration des équations linéaires à coefficients constants, on aura l'intégrale complète en prenant la somme des trois intégrales particulières qui répondent à ces systèmes; de sorte qu'en désignant par  $r', r'', r'''$  les trois racines de l'équation (17), et par  $p', p'', p''', q', q'', q'''$  les valeurs de  $p$  et  $q$  qui leur correspondent respectivement, on aura

$$Z = \left\{ \begin{aligned} &T' \cos.t\sqrt{r'} + U' \sin.t\sqrt{r'} \\ &+ T'' \cos.t\sqrt{r''} + U'' \sin.t\sqrt{r''} \\ &+ T''' \cos.t\sqrt{r'''} + U''' \sin.t\sqrt{r'''} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

et ensuite

$$\lambda = \left\{ \begin{array}{l} p'(T'\text{Cos } t\sqrt{r'} + U'\text{Sin } t\sqrt{r'}) \\ + p''(T''\text{Cos } t\sqrt{r''} + U''\text{Sin } t\sqrt{r''}) \\ + p'''(T'''\text{Cos } t\sqrt{r'''} + U'''\text{Sin } t\sqrt{r'''}) \end{array} \right\}, \quad \mu = \left\{ \begin{array}{l} q'(T'\text{Cos } t\sqrt{r'} + U'\text{Sin } t\sqrt{r'}) \\ + q''(T''\text{Cos } t\sqrt{r''} + U''\text{Sin } t\sqrt{r''}) \\ + q'''(T'''\text{Cos } t\sqrt{r'''} + U'''\text{Sin } t\sqrt{r'''}) \end{array} \right\}. \quad (19)$$

en désignant par  $T'$ ,  $T''$ ,  $T'''$ ,  $U'$ ,  $U''$ ,  $U'''$  six constantes tout à fait arbitraires, dont les valeurs ne dépendent que de l'état initial du corps flottant.

Maintenant l'équation

$$C \frac{d^2 \nu}{dt^2} - G \frac{d^2 \mu}{dt^2} - H \frac{d^2 \lambda}{dt^2} = 0;$$

qui fait partie des équations (13) donne, en intégrant,

$$C\nu - G\mu - H\lambda = O + O'i, \quad (20)$$

dans laquelle  $O$  et  $O'$  sont deux nouvelles constantes qu'il faudra déterminer d'après l'état initial du fluide.

Cette équation servant à déterminer  $\nu$ , en fonction de  $\lambda$  et  $\mu$  déjà donnés par les équations (19), la solution générale du problème que nous nous étions proposé se trouve ainsi tout à fait complète, du moins dans le cas où l'équation (17) a ses trois racines inégales. Dans le cas contraire, les expressions (18) et (19) ne sont plus complètes, la précédente solution est alors en défaut, et il en serait de même si une des racines de l'équation (17) était nulle; mais il est heureusement facile d'obtenir, dans ces cas mêmes, la solution générale du problème.

Supposons, en effet, que l'on ait  $\sqrt{r''} = \sqrt{r'} + i$ ,  $i$  étant une quantité très-petite, nous aurons

$$\text{Cos } t\sqrt{r''} = \text{Cos } t\sqrt{r'} - \frac{it}{1} \text{Sin } t\sqrt{r'} + \frac{i^2 t^2}{1.2} \text{Cos } t\sqrt{r'} - \dots$$



$$\sin t\sqrt{r''} = \sin t\sqrt{r'} + \frac{it}{1} \cos t\sqrt{r'} - \frac{i^2 t^2}{1.2} \sin t\sqrt{r'} + \dots$$

et par suite

$$\begin{aligned} & T'' \cos t\sqrt{r''} + U'' \sin t\sqrt{r''} \\ &= T'' \cos t\sqrt{r'} + U'' \sin t\sqrt{r'} + t(iT'' \cos t\sqrt{r'} - iU'') \\ T'' \cos t\sqrt{r'} + U'' \sin t\sqrt{r'} &= \left\{ \begin{array}{l} T'' \cos t\sqrt{r'} + U'' \sin t\sqrt{r'} \\ + \frac{it}{1} (U'' \cos t\sqrt{r'} - T'' \sin t\sqrt{r'}) \\ + \frac{i^2 t^2}{1.2} (T'' \cos t\sqrt{r'} - U'' \sin t\sqrt{r'}) \\ + \dots \end{array} \right\} ; \end{aligned}$$

de sorte que si l'on fait, pour abrégér,

$$U'' = \frac{U_1}{i}, \quad T'' = \frac{T_1}{i}, \quad U' + U'' = U_2, \quad T' + T'' = T_2,$$

les équations (18) et (19) deviendront

$$Z = T_2 \cos t\sqrt{r'} + U_2 \sin t\sqrt{r'} + tU_1 \cos t\sqrt{r'} + tT_1 \sin t\sqrt{r'}$$

$$+ T''' \cos t\sqrt{r''} + U''' \sin t\sqrt{r''} + \frac{i^2 t^2}{1.2} \Lambda,$$

$$\lambda = p'(T_2 + tU_1) \cos t\sqrt{r'} + p'(U_2 + tT_1) \sin t\sqrt{r'}$$

$$+ p''' T''' \cos t\sqrt{r''} + p''' U''' \sin t\sqrt{r''} + p' \cdot \frac{i^2 t^2}{1.2} \Gamma,$$

$$\begin{aligned} \mu = & q'(T_2 + tU_1)\text{Cos.}t\sqrt{r'} + q'(U_2 + tT_1)\text{Sin.}t\sqrt{r'} \\ & + q'''T'''\text{Cos.}t\sqrt{r'''} + q'''U'''\text{Sin.}t\sqrt{r'''} + q'.\frac{it^2}{1.2}\Pi ; \end{aligned}$$

$\Lambda, \Gamma, \Pi$  désignant, par abréviation, tout ce que nous n'avons pas écrit. Or, lorsqu'on aura  $r' = r''$  ou  $i = 0$ , ces équations se réduiront simplement à

$$\left. \begin{aligned} Z = & (T_2 + tU_1)\text{Cos.}t\sqrt{r'} + (U_2 + tT_1)\text{Sin.}t\sqrt{r'} + T'''\text{Cos.}t\sqrt{r'''} + U'''\text{Sin.}t\sqrt{r'''} , \\ \lambda = & p'(T_2 + tU_1)\text{Cos.}t\sqrt{r'} + p'(U_2 + tT_1)\text{Sin.}t\sqrt{r'} + p'''(T'''\text{Cos.}t\sqrt{r'''} + U'''\text{Sin.}t\sqrt{r'''}), \\ \mu = & q'(T_2 + tU_1)\text{Cos.}t\sqrt{r'} + q'(U_2 + tT_1)\text{Sin.}t\sqrt{r'} + q'''(T'''\text{Cos.}t\sqrt{r'''} + U'''\text{Sin.}t\sqrt{r'''}). \end{aligned} \right\} (21)$$

Il faudrait agir à peu près de même si les trois racines étaient égales entre elles ou encore si l'une d'elles était nulle. Soit, par exemple, dans ce dernier cas,  $r''$  la racine nulle; alors le terme  $T''\text{Cos.}t\sqrt{r''}$  se réduira à  $T''$ , et le terme  $U''\text{Sin.}t\sqrt{r''}$  que l'on peut mettre sous la forme  $U''\sqrt{r''} \cdot \frac{\text{Sin.}t\sqrt{r''}}{\sqrt{r''}}$ , ou encore sous celle-ci  $U_1 \cdot \frac{\text{Sin.}t\sqrt{r''}}{\sqrt{r''}}$ , devra être remplacé par la limite de cette expression qui est égale à  $tU_1$ .

Telles sont les modifications que doivent subir les formules (18) et (19) dans les cas particuliers, pour qu'elles puissent donner la solution complète du problème.

Nous pouvons maintenant connaître quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour assurer la stabilité de l'équilibre du corps flottant.

1.° Si les trois racines de l'équation (17) sont réelles, inégales,

positives et différentes de zéro, les expressions (18) et (19) seront entièrement périodiques, et alors le corps flottant se trouvera dans une situation d'équilibre stable.

2.° Si l'une des trois racines de cette équation est nulle, les deux autres étant réelles, positives et inégales, les formules (18) et (19), outre les termes périodiques, contiendront un terme de la forme  $tU_1$ ; mais ce terme sera identiquement nul lorsque le corps flottant n'aura point reçu d'impulsion primitive; c'est le cas d'équilibre indifférent.

3.° Si l'équation (17) n'avait point de racines positives, chacun des termes des formules (18) et (19) contiendrait des exponentiels, et l'équilibre serait complètement instable.

Dans tous les autres cas, les formules (18), (19) ou (21) contiendront des termes périodiques et des termes croissant indéfiniment avec le temps. On conçoit que ces derniers peuvent alors être rendus nuls par une impulsion primitive, et c'est dans ce cas qu'on dit du corps flottant que son équilibre est de nature mixte.

Dans un autre article nous ferons quelques applications de la théorie que nous venons d'exposer, et nous considérerons en outre, sous un autre aspect, les conditions de stabilité des corps flottans.

---