

---

---

# ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

---

---

GERGONNE

**Analyse algébrique. Note sur un symptôme d'existence de racines  
imaginaires, dans les équations algébriques**

*Annales de Mathématiques pures et appliquées*, tome 19 (1828-1829), p. 124-126

[http://www.numdam.org/item?id=AMPA\\_1828-1829\\_\\_19\\_\\_124\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1828-1829__19__124_0)

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1828-1829, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

---

## ANALYSE ALGÈBRIQUE.

*Note sur un symptôme d'existence de racines imaginaires, dans les équations algébriques; .*

Par M. GERGONNE.

~~~~~

Il a été démontré, dans le XVI.<sup>e</sup> volume du présent recueil ( pag. 385 ), qu'autant on rencontre, dans une équation algébrique, de séries de trois termes consécutifs formant une proportion continue par quotiens, autant l'équation a de couples de racines imaginaires au moins.

Dans une lettre qu'il nous a fait l'honneur de nous adresser, il y a déjà un peu de temps, M. Dupré, élève distingué de l'Ecole normale du collège royal de Louis-le-Grand, et qui, comme on l'a vu ( tom. XVIII, pag. 68 ), s'est aussi occupé des symptômes d'existence des racines imaginaires dans les équations, objecte contre cette proposition qu'il s'ensuivrait qu'une équation complète du troisième degré, dont les quatre termes formeraient une progression par quotiens, devrait avoir quatre racines imaginaires.

Mais il résulte clairement de la démonstration même, donnée à l'endroit cité, que, dans le cas de plusieurs séries de trois termes consécutifs formant une proportion continue par quotiens, la proposition ne saurait être vraie qu'autant que les plus voisines de

ces séries de trois termes consécutifs n'auraient au plus qu'un terme commun, ce qui ne saurait avoir lieu dans le troisième degré. L'équation du degré le moins élevé, dans laquelle on pourra rencontrer deux séries disjointes de trois pareils termes, sera donc une équation du quatrième degré. Elle sera de la forme

$$ax^4 + ax^3 + x^2 + bx + b' = 0,$$

qui revient à

$$\left\{ ax^2 + \frac{1}{2}(1 + \sqrt{8ab-3})x + b \right\} \left\{ ax^2 + \frac{1}{2}(1 - \sqrt{8ab-3})x + b \right\} = 0;$$

et qui a, en effet, ses quatre racines imaginaires.

M. Dupré, qui s'occupe aussi de recherches d'un ordre plus élevé, observe, dans la même lettre, qu'au lieu de réduire les fonctions elliptiques, comme on le fait ordinairement aux trois formes

$$\int \frac{dx}{R}, \quad \int \frac{dx}{(x^2+a)R}, \quad \int \frac{x^2 dx}{R};$$

où  $R = \sqrt{A+Bx^2+Cx^4}$ , on pourrait les réduire seulement aux deux dernières formes, attendu que la première n'est qu'un cas particulier de la seconde. On a, en effet, comme le prouve la différentiation,

$$\int \frac{dx}{R} = 2\sqrt{\frac{A}{C}} \int \frac{dx}{\left(x^2 + \sqrt{\frac{A}{C}}\right)R}$$

$$- \frac{2}{\sqrt{2\sqrt{AC}-B}} \cdot \text{Arc.} \left( \text{Sin.} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{2\sqrt{\frac{A}{C}} - \frac{B}{C}} \cdot \frac{x}{x^2 + \sqrt{\frac{A}{C}}}} \right),$$

qui donnera  $\int \frac{dx}{R}$ , lorsqu'on saura intégrer  $\frac{dx}{\left(x^2 + \sqrt{\frac{A}{C}}\right)R}$ ,

qui rentre dans  $\frac{dx}{(x^2+a)R}$ .

---