
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

BOBILLIER

**Géométrie de situation. Recherches sur les lois générales
qui régissent les courbes algébriques**

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 19 (1828-1829), p. 106-114

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1828-1829__19__106_1

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1828-1829, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

GÉOMÉTRIE DE SITUATION.

*Recherches sur les lois générales qui régissent
les courbes algébriques ;*

Par M. BOBILLIER, professeur à l'École des arts et métiers
de Châlons-sur-Marne.

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

Nous nous proposons, dans ce qui va suivre, de revenir de nouveau sur des propositions déjà démontrées, pour les établir d'une manière à la fois plus simple, plus directe et plus générale.

Soit une courbe quelconque du $m^{\text{ième}}$ degré, rapportée à deux axes quelconques et exprimée par l'équation

$$M=0, \quad (1)$$

en x et y . L'équation de la tangente à cette courbe, en l'un quelconque (x', y') de ses points, sera, comme l'on sait,

$$\frac{dM}{dx'}(x-x') + \frac{dM}{dy'}(y-y')=0; \quad (2)$$

les coordonnées x', y' du point de contact étant liées par l'équation de relation

$$M'=0 . \quad (3)$$

Si, laissant x' et y' indéterminés, on veut profiter de leur indétermination pour assujétir la tangente à passer par un point (a, b) donné sur le plan de la courbe, il faudra exprimer que l'équation (2) est satisfaite en y faisant simultanément $x=a$ et $y=b$, ce qui la changera en celle-ci

$$\frac{dM'}{dx'}(a-x') + \frac{dM'}{dy'}(b-y')=0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{dM'}{dx'}(x'-a) + \frac{dM'}{dy'}(y'-b)=0 ; \quad (4)$$

de sorte que les points de contact des tangentes à la courbe (1), issues du point (a, b) , seront donnés par le système des deux équations (3) et (4), ou, ce qui revient au même, par la combinaison de l'équation (1) avec l'équation

$$\frac{dM}{dx}(x-a) + \frac{dM}{dy}(y-b)=0 ; \quad (5)$$

ces points seront donc ceux où la courbe proposée sera coupée par celle qu'exprime l'équation (5).

L'équation (5) n'étant, comme l'équation (1), que du $m^{\text{ème}}$ degré seulement, il s'ensuit que le nombre des points de contact, ni conséquemment le nombre des tangentes issues du point (a, b) ne saurait être supérieur à m^2 (*); mais nous allons voir que le

(*) C'est sans doute par de semblables considérations que Waring, dans ses *Miscellanea Analytica* que nous n'avons pas présentement sous la main, fixe à m^2 limite du nombre des tangentes qu'on peut mener à une courbe du $m^{\text{ème}}$ degré, de l'un quelconque des points de son plan.

nombre de ces tangentes est réellement inférieur à cette limite.

Lorsque des points sont donnés sur un plan par le système de deux équations en x et y , ils le sont également par le système de l'une d'elles et d'une combinaison quelconque de l'une et de l'autre. En conséquence, puisque les points de contact des tangentes issues du point (a, b) sont donnés par le système des deux équations (1) et (5), ils le seront aussi par la première de ces deux là, combinée avec l'équation

$$\frac{dM}{dx}(x-a) + \frac{dM}{dy}(y-b) = mM; \quad (6)$$

laquelle sera ainsi, comme l'équation (5), celle d'une courbe coupant la proposée aux points de contact cherchés. Or, en vertu du théorème connu sur les fonctions homogènes, tous les termes de m dimensions en x et y disparaissent de celle-ci qui ne s'élève conséquemment qu'au $(m-1)^{i\text{ème}}$ degré; en la combinant donc avec l'équation (1) elle ne donnera au plus que $m(m-1)$ systèmes de valeurs pour les coordonnées des points de contact; d'où il suit que le nombre des tangentes menées à la proposée par le point (a, b) ne pourra s'élever au-dessus de cette limite (*).

(*) De même que, par suite du théorème des fonctions homogènes, la limite m^2 fixée par Waring se trouve trop élevée, il se pourrait qu'en vertu de quelque autre théorème, inaperçu jusqu'ici, la limite $m(m-1)$ le fût trop aussi; car il faut bien remarquer que des deux équations (1) et (6), la première seule est quelconque, tandis que l'autre en est déduite d'une manière tout à fait particulière. Or, s'il était vrai qu'on ne pût pas mener à une courbe du $m^{\text{ième}}$ degré $m(m-1)$ tangentes d'un même point, il serait faux que la polaire réciproque d'une courbe du $m^{\text{ième}}$ degré dût s'élever au $[m(m+1)]^{\text{ième}}$ degré. MM. les commissaires de l'Académie royale des sciences ont donc été fondés à dire (*Bulletin des sciences mathématiques*, avril 1828, pag. 227) que cette dernière proposition était encore à démontrer. M. Poncelet nous a lui-même offert des exemples de courbes du troi-

L'équation (6) étant ainsi celle d'une courbe qui coupe la proposée en ses points de contact avec les tangentes qui lui sont menées du point quelconque (a, b) de son plan, et cette équation n'étant que du $(m-1)^{i\text{e}m\text{e}}$ degré seulement; en invoquant le principe des polaires réciproques on sera conduit à établir ces deux théorèmes :

<p><i>THÉORÈME I. Les points de contact des tangentes menées à une courbe du $m^{\text{i}e}m\text{e}$ degré, de l'un quelconque des points de son plan, sont tous situés sur une courbe du $(m-1)^{i\text{e}m\text{e}}$ degré au plus (*).</i></p>	<p><i>THÉORÈME I. Les tangentes menées à une courbe du $m^{\text{i}e}m\text{e}$ degré, par ses intersections avec une transversale rectiligne quelconque, touchent toutes une courbe du $(m-1)^{i\text{e}m\text{e}}$ degré au plus (*).</i></p>
--	---

sième degré, auxquelles on ne pouvait mener que trois tangentes par un quelconque des points de leur plan; mais il ne nous en a point indiqué de ce degré, pour lesquelles ces tangentes soient au nombre de six. Il ne nous a pas même montré, ce qui aurait pu suffire, une courbe continue tracée arbitrairement à la main, de laquelle on vit clairement 1.^o qu'aucune droite ne peut la couper en plus de trois points; 2.^o que, néanmoins d'un certain point, on peut lui mener six tangentes.

J. D. G.

(*) M. Poncelet observe, avec beaucoup de raison (*Bulletin des sciences mathématiques*, mai 1828, pag. 301), que c'est par erreur que M. Bobillier et nous, avons attribué ce théorème à M. Vallès, attendu qu'il se trouve clairement indiqué à la pag. 215 de notre VIII.^e volume. Du reste, l'erreur de M. Bobillier sur ce point est fort excusable, car il ne connaît pas notre VIII.^e volume qui ne se trouve plus aujourd'hui dans la librairie; et quant à nous, si M. Poncelet veut bien prendre la peine d'ouvrir notre XVI.^e volume, à la page 132, il y verra proposé à démontrer, comme nouveau, un théorème que nous avons nous-même démontré à la page 282 de notre IX.^e volume, et il ne saurait raisonnablement exiger de nous que nous ayons plus de mémoire de ses œuvres que des nôtres. Puisse-t-il vivre assez long-temps pour apprendre, par sa propre expérience, qu'avec l'âge la mémoire se perd tout aussi bien que les cheveux.

J. D. G.

Cette courbe est ce que nous avons appelé (*Annales*, tom. XVIII, pag. 253) la *courbe polaire* du point dont il s'agit, par rapport à la courbe directrice proposée.

Cette courbe est ce que nous avons appelé (*Annales*, tom. XVIII, pag. 253) la *courbe polaire* de la droite dont il s'agit, par rapport à la courbe directrice proposée.

Si le point de départ (a, b) des tangentes est mobile sur une droite ayant pour équation $y = \alpha x$, on devra avoir $b = \alpha a$, ce qui changera l'équation (6) en celle-ci :

$$x \frac{dM}{dx} + y \frac{dM}{dy} - mM = a \left(\frac{dM}{dx} + \alpha \frac{dM}{dy} \right). \quad (7)$$

Si, dans cette équation, on considère a comme un paramètre variable, cette équation ne pourra être satisfaite que par les systèmes de valeurs qui satisferont à la fois aux deux suivantes :

$$x \frac{dM}{dx} + y \frac{dM}{dy} = mM, \quad \frac{dM}{dx} + \alpha \frac{dM}{dy} = 0; \quad (8)$$

lesquelles expriment deux courbes du $(m-1)^{\text{ième}}$ degré, qui se coupent en $(m-1)^2$ points seulement; or, comme l'origine est quelconque, la droite donnée par l'équation $y = \alpha x$ est une droite quelconque; de sorte qu'en invoquant la théorie des polaires réciproques on aura ces deux théorèmes :

THÉORÈME II. *Les courbes polaires de tous les points d'une droite indéfinie, relatives à une directrice quelconque du $m^{\text{ième}}$ degré, se coupent toutes aux $(m-2)^2$ mêmes points fixes.*

THÉORÈME II. *Les courbes polaires de toutes les droites qui passent par un même point fixe, relatives à une directrice quelconque de $m^{\text{ième}}$ classe, touchent toutes les $(m-1)^2$ mêmes droites fixes.*

Ces points sont, ce que nous avons appelé (*Annales*, tom.

Ces droites sont, ce que nous avons appelé (*Annales*, tom.

XVIII, pag. 254) les *points polaires* de la droite dont il s'agit, relativement à la courbe directrice proposée. XVIII, pag. 254) les *droites polaires* du point dont il s'agit, relativement à la courbe directrice proposée.

Si, dans les équations (8), on suppose α variable, les points d'intersection des deux courbes varieront aussi; mais ces points seront toujours situés sur la première des deux courbes, dans l'équation de laquelle α n'entre pas; or, faire varier α c'est faire tourner la droite $y = \alpha x$ autour de l'origine, qui est quelconque sur le plan de la courbe (1); et comme d'un autre côté, la première des équations (8) n'est autre chose que l'équation de la courbe polaire de l'origine, on a encore ces deux théorèmes:

THÉORÈME III. Si une droite tourne, dans le plan d'une courbe directrice, autour de l'un des points de sa direction, les points polaires de cette droite parcourront la courbe polaire de ce point fixe. *THÉORÈME III. Si un point parcourt une droite, dans le plan d'une courbe directrice, les droites polaires de ce point envelopperont la courbe polaire de cette droite fixe.*

Soit μ une constante indéterminée, et soient deux courbes du $m.$ ^{ème} degré données par les équations $M' = 0$, $M'' = 0$; l'équation générale des courbes de ce degré passant par leurs intersections sera, comme l'on sait,

$$M' + \mu M'' = 0; \quad (9)$$

posant donc

$$M = M' + \mu M'',$$

il viendra, en différentiant,

$$\frac{dM}{dx} = \frac{dM'}{dx} + \mu \frac{dM''}{dx}, \quad \frac{dM}{dy} = \frac{dM'}{dy} + \mu \frac{dM''}{dy};$$

substituant ensuite dans (6), en y faisant a et b nuls, on obtiendra, pour la courbe polaire de l'origine, relativement à la directrice (9),

$$\left(\frac{dM'}{dx} + \mu \frac{dM''}{dx}\right)x + \left(\frac{dM'}{dy} + \mu \frac{dM''}{dy}\right)y = m(M' + \mu M'')$$

ou bien

$$x \frac{dM'}{dx} + y \frac{dM'}{dy} - mM' + \mu \left(x \frac{dM''}{dx} + y \frac{dM''}{dy} - mM''\right) = 0. \quad (10)$$

Or, quelle que soit la valeur attribuée à la constante arbitraire μ , cette courbe polaire passe évidemment par les $(m-1)^2$ points fixes donnés par les deux équations

$$x \frac{dM'}{dx} + y \frac{dM'}{dy} = mM'; \quad x \frac{dM''}{dx} + y \frac{dM''}{dy} = mM'';$$

on a donc ces deux théorèmes :

THÉORÈME IV. Si tant de courbes du m.^{ième} degré qu'on voudra passant toutes par les m^2 mêmes points fixes, les courbes polaires d'un point quelconque, relatives à toutes celles-là, passeront toutes par les $(m-1)^2$ mêmes points également fixes.

THÉORÈME IV. Si tant de courbes de m.^{ième} classe qu'on voudra ont toutes les m^2 mêmes tangentes fixes, les courbes polaires d'une droite quelconque, relatives à toutes ces courbes, auront toutes les $(m-1)^2$ mêmes tangentes également fixes.

C'est là, comme l'on voit, la première partie des deux théorèmes de la page 256 du précédent volume, et les deux autres seraient tout aussi faciles à établir.

Si l'équation $M''=0$ est homogène en x et y , elle exprimera le système de m droites réelles ou idéales, passant par l'origine; et conséquemment les courbes comprises dans l'équation (9) auront

m sécantes communes, issues d'un même point; or, à cause de l'homogénéité de M'' , on a identiquement

$$x \frac{dM''}{dx} + y \frac{dM''}{dy} = mM'' ;$$

au moyen de quoi l'équation (10) de la courbe polaire de l'origine, se réduit simplement à

$$x \frac{dM'}{dx} + y \frac{dM'}{dy} = mM' ;$$

de sorte que cette polaire est alors indépendante de la constante arbitraire μ ; on a donc ces deux théorèmes :

THÉORÈME V. Si tant de courbes du $m^{\text{ième}}$ degré qu'on voudra ont toutes les m^2 mêmes points communs, distribués m à m sur m droites, concourant en un même point, ce point n'aura qu'une courbe polaire unique par rapport à toutes les courbes proposées; cette polaire contiendra conséquemment les points de contact de toutes les tangentes menées à ces courbes par le même point.

THÉORÈME V. Si tant de courbes de $m^{\text{ième}}$ classe qu'on voudra ont toutes les m^2 mêmes tangentes communes, concourant m à m en m points, appartenant à une même droite, cette droite n'aura qu'une courbe polaire unique par rapport à toutes les courbes proposées; cette polaire sera conséquemment enveloppée par les tangentes menées à toutes ces courbes aux points où elles sont coupées par cette droite.

En supposant, en particulier, $m=2$, on déduira de là ces deux propositions connues :

Les points de contact des tangentes menées à toutes les lignes du second ordre circonscrites à un même quadrilatère, par le point de concours de deux côtés

Les tangentes menées à toutes les lignes du second ordre inscrites à un même quadrilatère par leurs points d'intersection, avec la droite qui joint deux

opposés de ce quadrilatère , appartenant tous à une seule et même droite , polaire commune de ce point , relativement à toutes ces courbes.

sommets opposés de ce quadrilatère , concourent toutes en un seul et même point , pôle commun de cette droite , relativement à toutes ces courbes.
