
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

GERGONNE

Géométrie de situation. Double théorème de géométrie à trois dimensions

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 19 (1828-1829), p. 114-119

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1828-1829__19__114_1

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1828-1829, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

GÉOMÉTRIE DE SITUATION.

Double théorème de géométrie à trois dimensions ;

Par M. GERGONNE.



ON a vu, à la page 149 du précédent volume, que nous étions redevables à la sévère critique de M. Poncelet de la double classification des lignes et surfaces courbes que nous avons adoptée depuis lors; double classification tout à fait indispensable (*) à raison de sa liaison intime avec le principe de *dualité* (**); et qu'il serait très-peu philosophique de vouloir repousser sous le prétexte

(*) Nous disons *indispensable*, dans l'hypothèse du moins où le degré de la polaire réciproque d'une courbe serait plus élevé que le sien; ce qui peut être vrai, mais que des juges très-compétens, du choix de M. Poncelet lui-même, ne regardent pas comme suffisamment démontré.

(**) Nous avons long-temps hésité à employer cette expression, tant à cause du mauvais accueil que reçoivent d'ordinaire du public les locutions nouvelles, que parce que le mot *dualité* est un des termes d'une philosophie dont nous faisons assez peu de cas. M. Poncelet, en l'adoptant, en adoptant même le mot *triplité*, nous a beaucoup enhardis à en faire usage.

qu'elle est inusitée en géométrie, puisqu'alors il faudrait aussi rejeter, du *Traité des propriétés projectives*, et de beaucoup d'autres ouvrages modernes, d'excellentes choses qu'on ne rencontre ni dans Appollonius ni dans les autres auteurs de la même époque.

Nous devons aussi à cette attention scrupuleuse avec laquelle M. Poncelet veut bien scruter tout ce que nous publions dans notre recueil, de réparer une omission que nous avons commise à la pag. 326 de notre XI.^e volume. Nous avons essayé de démontrer, en cet endroit, par les principes de la statique, un curieux théorème de géométrie plane de M. Coriolis, ainsi qu'un autre théorème que le principe de dualité nous en avait fait déduire. Parvenus à la fin de notre tâche, nous nous aperçûmes que la démonstration que nous avions donnée du premier de ces deux théorèmes n'exigeait pas nécessairement que les points qu'on y considérait fussent situés dans un même plan; mais, tout en faisant cette remarque, nous dûmes ajouter qu'il n'en était pas de même des droites dont il était question dans le second, attendu que, tandis que deux poids peuvent toujours se composer en un seul, deux forces, au contraire, ne peuvent se composer en une seule, qu'autant que ces forces sont situées dans un même plan.

M. Poncelet observe présentement, avec beaucoup de raison, que le théorème de M. Coriolis, étendu, comme nous l'avons fait, aux trois dimensions de l'espace, n'en a pas moins un corrélatif qui s'en déduit en y remplaçant les points par des plans. C'est, en effet, une remarque qui nous avait échappé, mais dont nous n'aurions pu faire d'ailleurs aucun usage en l'endroit cité, quand bien même elle se serait alors offerte à notre esprit, attendu que, d'une part, nos moyens de démonstration n'auraient pu atteindre à ce nouveau théorème, et que, d'une autre, les idées de dualité n'étaient pas assez répandues à cette époque pour qu'il pût nous être permis de conclure ce théorème de l'autre, comme un simple corollaire.

Aujourd'hui, au contraire, qu'il doit être bien connu que tous les théorèmes de situation marchent par couples, il nous suffira

d'avoir démontré l'un d'eux, à l'endroit cité, pour que l'autre soit admis sans contestation. Ils peuvent d'ailleurs être démontrés, chacun en particulier et même sans aucune sorte de calcul, comme il arrive pour tous les théorèmes de ce genre, en suivant une marche analogue à celle qui a été indiquée à la pag. 69 de notre XII.^e volume; et c'est une chose à laquelle nous regrettons de n'avoir pas songé en publiant notre article de la pag. 209 de notre XVI.^e volume, article dont la démonstration de ces deux théorèmes aurait fait un supplément très-convenable. Nous nous bornerons ici à présenter les deux énoncés dans une rédaction unique.

THÉORÈME. Soient, dans l'espace, n $\left\{ \begin{array}{l} \text{points} \\ \text{plans} \end{array} \right\}$ quelconques numérotés arbitrairement ainsi qu'il suit

$$(1), (2), (3), \dots (n) . \quad (1.^{\text{re}} \text{ Série}).$$

Chacun de ces $\left\{ \begin{array}{l} \text{points} \\ \text{plans} \end{array} \right\}$, avec celui qui portera le numéro immédiatement supérieur, déterminera une droite; de telle sorte qu'on aura ainsi $n-1$ droites, que l'on pourra désigner respectivement par l'ensemble des indices des deux $\left\{ \begin{array}{l} \text{points} \\ \text{plans} \end{array} \right\}$ qui déterminent chacune d'elles, en cette manière

$$\overline{(1)(2)}, \overline{(2)(3)}, \overline{(3)(4)}, \dots \dots \overline{(n-1)(n)} .$$

Soient $n-1$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{points pris} \\ \text{plans conduits} \end{array} \right\}$ respectivement, et d'une manière out à fait arbitraire $\left\{ \begin{array}{l} \text{sur} \\ \text{par} \end{array} \right\}$ ces $n-1$ droites; et soient désignés ces

$\left\{ \begin{array}{l} \text{points} \\ \text{plans} \end{array} \right\}$ par l'ensemble des numéros de la droite $\left\{ \begin{array}{l} \text{sur} \\ \text{par} \end{array} \right\}$ laquelle chacun d'eux est $\left\{ \begin{array}{l} \text{situé} \\ \text{conduit} \end{array} \right\}$ en cette manière :

$$(1, 2), (2, 3), (3, 4), \dots (n-1, n) : (2.^{\text{me}} \text{ Série})$$

En prenant deux à deux, de toutes les manières possibles, les $\left\{ \begin{array}{l} \text{points} \\ \text{plans} \end{array} \right\}$ des deux séries, dont les indices comprennent ensemble trois nombres consécutifs de la suite naturelle, sans répétition ni lacune, ces couples de $\left\{ \begin{array}{l} \text{points} \\ \text{plans} \end{array} \right\}$ détermineront une nouvelle série de $2(n-2)$ droites dont chacune pourra encore être désignée par l'ensemble des indices des deux $\left\{ \begin{array}{l} \text{points} \\ \text{plans} \end{array} \right\}$ qui auront concouru à sa détermination, en cette manière :

$$\overline{(1)(2, 3)}; \overline{(2)(3, 4)}, \overline{(3)(4, 5)}, \dots \overline{(n-2)(n-1, n)};$$

$$(1, 2)(3), (2, 3)(4), (3, 4)(5), \dots \overline{(n-2, n-1)(n)};$$

Or, il arrivera que les droites portant les mêmes nombres à leurs indices, lesquelles sont, comme l'on voit, les droites correspondantes dans les deux lignes $\left\{ \begin{array}{l} \text{concurreront} \\ \text{seront situées} \end{array} \right\}$ en un même $\left\{ \begin{array}{l} \text{point} \\ \text{plan} \end{array} \right\}$, et donneront ainsi naissance à $n-2$ nouveaux $\left\{ \begin{array}{l} \text{points} \\ \text{plans} \end{array} \right\}$ que l'on pourra également désigner respectivement par l'ensemble des indices des deux droites qui auront concouru à déterminer chacun d'eux, en cette manière :

$$(1, 2, 3), (2, 3, 4), (3, 4, 5), \dots (n-2, n-1, n) : (3.^{\text{me}} \text{ Série})$$

En prenant de nouveau deux à deux, de toutes les manières possibles, ceux des $\left\{ \begin{matrix} \text{points} \\ \text{plans} \end{matrix} \right\}$ des trois séries dont les indices portent ensemble quatre nombres consécutifs de la suite naturelle, sans répétition ni lacune, ces couples de $\left\{ \begin{matrix} \text{points} \\ \text{plans} \end{matrix} \right\}$ détermineront de nouvelles droites, au nombre de $3(n-3)$, dont chacune pourra, de la même manière, être désignée par l'ensemble des indices des deux $\left\{ \begin{matrix} \text{points} \\ \text{plans} \end{matrix} \right\}$ qui auront concouru à sa détermination, en cette manière :

$$(1)(2,3,4), (2)(3,4,5), (3)(4,5,6), \dots, (n-3)(n-2, n-1, n) \dots$$

$$(1,2)(3,4), (2,3)(4,5), (3,4)(5,6), \dots, (n-3, n-2)(n-1, n),$$

$$(1,2,3)(4), (2,3,4)(5), (3,4,5)(6), \dots, (n-3, n-2, n-1)(n) \dots$$

Or, il arrivera que les systèmes de trois droites portant les mêmes nombres à leurs indices, lesquelles sont, comme l'on voit, celles qui sont inscrites dans une même colonne $\left\{ \begin{matrix} \text{concourront} \\ \text{seront situées} \end{matrix} \right\}$ en un même $\left\{ \begin{matrix} \text{point} \\ \text{plan} \end{matrix} \right\}$, et donneront ainsi naissance à $n-3$ nouveaux $\left\{ \begin{matrix} \text{plans} \\ \text{points} \end{matrix} \right\}$ que l'on pourra continuer à désigner respectivement par l'ensemble des indices des droites qui auront concouru à leur détermination, en cette manière :

$$(1,2,3,4), (2,3,4,5), (3,4,5,6), \dots, (n-3, n-2, n-1, n). \text{ (4.}^{\text{me}} \text{ Série)}$$

En poursuivant continuellement le même procédé, on obtiendra

successivement $4(n-4)$ droites $\left. \begin{array}{l} \text{concourant} \\ \text{situées} \end{array} \right\}$ quatre à quatre en $n-4$ $\left. \begin{array}{l} \text{points} \\ \text{plans} \end{array} \right\}$, puis $5(n-5)$ droites $\left. \begin{array}{l} \text{concourant} \\ \text{situées} \end{array} \right\}$ cinq à cinq en $n-5$ $\left. \begin{array}{l} \text{points} \\ \text{plans} \end{array} \right\}$, et ainsi de suite ; de sorte que l'on parviendra finalement à $n-1$ droites désignées respectivement par

$$(1)(2,3,4, \dots, n-1, n) ,$$

$$(1,2)(3,4,5, \dots, n-1, n) ;$$

.

$$(1,2,3, \dots, n-2)(n-1, n) ;$$

$$(1,2,3, \dots, n-2, n-1)(n) ;$$

$\left. \begin{array}{l} \text{concourant} \\ \text{situées} \end{array} \right\}$ toutes en un $\left. \begin{array}{l} \text{point} \\ \text{plan} \end{array} \right\}$ unique désigné par

$$(1,2,3, \dots, n-2, n-1, n) ,$$

