
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

CHASLES

**Géométrie de situation. Recherches sur les projections stéréographiques,
et sur diverses propriétés générales des surfaces du second ordre**

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 19 (1828-1829), p. 157-175

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1828-1829__19__157_0

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1828-1829, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

GÉOMÉTRIE DE SITUATION.

*Recherches sur les projections stéréographiques,
et sur diverses propriétés générales des sur-
faces du second ordre ;*

Par M. CHASLES, ancien élève de l'École polytechnique.



A LA pag. 153 du IV.^{m^e} volume de la *Correspondance mathématique* de M. Quetelet, M. Bobillier a donné, sur les projections stéréographiques, quelques théorèmes que j'avais déjà rencontrés de mon côté et que j'annonçais même à M. le Rédacteur des *Annales*, par une lettre de Nice, en date du 15 janvier dernier, n'être que des cas particuliers de théorèmes plus généraux sur le même sujet. J'aurais même publié, dès cette époque, les résultats auxquels j'étais parvenu ; mais, pour être intelligible, sans avoir besoin d'entrer dans des détails de définitions, il était nécessaire que j'expliquasse d'abord ce que j'entendais par axes de symptôse et par centres d'homologie des coniques, et c'est là ce qui m'a déterminé à publier d'abord ce qu'on a vu sur ce sujet dans les *Annales*. Je vais présentement exposer les résultats que j'avais antérieurement obtenus sur les projections stéréographiques.

§. I.

1. Les deux parties du théorème que j'ai déjà publié sur les projections stéréographiques (*Traité des surfaces du second ordre*, Tom. XIX, n.^o 6, 1.^{er} décembre 1828. 22

par M. Hachette, 1817; *Annales de mathématiques*, tom. XVIII, pag. 307) peuvent être généralisées comme il suit :

Plusieurs surfaces du second ordre étant inscrites à une même surface de cet ordre, l'œil étant placé en un quelconque des points de cette dernière, et le plan du tableau étant parallèle à son plan tangent en ce point ;

1.^o *Tous les contours apparens des surfaces inscrites seront, en perspective, des coniques homothétiques ;*

2.^o *Les centres de ces coniques seront les projections des pôles des plans des lignes de contact de ces surfaces avec celle à laquelle elles sont inscrites, pris par rapport à cette surface, ou respectivement par rapport à chacune des autres.*

Soit en effet $s, s', s'' \dots$ une suite de surfaces du second ordre inscrites à une surface S du même ordre ; le cône C qui détermine le contour apparent de s et la surface S sont deux surfaces du second ordre circonscrites à cette surface s , et qui, par conséquent, se coupent suivant deux courbes planes, dont les plans passent tous deux par la droite d'intersection des plans des courbes suivant lesquelles elles touchent cette surface s (*Correspondance sur l'Ecole polytechnique*, tom. III, pag. 339). Mais le cône C ayant son sommet sur la surface S , une de ses intersections avec cette surface se réduit à un point, et le plan de cette intersection n'est autre que le plan tangent à S par son sommet ; ce cône C coupera donc la surface S suivant une deuxième courbe plane, dont le plan, ainsi que le plan tangent, passera par la droite suivant laquelle se coupent les plans des deux lignes de contact de s avec les surfaces S et C .

Le cône C coupant la surface S suivant une courbe plane, sa section par le plan du tableau sera, suivant le théorème cité (*Annales*, tom. XVIII, pag. 307), une conique homothétique à la section de la surface S par ce même plan ; mais cette section sera évidemment la perspective du contour apparent de la surface s ; donc la perspective du contour apparent de la surface s , et par

suïte les perspectives des contours apparens des surfaces s, s', s'', \dots seront toutes homothétiques avec la section de la surface S par le plan du tableau ; elles seront donc aussi homothétiques entre elles ; la première partie du théorème se trouve donc ainsi démontrée.

Le plan de l'intersection du cône C avec la surface S , le plan de la ligne de contact des deux surfaces S et s et le plan tangent à S conduit par l'œil, se coupent tous trois, comme on vient de le voir, suivant la même droite, d'où il suit que les pôles des deux premiers, relatifs à la surface S , seront sur une droite passant par l'œil ; or, le centre de la section du cône C par le plan du tableau est (deuxième partie du théorème cité) sur la droite qui va de l'œil au pôle du premier de ces plans ; nous pouvons donc dire également qu'il est sur la droite qui va de l'œil au pôle du deuxième plan ; c'est-à-dire, au pôle du plan de la ligne de contact des deux surfaces S et s , lequel pôle est évidemment le même, soit qu'on le prenne par rapport à la surface S ou qu'on le prenne par rapport à la surface s . La seconde partie du théorème se trouve donc également démontrée.

Remarquons que la surface s pourrait n'avoir qu'un contact imaginaire avec la surface S ; mais le théorème et sa démonstration auraient toujours lieu, parce que le plan de la ligne de contact serait toujours réel.

Cette ligne de contact pourrait se réduire à un point, auquel cas les deux surfaces auraient un contact du troisième ordre en ce point.

Les surfaces s, s', s'', \dots peuvent se réduire à des courbes planes tracées sur la surface S ; alors on retombe sur le théorème ordinaire des projections stéréographiques.

Si la surface s se réduit à une ligne droite, le milieu de sa perspective se trouvera sur la perspective de sa polaire réciproque, par rapport à la surface S . On peut énoncer ainsi la proposition à laquelle donne naissance la considération de ce cas particulier :

2. *Deux droites, polaires réciproques l'une de l'autre, par rap-*

port à une surface du second ordre, ont pour perspectives, par rapport à un œil situé en un point de cette surface, et à un tableau parallèle au plan tangent en ce point, des parallèles à deux diamètres conjugués de la section de la surface du second ordre par le plan du tableau.

Ces deux droites se coupent à leurs milieux.

Si la surface S est un ellipsoïde ou un hyperboloïde à deux nappes, il n'y a qu'une de ces droites qui ait ses deux extrémités réelles, et les extrémités de l'autre sont imaginaires. Mais si la surface S est un hyperboloïde à une nappe, les deux droites ont, l'une et l'autre, leurs extrémités réelles; de sorte qu'elles sont alors les deux diagonales d'un parallélogramme.

En effet, deux droites D, D' , polaires réciproques l'une de l'autre, par rapport à une telle surface, rencontrent son plan tangent, conduit par l'œil, en deux points tels que, si l'on considère ces points comme les sommets de deux cônes circonscrits à cette surface, les plans des lignes de contact passeront par ces deux droites D' et D , respectivement, et couperont conséquemment le plan tangent suivant deux droites qui passeront respectivement par les sommets des deux cônes, et seront deux tangentes conjuguées; ces deux droites seront donc parallèles à deux diamètres conjugués de la section faite dans l'hyperboloïde par un plan parallèle au plan tangent. Or, les plans qui détermineront les perspectives des deux droites D, D' passeront par ces deux tangentes conjuguées, et couperont le plan du tableau suivant deux droites qui leur seront respectivement parallèles; ces deux droites, perspectives de D et D' , seront donc parallèles à deux diamètres conjugués de la section de l'hyperboloïde par le plan du tableau.

Il résulte d'ailleurs de la deuxième partie du théorème général (1), et en considérant la corde comme surface inscrite, que le point d'intersection de ces deux droites en sera le milieu commun.

Le théorème suivant est compris dans la démonstration précédente :

3. *Le plan tangent mené à une surface du second ordre par l'une des extrémités de l'un des deux diamètres, lieux des centres des sections circulaires de cette surface, est percé par deux droites polaires réciproques l'une de l'autre en deux points, tels que les droites menées du point de contact du plan tangent à ces deux-là sont perpendiculaires l'une à l'autre.*

On peut généraliser davantage les théorèmes ci-dessus en faisant la perspective sur un plan quelconque qui ne soit pas parallèle au plan tangent conduit par l'œil.

On a alors le théorème suivant :

4. *Si plusieurs surfaces du second ordre sont inscrites à une même surface de cet ordre, et qu'on en fasse la perspective sur un plan quelconque pour un œil situé en un quelconque des points de la surface enveloppante ;*

1.^o *Les perspectives des contours apparens des surfaces enveloppées seront des coniques qui auront toutes un même axe de symptose, intersection du plan du tableau avec le plan tangent conduit par l'œil à la surface enveloppante.*

2.^o *Les pôles de cet axe de symptose, par rapport à ces coniques, seront les perspectives des pôles relatifs à la surface enveloppante, des plans de ses lignes de contact respectives avec les surfaces enveloppées.*

3.^o *Deux droites polaires réciproques l'une de l'autre, par rapport à la surface enveloppante, auront pour perspectives deux autres droites qui couperont la commune section du plan du tableau avec le plan tangent par l'œil, en deux points tels que le plan polaire de chacun, relatif à la surface enveloppante, passera par l'autre; et chacune de ces droites sera divisée harmoniquement aux deux points où elle rencontrera l'autre et l'intersection des deux plans.*

On pourrait démontrer directement ce théorème, mais on le dé-

duit du précédent par la seule observation que deux coniques homothétiques, situées dans un même plan, ont pour perspective sur un plan quelconque deux coniques dont un des axes de symptose est l'intersection du plan du tableau avec le plan conduit par l'œil, parallèlement à celui des deux coniques homothétiques; et en observant, en outre, que quatre points en ligne droite, et en proportion harmonique, ont pour perspective (CARNOT; *Théorie des transversales*, pag. 80) quatre points également en proportion harmonique. Ces considérations suffisent pour conclure le théorème (4) du théorème (1).

Si les surfaces inscrites se réduisent à des courbes planes, on obtiendra ce théorème qu'il nous sera utile d'énoncer :

5. *Pour un tableau plan quelconque et pour une situation quelconque de l'œil, sur une surface du second ordre;*

1.^o *Les perspectives des sections planes de cette surface ont un axe de symptose commun, intersection du plan du tableau avec le plan tangent conduit par l'œil.*

2.^o *Les pôles de cet axe, par rapport à ces coniques, sont les perspectives des sommets des cônes circonscrits à la surface du second ordre, suivant les sections planes respectives.*

Nous pouvons dire, d'après ce qui précède, que, réciproquement,

6. *Si plusieurs coniques ont un axe de symptose commun, elles pourront être considérées comme la perspective d'autant de sections planes, faites dans une surface du second ordre.*

Ce principe conduit immédiatement aux propriétés générales de deux coniques quelconques, et à celles de trois coniques qui ont un même axe de symptose, avec autant de facilité et de promptitude que le théorème analogue sur les coniques homothétiques nous a conduit aux propriétés de ces courbes (*Annales*, tom. XVIII, pag. 305). Ce moyen ne nécessite pas l'emploi des transformations polaires, mais si nous avons préféré à ce moyen, et à plusieurs autres que nous aurions pu également employer, la marche que nous avons suivie (*Annales*, tom. XVIII, pag. 277) pour la recher-

che des propriétés générales des systèmes de coniques ; c'est que certaines questions relatives à ces courbes présenteraient des difficultés si on voulait déduire leur solution de la solution des questions analogues relatives aux sections planes d'une surface du second ordre, tandis que d'autres procédés appliqués aux coniques homothétiques, l'analyse algébrique, par exemple, leurs conviennent parfaitement. On pourra donc traiter ces questions, relativement aux coniques homothétiques, par les moyens les plus faciles, et on les appliquera ensuite, par les transformations polaires, aux coniques quelconques.

Si, dans le théorème (5), on suppose que les courbes tracées sur la surface du second ordre sont dans des plans passant par une même droite, la perspective de cette droite sera un axe de symptose commun aux coniques perspectives de ces courbes. Donc,

8. *Les perspectives, pour un tableau quelconque et un œil situé d'une manière quelconque sur une surface du second ordre, de tant de sections planes qu'on voudra faites dans cette surface, par des plans se coupant suivant une même droite, sont des coniques qui ont deux axes de symptose communs.*

Ainsi dans la construction des cartes de géographie, si la projection se faisait sur un plan non parallèle au plan tangent à la sphère, conduit par l'œil, les projections des cercles de la sphère ne seraient plus des cercles, mais des coniques ayant toutes un même axe de symptose, et les projections des méridiens ou des parallèles seraient des coniques ayant leurs centres sur une même conique, et jouissant de toutes les autres propriétés d'une série de coniques circonscrites à un même quadrilatère.

Il est facile de voir que, quand deux surfaces du second ordre se coupent suivant deux courbes planes, on peut leur inscrire une infinité d'autres surfaces du même ordre; le théorème (4) donne donc celui-ci, plus général que le précédent :

9. *Si tant de surfaces du second ordre qu'on voudra, sont inscrites à la fois à deux autres surfaces de cet ordre, et que l'on*

considère un quelconque des points de l'intersection de ces deux-ci comme le sommet commun d'une série de cônes circonscrits aux premières, les sections de ces cônes, par un plan transversal quelconque, seront des coniques ayant pour axes de symptose communs les droites suivant lesquelles ce plan sera coupé par les plans tangens aux deux surfaces enveloppantes, conduits par le sommet commun de tous ces cônes.

§. II.

Par une transformation polaire, l'un ou l'autre des théorèmes (1) et (4) donne le suivant :

10. *Plusieurs surfaces du second ordre étant circonscrites à une même surface de cet ordre, et un plan tangent étant mené à cette dernière, par un quelconque de ses points ;*

1.° *Ce point sera un centre d'homologie de toutes les coniques, prises deux à deux, suivant lesquelles les surfaces enveloppantes seront coupées par le plan tangent ;*

2.° *Les polaires respectives de ce point, par rapport à ces coniques, seront les droites suivant lesquelles ce même plan sera coupé par les plans des lignes de contact de la surface enveloppée avec ses enveloppantes.*

Il est bien entendu, d'après ce que nous avons dit (1), que les contacts des enveloppantes avec l'enveloppée peuvent être imaginaires, et que ces contacts, supposés réels, peuvent n'avoir lieu qu'en un point pour chaque surface circonscrite qui a alors un contact du troisième ordre, en ce point, avec la surface enveloppée.

En supposant que les surfaces circonscrites sont des cônes, on obtiendra le théorème suivant :

11. *Plusieurs cônes étant circonscrits à une même surface du second ordre, et un plan tangent étant mené à cette surface par un quelconque de ses points ;*

1.^o *Ce point sera un centre d'homologie des intersections, prises deux à deux, des cônes avec le plan tangent ;*

2.^o *Les polaires respectives de ce point, par rapport à ces mêmes intersections, seront les intersections de ce même plan avec les plans des lignes de contact.*

Il est clair que, réciproquement,

12. *Si plusieurs coniques, prises deux à deux, ont un centre commun d'homologie, on pourra les considérer comme les sections d'autant de cônes circonscrits à une même surface du second ordre, tangente au plan des coniques à leur centre commun d'homologie.*

Considérons deux cônes circonscrits à une même surface du second ordre, le plan tangent à cette surface, en l'un quelconque de ses points, les coupera suivant deux coniques qui auront le point de contact pour un de leurs centres d'homologie, d'après ce qui précède. Il est aisé de voir qu'un deuxième centre d'homologie de ces deux coniques sera celui où le plan tangent sera percé par la droite qui joindra les sommets des deux cônes ; car, par cette droite, on peut mener deux plans tangens communs à ces deux cônes ; d'où il suit que, par le point où elle perce le plan des deux coniques, on pourra leur mener des tangentes communes ; ce qui prouve que ce point est un centre d'homologie.

On conclut de là ce théorème assez remarquable :

13. *Si l'on circonscrit à une même surface du second ordre plusieurs cônes dont les sommets soient situés sur une même droite quelconque, tout plan tangent à cette surface coupera ces cônes suivant des coniques qui auront deux centres d'homologie communs, et qui jouiront conséquemment de toutes les propriétés d'une série de coniques inscrites à un même quadrilatère.*

14. Ce qui précède offre un nouveau moyen de démontrer les propriétés générales de deux coniques quelconques, et celles de trois coniques qui ont un même centre d'homologie. Par exemple, on voit, sur-le-champ, que ces trois coniques, prises deux à deux,

ont leurs trois centres d'homologie conjugués à celui-là, situés en ligne droite.

Car, si l'on considère ces coniques comme les sections faites dans trois cônes circonscrits à une surface du second ordre, par un plan tangent à cette surface, leur centre d'homologie commun sera le point de contact de ce plan tangent, et leurs trois centres d'homologie conjugués à celui-là seront les points où ce même plan sera percé par les droites qui joindront deux à deux les sommets des trois cônes; or, ces droites sont toutes trois dans le plan que déterminent les sommets des trois cônes; donc ces trois centres seront dans l'intersection de ce dernier plan avec le plan tangent, c'est-à-dire qu'ils appartiendront à une même droite.

Cette méthode n'exige pas l'application de la théorie des polaires réciproques; mais alors il faut démontrer directement les précédents théorèmes, ce qui n'est pas difficile, et non pas les déduire, comme nous l'avons fait, de ceux que nous avons établis sur la projection stéréographique.

15. *Si tant de surfaces du second ordre qu'on voudra sont circonscrites à la fois à deux surfaces données de cet ordre, tout plan tangent, commun à ces deux dernières, coupera les surfaces enveloppantes suivant des coniques qui auront pour centres d'homologie communs les points de contact de ce plan avec les deux surfaces enveloppées.*

Toutes ces coniques auront conséquemment leurs centres en ligne droite, et jouiront de toutes les propriétés connues d'une série de coniques inscrites à un même quadrilatère.

Tout cela résulte du théorème (10).

Dans le cas particulier où le plan tangent à la surface enveloppée du théorème (10) la touche en l'une des quatre extrémités des deux diamètres, lieux des centres de ses sections circulaires, un cône circonscrit, dont le sommet se trouvera situé sur la direction de ce diamètre, sera coupé par le plan tangent suivant un cercle dont le centre sera le point de contact du plan tangent; ce point sera, d'après le théorème (10), le centre d'homologie de ce

cercle et de la section faite par ce même plan tangent dans toute autre surface quelconque du second ordre circonscrite à la surface proposée ; ce centre sera donc le foyer de cette section (PONCELET, *Propriétés projectives*, pag. 261) ; mais la polaire du foyer d'une conique est la directrice relative à ce foyer ; donc ,

16. *Quand plusieurs surfaces du second ordre sont circonscrites à une surface unique de cet ordre, le plan tangent à cette dernière, à l'une des extrémités d'un des diamètres, lieux des centres des sections circulaires, coupe toutes les autres suivant des coniques qui ont pour foyer commun le point de contact du plan tangent, et dont les directrices respectives sont les droites suivant lesquelles ce plan tangent est coupé par les plans des lignes de contact de la surface enveloppée avec les surfaces enveloppantes.*

En remarquant que les sections planes parallèles faites dans un cône ont leurs foyers sur deux droites passant par son sommet, on pourra, du théorème qui vient d'être démontré, conclure le suivant :

17. *Si, du sommet d'un cône circonscrit à une surface du second ordre, on mène des droites aux deux extrémités de l'un des diamètres de cette surface, lieux des centres de ses sections circulaires ; tout plan parallèle au plan diamétral conjugué de ce diamètre coupera le cône suivant une conique dont les foyers seront les points où ce même plan sera percé par ces deux droites.*

Il résulte de là que :

18. *Si plusieurs cônes ont leurs sommets sur une droite passant par une des extrémités de l'un des diamètres, lieux des centres des sections circulaires d'une surface du second ordre ; le plan tangent à cette surface, à l'autre extrémité du même diamètre, coupera tous ces cônes suivant des coniques ayant leurs deux foyers communs, et qui, par conséquent, formeront deux séries d'ellipses et d'hyperboles telles que les courbes de chaque série couperont orthogonalement les courbes de l'autre série.*

Le théorème (17) fait voir que ,

19. *Si, du sommet d'un cône circonscrit à une sphère, on mène des droites aux deux extrémités de l'un quelconque de ses diamètres, tout plan perpendiculaire à ce diamètre coupera le cône suivant une conique dont les foyers seront les points où le plan coupant sera percé par ces deux droites.*

Le théorème (16) comprend celui-ci :

20. *Si, à une même surface de révolution du second ordre, on inscrit deux sphères, tout plan tangent commun à ces deux sphères coupera la surface enveloppante suivant une conique dont les foyers seront en ses points de contact avec les deux sphères.*

Ce dernier théorème avait déjà été démontré pour le cône, par M. Quetelet, et pour l'hyperboloïde à une nappe, par M. Dandelin. (Voy. *Annales*, tom. XV, pag. 387).

§. III.

21. La propriété la plus importante des cônes circonscrits à une même surface du second ordre est, sans contredit, celle que MONGE a donnée dans sa *Géométrie descriptive*, car elle est la base de la théorie des pôles, dont on n'a cessé de s'occuper depuis lors, et qui a déjà rendu les plus grands services à la géométrie.

Les cônes circonscrits à une surface du second ordre, et qui ont leurs sommets en ligne droite, jouissent de quelques autres propriétés dont il ne paraît pas qu'on ait songé encore à s'occuper; elles sont, il est vrai, d'une bien moindre importance que celle que nous venons de rappeler, mais elles ne sont pas néanmoins dépourvues d'un certain intérêt.

Nous avons déjà démontré (11) le théorème suivant que nous rappelons, parce qu'il fait partie des propriétés générales des cônes circonscrits à une même surface du second ordre.

22. *Si plusieurs cônes, circonscrits à une même surface du second ordre, ont leurs sommets sur une même droite, tout plan tangent à cette surface coupera les cônes circonscrits suivant des*

coniques qui auront deux centres d'homologie communs ; savoir : le point de contact de ce plan tangent et le point où il sera percé par la droite sur laquelle les sommets de ces cônes seront situés.

Si la droite, lieu des sommets des cônes, perce la surface du second ordre en deux points, les plans tangens en ces deux points couperont le plan des coniques suivant des droites qui feront partie de cette série de courbes.

23. *Si plusieurs cônes, circonscrits à une même surface du second ordre, ont leurs sommets sur une même droite, les plans polaires d'un point quelconque de l'espace, relatifs à tous ces cônes, envelopperont un nouveau cône dont le sommet sera le pôle, pris par rapport à la surface donnée du second ordre, du plan conduit par le point donné et par la droite, lieu des sommets des cônes.*

Soient en effet p le point donné, s le sommet de l'un des cônes circonscrits à la surface donnée du second ordre et P le plan de la ligne de contact de cette surface avec le cône dont le point s est le sommet.

La droite ps perce le plan P en un point dont les plans polaires, par rapport à la surface du second ordre et au cône circonscrit, passent par la polaire de ce point, prise par rapport à la ligne de contact, située dans le plan P . Or, cette droite est la polaire de la droite ps , par rapport à la surface du second ordre ; elle passe donc par le pôle de tout plan conduit par la droite ps ; d'où il suit qu'elle passe par le pôle du plan conduit par le point p et par la droite lieu des sommets des cônes. Or, le plan polaire, par rapport au cône, est le même que le plan polaire de tout autre point de la droite ps ; donc, le plan polaire du point p passe par un point fixe qui est le pôle du plan conduit par le point p et par la droite, lieu des sommets des cônes ; d'où il suit que ce plan roule sur un cône.

Par le point p menons un plan tangent à la surface du second ordre ; ce plan coupera le cône suivant une conique et le plan polaire suivant une droite qui sera la polaire du point p , par rap-

port à cette conique; or, ce plan tangent coupe tous les cônes suivant des coniques qui ont deux centres d'homologie communs, toutes les polaires du point p , relatives à ces coniques enveloppent donc une autre conique (*Annales*, tom. XVIII, pag. 296); d'où il suit que la surface conique enveloppée par les plans polaires de ce point, relatifs aux cônes circonscrits, est une surface conique de second ordre, comme nous l'avions annoncé.

24. *Si des cônes circonscrits à une surface du second ordre ont leurs sommets sur une même droite, les polaires d'une transversale quelconque, relatives à ces cônes, forment un hyperboloïde qui passe par la polaire de cette transversale prise par rapport à la surface du second ordre.*

En effet, la polaire d'une droite, par rapport à un cône, n'est autre chose que la droite diamétrale conjuguée au plan mené par cette droite et par le sommet du cône, et passe aussi par ce sommet. Mais si, par la droite donnée, on conduit un plan tangent à la surface du second ordre, il coupera tous les cônes suivant des coniques qui auront deux centres d'homologie communs (22); les pôles de cette droite, par rapport à ces coniques, seront donc sur une même droite D (*Annales*, tom. XVIII, pag. 296, 3.^o); or, ces pôles appartiennent évidemment aux polaires de la droite, par rapport aux cônes respectivement; d'où il suit que ces plans s'appuyent sur la droite D .

Si, par la droite donnée, on conduit un deuxième plan tangent à la surface du second ordre, on obtiendra une deuxième droite sur laquelle s'appuyent également les polaires; or, elles passent aussi par la droite, lieu des sommets des cônes; elles s'appuyent donc sur trois droites fixes, ce qui prouve qu'elles appartiennent à un hyperboloïde à une nappe.

Il est facile de voir que les polaires d'une droite, par rapport à deux surfaces du second ordre circonscrites l'une à l'autre, se rencontrent en un point du plan de la ligne de contact de ces surfaces; donc les polaires de la transversale, par rapport aux cônes,

rencontrent toutes sa polaire par rapport à la surface du second ordre, laquelle se trouve ainsi sur l'hyperboloïde.

Le théorème est donc complètement démontré.

Si, par la transversale, on mène un plan quelconque, il coupera les cônes suivant des coniques; et il est clair que les pôles de la transversale, par rapport à ces coniques, seront sur l'hyperboloïde, lieu des polaires de la droite; *ils seront par conséquent sur une conique; et, si le plan mené par la transversale tourne sur cette droite, la conique engendrera l'hyperboloïde.*

25. *Si des cônes circonscrits à une surface du second ordre ont leurs sommets sur une même droite, les plans diamétraux conjugués à une même droite, relatifs à tous ces cônes, envelopperont un nouveau cône.*

En effet, le plan diamétral conjugué à une droite, par rapport à un cône, est le plan diamétral conjugué à la parallèle à cette droite conduite par le sommet du cône; le théorème énoncé résulte donc du théorème (23) dans lequel on supposerait que le point donné passe à l'infini.

26. *Si des cônes circonscrits à une surface du second ordre ont leurs sommets sur une même droite, 1.° tous les diamètres conjugués à un même plan, relatifs à ces cônes, appartiendront à un hyperboloïde passant par la droite diamétrale de la surface du second ordre, conjuguée à ce plan; 2.° les centres des coniques suivant lesquelles ce plan transversal couperait les cônes circonscrits seront sur une autre conique.*

Pour obtenir la démonstration de ce théorème, il suffit de supposer, dans le théorème (24), que la transversale passe à l'infini.

Si le plan transversal est parallèle à la droite qui contient les sommets des cônes circonscrits, l'hyperboloïde se réduira à un plan; car, dans ce cas, les deux plans tangens à la surface du second ordre, parallèles à celui-là, couperont les cônes suivant des coniques dont les centres seront sur deux droites parallèles au lieu des sommets des cônes.

§. IV.

27. Des courbes planes, tracées sur une surface du second ordre, correspondent, au moyen de la doctrine des polaires réciproques, à des cônes circonscrits à une autre surface du même ordre; d'où il suit que leurs propriétés générales correspondent aux propriétés générales de ces cônes. Ainsi les théorèmes du précédent paragraphe donnent naissance à de nouveaux théorèmes qu'il doit nous suffire d'énoncer. Au surplus, leur démonstration directe ne présenterait aucune difficulté, on la déduirait des principes exposés dans le §. I, comme nous avons déduit celle des théorèmes relatifs aux cônes circonscrits des principes exposés dans le §. II.

Rappelons d'abord le théorème (8) qui peut être énoncé ainsi :

28. *Si des courbes planes, tracées sur une surface du second ordre, sont dans des plans passant par une même droite, les cônes qui auront ces courbes pour bases et pour sommet commun un quelconque des points de la surface du second ordre, seront coupés par tout plan transversal suivant des coniques qui, prises deux à deux, auront mêmes axes de symptose.*

Ces coniques jouiront, conséquemment, de toutes les propriétés d'une série de coniques circonscrites à un même quadrilatère.

Si, par la droite suivant laquelle se coupent les plans des courbes tracées sur la surface du second ordre, on peut conduire deux plans tangens à cette surface; aux deux points de contact, considérés comme deux courbes infiniment petites, correspondront, sur le plan transversal, deux points qui feront partie de la série de coniques; ou bien, si chaque plan tangent touche la surface du second ordre suivant deux droites, à ces droites correspondront, sur le plan transversal, deux systèmes de droites faisant partie de la série de coniques.

Par les polaires réciproques, le théorème (23) donne le suivant :

29. *Si les plans de plusieurs courbes planes, tracées sur une sur-*

face du second ordre, se coupent suivant une même droite, tout plan transversal coupera ceux de ces courbes suivant des droites dont les pôles respectifs, relatifs à ces mêmes courbes, seront sur une conique, contenue dans le plan polaire du point où le plan transversal coupera la droite, section commune des plans de ces courbes.

Au théorème (24) correspond pareillement celui-ci :

30. *Si les plans de plusieurs coniques, tracées sur une surface du second ordre, se coupent suivant une même droite; toute droite transversale percera ces plans en des points dont les polaires respectives, relatives à ces coniques, appartiendront à un hyperboloïde qui contiendra la polaire de la transversale, prise par rapport à la surface du second ordre.*

Si, par les coniques, on fait passer des cônes ayant pour sommet commun un quelconque des points de la transversale, il est clair que les plans diamétraux respectifs de ces cônes, conjugués à la transversale, passeront par les polaires des points où cette droite percera les plans des coniques; ces polaires étant prises respectivement par rapport à ces mêmes coniques. Ces plans seront donc tangens à l'hyperboloïde, lieu de ces polaires, et envelopperont consécutivement un cône; de sorte qu'on a ce théorème :

31. *Si les plans de tant de coniques qu'on voudra, tracées sur une surface du second ordre, se coupent tous suivant une même droite, et si des cônes, ayant leur sommet commun en un quelconque des points de l'espace, ont ces coniques pour bases, les plans polaires respectifs d'un autre point quelconque de l'espace, relatifs à ces cônes, envelopperont un nouveau cône.*

Et, si le sommet commun de tous ces cônes se meut sur une droite passant par ce point, le cône, enveloppe des plans polaires de ce même point, enveloppera lui-même un hyperboloïde.

Si, dans le théorème (29), on suppose le plan transversal situé à l'infini, on aura ce théorème :

32. *Si les plans de tant de coniques qu'on voudra, tracées sur*

une surface du second ordre, se coupent tous suivant une même droite, les centres de ces coniques seront tous sur une nouvelle conique, contenue dans le plan diamétral de la surface du second ordre conjuguée à cette droite.

Le théorème (30), quand la droite passe à l'infini, devient celui-ci :

33. *Si les plans de tant de coniques qu'on voudra, tracés sur une surface du second ordre, se coupent tous suivant une même droite, les diamètres de ces coniques conjugués aux droites suivant lesquelles leurs plans seront coupés par un plan transversal quelconque, appartiendront à un hyperboloïde qui passera par le diamètre de la surface du second ordre conjugué à ce plan.*

34. Les théorèmes des §. III et IV donnent, comme cas particuliers, plusieurs propriétés des cordes d'une conique issues d'un même point, ainsi que des angles circonscrits ayant leurs sommets sur une même droite. Comme nous nous proposons de les reproduire dans une autre occasion, nous nous dispenserons de les énoncer ici.

On peut faire d'autres applications des précédens théorèmes : par exemple, on s'en sert utilement pour démontrer les deux parties de celui-ci :

Par des coniques tracées sur une surface du second ordre, de telle sorte que les plans de ces coniques se coupent tous suivant une même droite, soient décrites d'autres surfaces du second ordre, toutes inscrites ou circonscrites à celle-là ;

1.^o *Une infinité de ces surfaces pourront toucher un même plan donné, et le lieu géométrique de leurs points de contact avec lui sera une conique ;*

2.^o *Une infinité de ces surfaces pourront passer par un point donné, et leurs plans tangens en ce point envelopperont un cône.*

Si, dans le premier cas, le plan donné passe par la commune section des plans des coniques, la conique, lieu des points de contact, se réduira à un point.

Si, dans le second cas, le point donné est sur la droite, lieu des pôles des plans des coniques, toutes les surfaces du second ordre circonscrites auront un même plan tangent en ce point.

La surface du second ordre à laquelle sont inscrites les autres surfaces pourrait être un cône.

Les théorèmes des deux §. III et IV ne sont eux-mêmes que des cas particuliers des propriétés générales des systèmes de surfaces du second ordre inscrites ou circonscrites à la fois à deux autres surfaces du même ordre; propriétés dont la recherche fera le sujet d'un autre article.
