6529

ANNALES

DE MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

CONDITIONS DE LA SOUSCRIPTION.

Depuis le premier juillet 1810, ce Recueil paraît de mois en mois, par livraisons de 30 à 40 pages d'impression, non compris les planches.

On peut adresser indistinctement les demandes de souscription,

Au Rédacteur des *Annales*, rue du St-Sacrement, n.° 5, à Montpellier [Hérault];

A M. *Bachelier*, gendre *Courcier*, libraire pour les Mathématiques, Quai des Augustins, n.° 55, à Paris;

Et à tous les bureaux de poste.

Les articles à insérer et les ouvrages à annoncer doivent être envoyés, francs de port, à la première de ces adresses.

Le prix de la souscription annuelle est 21 fr. pour la France et 24 fr. pour l'Étranger.

ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

RECUEIL PÉRIODIQUE,

RÉDIGÉ ET PUBLIÉ

Par J. D. GERGONNE, professeur à la faculté des sciences de Montpellier, membre de plusieurs sociétés savantes.

TOME DIX-NEUVIÈME.

A NISMES,

DE L'IMPRIMERIE DE P. DURAND-BELLE.

Et se trouve à PARIS, chez M. BACHELIER, gendre COURCIER, Libraire pour les Mathématiques, Quai des Augustins, n.° 55.

1828 ET 1829.

ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

GÉOMÉTRIE DE SITUATION.

Démonstration de quelques théorèmes ;

Par M. J. Steiner.

§. I.

1. Il est généralement connu que si, par un quelconque P des points du plan d'un triangle ABC et par ses sommets, on mène trois droites AP, BP, CP, rencontrant respectivement en A′, B′, C′, les directions des côtés BC, CA, AB de ce triangle, on aura l'équation

$$AB'.BC'.CA'=BA'.CB'.AC' ;$$

et que, réciproquement, si trois points A′, B′, C′, sont tellement situés sur les directions des côtés d'un triangle ABC, que cette équation ait lieu, les droites AA′, BB′, CC′ concourront en un même point P, pourvu toutefois (*Annales*, tom. XVII, pag. 141) que ceux de ces points qui seront situés sur les côtés même du triangle, et non sur leurs prolongemens, soient en nombre impair. On sait que, dans le cas contraire, les trois points A', B', C' appartiendraient à une même droite.

2. Par les trois points A', B', C' soit décrit un cercle coupant de nouveau en A'', B'', C'', les directions des côtés BC, CA, AB; par la propriété des cordes ou des sécantes, issues d'un même point, on aura

$$AB'.AB''=AC'.AC'',$$

$$BC'.BC''=BA'.BA'',$$

$$CA'.CA''=CB'.CB'';$$

équations qui, multipliées membre à membre, donneront, en réduisant, au moyen de la précédente (1),

$$AB''.BC''.CA''=BA''.CB''.AC'';$$

ce qui prouve (1) que les droites AA'', BB'', CC'' concourent aussi en un même point P'.

3. Parce que cette propriété est de nature projective, elle aura lieu également lorsqu'on substituera au cercle une ligne quelconque du second ordre. En invoquant ensuite la théorie des polaires réciproques, on obtiendra les deux théorèmes que voici:

THÉORÈME. Les trois sommets d'un triangle étant A, B, C, *et* P *étant un point quelconque de son plan; si* A', B', C' *sont les points où les directions des côtés* BC, CA, AB, *sont respectivement rencontrées par les droites* AP, BP, CP, *et que, par*

THÉORÈME. Les trois côtés d'un triangle étant A, B, C, *et* P *étant une droite tracée arbitrairement sur son plan; si* A', B', C' *sont les droites qui joignent respectivement les sommets* BC, CA, AB, *aux points* AP, BP, CP, *et qu'on décrive une* *ces trois points* A′, B′, C′ *on fasssc passer une ligne quelconque du second ordre, coupant de nouveau les mêmes côtés respectivement en* A″, B″, C″, *les droites* AA″, BB″, CC″ *concourront aussi toutes trois en un même point* P′ (*).

Et réciproquement, *deux points* P, P′ *étant pris arbitrairement sur le plan d'un triangle dont les sommets sont* A, B, C; *si l'on mène les droites* AP *et* AP′, BP *et* BP′, CP *et* CP′, *rencontrant respectivement les directions des côtés* BC, CA, AB *en* A′ *et* A″, B′ *et* B″, C′ *et* C″, *ces six points appartiendront à une même ligne du second ordre.*

ligne quelconque du second ordre, touchant les trois droites A′, B′, C′; *en menant à cette courbe, par les mêmes sommets, les tangentes* A″, B″, C″, *les points* AA″, BB″, CC″ *appartiendront aussi tous trois à une même droite* P′.

Et réciproquement, *deux droites* P, P′ *étant tracées arbitrairement sur le plan d'un triangle dont les côtés sont* A, B, C; *si l'on joint respectivement les points* AP *et* AP′, BP *et* BP′, CP, *et* CP′ *aux sommets* BC, CA, AB *par des droites* A′ *et* A″, B′ *et* B″, C′ *et* C″, *ces six droites seront tangentes à une même ligne du second ordre.*

4. On sait que, lorsqu'une ligne du second ordre touche les trois côtés d'un triangle, les droites qui joignent les points de contact aux sommets respectivement opposés se coupent toutes trois au même point; et que, réciproquement, trois droites menées par les sommets d'un triangle, de manière à se couper au même point, rencontrent les côtés respectivement opposés en des points où ils peuvent être touchés par une même ligne du second ordre. De là (3), et par la théorie des polaires réciproques, on pourra conclure ces deux théorèmes.

(*) En remplaçant la ligne du second ordre par le système de deux droites, on obtiendrait quelques porismes déjà connus.

THÉORÈME. Les points de contact des trois côtés d'un triangle avec deux lignes quelconques du second ordre qui lui sont inscrites, appartiennent tous six à une troisième ligne du second ordre.

THÉORÈME. Les tangentes menées, par les trois sommets d'un triangle, à deux lignes quelconques du second ordre qui lui sont circonscrites, touchent toutes six une troisième ligne du second ordre.

§. II.

5. Des précédens théorèmes on en déduit aisément d'autres analogues, relatifs aux surfaces du second ordre comparées au tétraèdre.

Soit ABCD un tétraèdre quelconque. Par un point quelconque P de l'espace et par chacune de ses arêtes concevons des plans coupant les arêtes respectivement opposées. Soient a, b, c les points où les arêtes BC, CA, AB, sont respectivement coupées par les plans APD, BPD, CPD, et soient α, β, γ ceux où les arêtes opposées AD, BD, CD, sont respectivement coupées par les plans BPC, CPA, APB, nos six plans se couperont deux à deux suivant les trois droites $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$; il est visible, en outre,

$$\text{que les droites}\left\{\begin{matrix}B\gamma,\ C\beta,\ Da\\ C\alpha,\ A\gamma,\ Db\\ A\beta,\ B\alpha,\ Dc\\ Aa,\ Bb,\ Cc\end{matrix}\right\}\text{se couperont en un même point}\left\{\begin{matrix}A'\\ B'\\ C'\\ D'\end{matrix}\right\};$$

et que les droites AA′, BB′, CC′, DD′ se couperont toutes quatre au point P.

Il est aisé de voir que, réciproquement, six points a, b, c, α, β, γ étant pris respectivement sur les arêtes BC, CA, AB, AD, BD, CD d'un tétraèdre ABCD, de telle sorte

$$\text{que les droites}\left\{\begin{matrix} B\gamma,\ C\beta,\ Da \\ C\alpha,\ A\gamma,\ Db \\ A\beta,\ B\alpha,\ Dc \\ Aa,\ Bb,\ Cc \end{matrix}\right\}\text{se coupent en un même point}\left\{\begin{matrix} A' \\ B' \\ C' \\ D' \end{matrix}\right\},$$

les droites AA', BB', CC', DD' se couperont aussi toutes quatre en un même point P par lequel passeront aussi les trois droites $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$.

Ainsi, lorsque six points sont tellement situés sur les directions des arêtes d'un tétraèdre, que les droites menées dans chaque face par les points qui y sont situés et par les sommets de cette face qui leur sont respectivement opposés se coupent toutes trois en un même point, les droites qui joignent deux à deux les points situés sur les directions des arêtes respectivement opposées se coupent aussi toutes trois en un même point et réciproquement.

Il est à remarquer que les six points a, b, c, α, β, γ sont tellement liés entre eux, que trois quelconques de ces six points, choisis de manière à ne pas appartenir à une même face, déterminent le point P et par suite les trois autres, ainsi que les droites $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$.

6. Par les six points a, b, c, α, β, γ concevons une surface quelconque du second ordre, coupant de nouveau les mêmes arêtes du tétraèdre en a', b', c', α', β', γ'; les intersections de cette surface avec les plans des faces du tétraèdre seront des lignes du second ordre coupant les côtés de ces faces en trois points tels que les droites qui les joindront aux sommets respectivement opposés se couperont en un même point; donc (2) les droites qui joindront dans la même face les trois autres intersections aux mêmes sommets se couperont aussi en un même point; et par conséquent (5) les points a', b', c', α', β', γ' jouiront des proprietés que nous

venons de voir appartenir aux points $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$; de sorte que les droites $a'\alpha'$, $b'\beta'$, $c'\gamma'$ concourront toutes trois en un même point P'; de là, et par la théorie des polaires réciproques, on conclura ces deux théorèmes :

THÉORÈME. Si une surface quelconque du second ordre est tellement située, par rapport à un tétraèdre, qu'elle coupe ses arêtes en six point $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$, *tels que les droites* $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ *qui joignent les points d'intersection qui répondent aux arêtes respectivement opposées concourent toutes trois en un même point* P, *elle coupera de nouveau ces mêmes arêtes en six autres points* $a', b', c', \alpha', \beta', \gamma'$ *tels que les droites* $a'\alpha'$, $b'\beta'$, $c'\gamma'$ *qui joindront les points d'intersection situés sur les arêtes respectivement opposées concourront aussi toutes trois en un même point* P' (*).

Et réciproquement, *un point* P *étant situé d'une manière quelconque dans l'espace; si l'on conduit, par ce point et par les arêtes d'un tétraèdre, des plans cou-*

THÉORÈME. Si une surface quelconque du second ordre est tellement située, par rapport à un tétraèdre, que six plans tangens $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ *à cette surface, conduits par les arêtes du tétraèdre, soient tels que les intersections* $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ *des plans tangens issus des arêtes respectivement opposées soient toutes trois dans un même plan* P, *les six autres plans tangens* $a', b', c', \alpha', \beta', \gamma'$, *menés à cette surface par ces mêmes arêtes, seront tels que les intersections* $a'\alpha'$, $b'\beta'$, $c'\gamma'$ *des plans tangens issus des arêtes respectivement opposées seront aussi toutes trois situées dans un même plan* P'.

Et réciproquement, *un plan* P *étant situé d'une manière quelconque dans l'espace; si, par chacune des arêtes d'un tétraèdre et par le point où ce plan*

(*) En remplaçant la surface du second ordre par le système de deux plans, on obtiendra des porismes analogues à ceux que nous avons signalés dans la précédente note.

pant respectivement leurs opposées, on obtiendra ainsi, sur ces arêtes, six points a, b, c, α, β, γ, *tels que les droites* $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ *qui joindront les points situés sur les arêtes opposées concourront toutes trois au point* P; *et si, pour un autre point* P′, *également quelconque, on détermine, sur les mêmes arêtes, six nouveaux points* a′, b′, c′, α', β', γ', *tels que les droites* $a'\alpha'$, $b'\beta'$, $c'\gamma'$ *qui joindront les points situés sur les arêtes opposées concourent aussi toutes trois en ce même point* P′, *les douze points* a, b, c, α, β, γ, a′, b′, c′, α', β', γ' *seront tous situés sur une même surface du second ordre.*

coupe son opposée, on conduit un plan, on obtiendra ainsi six plans a, b, c, α, β, γ, *tels que les droites* $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, *suivant lesquelles se couperont ceux qui passeront par les arêtes opposées, seront toutes trois situées dans le plan* P; *et si, pour un autre plan* P′, *également quelconque, on conduit, par les mêmes arêtes, six nouveaux plans* a′, b′, c′, α', β', γ', *tels que les droites* $a'\alpha'$, $b'\beta'$, $c'\gamma'$, *suivant lesquelles se couperont ceux qui seront issus des arêtes opposées, soient aussi situées toutes trois dans ce même* P′, *les douze plans* a, b, c, α, β, γ, a′, b′, c′, α', β', γ' *seront tous tangens à une même surface du second ordre.*

7. Si l'on conçoit une surface quelconque du second ordre, qui touche les six arêtes d'un tétraèdre donné, ses intersections avec les plans des faces de ce tétraèdre seront des lignes du second ordre touchant les trois côtés de ces faces; et si, dans ces mêmes faces, on mène des droites des trois sommets aux points de contact des côtés respectivement opposés, ces droites (4) se couperont en un même point; d'où il suit (5) que les droites qui joindront deux à deux les points de contact situés sur les arêtes opposées se couperont toutes trois en un même point.

Il est aisé de voir que, réciproquement, six points étant pris respectivement sur les arêtes d'un tétraèdre, de telle sorte que les droites qui joindront deux à deux ceux qui seront situés sur les arêtes opposées concourent toutes trois en un même point, on pourra toujours concevoir une surface du second ordre qui touche les arêtes du tétraèdre en ces six points.

De là et ensuite, par la théorie des polaires réciproques, on pourra conclure (5) et (6), les deux théorèmes suivans :

THÉORÈME. Si deux surfaces du second ordre touchent l'une et l'autre les six arêtes d'un tétraèdre, les douze points de contact, situés deux à deux sur ces arêtes, appartiendront à une troisième surface du second ordre (*).

THÉORÈME. Si deux surfaces du second ordre touchent l'une et l'autre les six arêtes d'un tétraèdre, les douze plans tangens à ces surfaces, conduits deux à deux par ces arêtes, toucheront une troisième surface du second ordre (*).

(*) Voici deux autres théorèmes qui, s'ils sont vrais, comme ils paraissent l'être, formeront un complément fort naturel de cette théorie ; nous en abandonnons l'examen à la sagacité de M. Steiner.

THÉORÈME. Si trois surfaces du second ordre sont inscrites à un même tétraèdre, les douze points où elles toucheront ses faces appartiendront à une quatrième surface du second ordre.

THÉORÈME. Si trois surfaces du second ordre sont circonscrites à un même tétraèdre, leurs douze plans tangens par ses sommets toucheront une quatrième surface du second ordre.

Ces sortes de théorèmes présentent beaucoup d'intérêt, comme pouvant acheminer à découvrir, soit la relation entre dix points d'une surface du second ordre, soit la relation entre dix plans tangens à une telle surface ; problème dont la solution ne pourrait que faire beaucoup d'honneur au géomètre à qui la science en serait redevable.

J. D. G.

MÉTÉOROLOGIE.

Résumé des observations barométriques, hygrométriques et thermométriques, faites à Montpellier en 1827;

Par M. Gergonne.

§. I.

Observations barométriques.

Ces observations ont été faites avec le baromètre à niveau constant de Fortin, déjà décrit à la pag. 167 du précédent volume; l'extrémité de la pointe d'ivoire qui donne le niveau étant toujours estimée à $39^{m},25$ au-dessus des eaux moyennes de la mer; elles ont été corrigées des 26 centièmes de millimètre dont le zéro de ce baromètre se trouve plus bas que celui du baromètre de l'observatoire royal de Paris. Elles ont été ramenées ensuite à la température de la glace fondante, au moyen de la table de M. Bouvard, qui corrige à la fois la dilatation du mercure et celle de l'échelle. D'après un examen attentif de la situation de la pointe d'ivoire, j'ai pensé que la correction de capillarité était trop légère pour mériter d'être tentée.

Les physiciens qui ont écrit sur les observations barométriques ont indiqué des époques plus favorables que d'autres pour ces sortes d'observations, et ces époques ont été adoptées par le bureau des longitudes. Mais lorsqu'on est seul à observer et qu'on a des devoirs obligés hors de chez soi, on ne peut s'astreindre à ces époques; et il vaut mieux encore en choisir d'autres moins favorables, que de confier les observations à autrui.

Fort heureusement à l'époque de midi, regardée comme la plus importante de toutes, je suis toujours à peu près sûr d'être chez moi; j'ai donc pu prendre cette époque pour celle de départ. J'en ai choisi trois autres, en ayant soin de faire ensorte 1.° de pouvoir observer moi-même à ces époques; 2.° de rendre les diverses époques équidistantes. C'est d'après cette double considération que je me suis fixé aux époques de 7 heures du matin, midi, 5 heures et 10 heures du soir, temps vrai de Montpellier. Mais, soit que je rentrasse quelquefois un peu trop tard, soit que je me trouvasse obligé de sortir, soit enfin par toute autre cause de distraction, il ne m'a pas toujours été possible d'observer rigoureusement à l'époque choisie. Du moins est-il vrai de dire que, dans ces circonstances, assez rares d'ailleurs, l'observation n'a jamais guère été devancée ou retardée d'un quart d'heure; j'ai d'ailleurs tout lieu de croire qu'elle n'a guère été ni plus ni moins souvent devancée que retardée, de sorte qu'il y a beaucoup de probabilités en faveur des compensations d'erreurs.

On voit, d'après cela, que, si l'on partage l'intervalle de temps compris depuis *quatre heures et demie du matin* d'un jour jusqu'à *minuit et demi* du jour suivant en quatre parties égales, mes observations se trouveront placées aux milieux de ces quatre parties. On pourra donc regarder la moyenne des quatre observations de chaque jour comme la moyenne barométrique qui répond à cet intervalle de vingt heures. Je me suis permis de la regarder comme la moyenne des 24 heures, qui pourrait être réellement un peu plus petite à raison du minimum qui a lieu vers les quatre heures du matin.

Je dois dire encore qu'il ne m'a pas toujours été possible d'observer. Mais, afin qu'on puisse juger de mon assiduité, voici le tableau du nombre des observations par mois, pour les différentes heures du jour,

MOIS.	7 HEURES.	MIDI.	5 HEURES	10 HEURES.
Janvier.	27	27	29	30
Février.	26	24	27	27
Mars.	31	30	30	31
Avril.	30	29	29	30
Mai.	31	29	30	31
Juin.	30	27	29	29
Juillet.	29	30	31	31
Août.	30	25	28	31
Septembre.	29	29	28	28
Octobre.	28	28	28	31
Novembre.	30	30	29	30
Décembre.	31	31	31	31
Sommes.	352	339	349	360

J'ai pris les moyennes des observations faites, sans tenir aucun compte des observations omises ; M. Gambart, à Marseille, supplée à celles-ci par des interpolations; c'est peut-être mieux. Il est possible que j'en use ainsi pour 1828.

I. *Tableau des Moyennes Barométriques.*

1827.	7 HEURES.	MIDI.	5 HEURES.	10 HEURES	MOYENNE.
Janvier.	757,10	757,19	757,22	758,07	757,39
Février.	757,24	757,50	757,33	756,94	757,12
Mars.	759,85	759,21	758,92	759,88	759,47
Avril.	759,10	759,13	758,54	758,75	758,88
Mai.	756,31	755,79	755,43	756,12	755,94
Juin.	757,13	756,78	756,26	757,23	756,85
Juillet.	760,91	760,39	759,56	760,56	760,36
Août.	758,85	758,58	757,78	758,61	758,45
Septembre.	758,87	759,27	758,75	759,22	759,03
Octobre.	755,47	755,49	755,25	755,95	755,54
Novembre	759,56	759,47	758,47	759,89	759,35
Décembre.	762,35	762,13	761,74	762,50	762,13
Moyennes.	758,55	758,41	757,94	758,65	758,39

Ce tableau montre que la moyenne du jour diffère peu de la moyenne de midi.

Il résulte donc de ce tableau que la moyenne barométrique à Montpellier, pour l'année 1827, a été 758,39.

II. *Tableau des Mouvemens Barométriques.*

1827.	MAXIMUM.	MOYENNE.	MINIMUM.	OSCILLATIONS.
Janvier.	768,81	757,39	737,95	30,86
Février.	769,57	757,12	746,03	23,54
Mars.	767,86	759,47	745,81	22,06
Avril.	765,16	758,88	742,92	22,24
Mai.	762,43	755,94	758,08	4,35
Juin.	760,55	756,85	752,15	8,40
Juillet.	764,43	760,36	756,83	7,60
Août.	763,15	758,45	752,88	10,27
Septembre.	765,45	759,03	747,20	18,25
Octobre.	763,36	755,54	747,63	15,73
Novembre.	770,27	759,35	749,98	20,29
Décembre.	771,11	762,13	744,90	26,21
Maximum.	771,11	762,13	758,08	30,86
Moyenne.	766,01	758,39	748,58	17,48
Minimum.	760,55	755,54	737,95	4,35
Oscillations	10,56	6,59	20,59	26,51

Ce tableau donne, pour le plus grand maximum,	771,11
Et pour le plus petit minimum,	737,95
Différence	33,16

Le sommet de la colonne de mercure a donc parcouru dans le tube, en 1827, une longueur de 33,16.

§. II.

Observations hygrométriques.

Ces observations ont été faites avec un hygromètre à cheveu, de Saussure, construit par Pixii, à Paris. La crainte de rompre le cheveu m'a détourné de l'envie de le vérifier, de sorte que, dès son arrivée ici, il a été mis en place tel que je l'avais reçu.

Cet hygromètre est placé dans une chambre assez grande où, durant l'hiver, il y a du feu une partie de la journée; mais il est à plus de deux mètres du tuyau de la cheminée, près de la fenêtre, contre un mur de refend, à la distance de deux pouces du mur de face. J'avais d'abord craint que l'absorption des eaux pluviales par ce mur qui fait face au nord ne nuisît à la marche de l'instrument; mais des variations brusques et étendues, dans le cours d'une même journée, même après plusieurs jours de fortes pluies, m'ont prouvé que mes craintes étaient peu fondées.

Les observations hygrométriques ont été faites aux mêmes heures du jour que celles du baromètre; elles sont donc en même nombre que ces dernières, et il y a les mêmes choses à dire sur les unes et sur les autres. En voici les résultats:

I. *Moyennes hygrométriques.*

1827.	7 HEURES.	MIDI.	3 HEURES.	10 HEURES	MOYENNES
Janvier.	70,0	69,1	68,8	70,0	69,5
Février.	76,1	75,3	75,6	76,2	75,8
Mars.	74,6	77,5	73,8	74,1	75,0
Avril.	71,5	70,5	70,7	71,5	71,1
Mai.	75,3	74,9	74,3	74,9	74,8
Juin.	68,5	64,5	63,8	64,2	65,2
Juillet.	57,8	56,4	55,3	56,2	56,4
Août	59,7	56,5	56,4	56,9	57,4
Septembre.	67,1	66,5	66,0	67,5	66,8
Octobre.	85,8	84,8	88,3	88,4	86,8
Novembre.	80,7	80,1	79,7	80,5	80,2
Décembre.	83,3	82,7	82,4	83,1	82,9
Moyennes.	72,5	71,6	71,3	72,0	71,8

On voit donc qu'à Montpellier, la moyenne hygrométrique pour l'année 1827 est 71,8 ; on voit aussi que la moyenne des jours diffère peu de celle de midi.

II. *Tableau des Mouvemens Hygrométriques.*

1827.	MAXIMUM.	MOYENNE.	MINIMUM.	OSCILLATIONS.
Janvier.	78,0	69,5	56,0	22,0
Février.	84,0	75,8	70,0	14,0
Mars.	85,5	75,0	59,5	26,0
Avril.	79,0	71,1	60,5	18,5
Mai.	82,0	74,8	62,5	19,5
Juin.	76,0	65,2	44,5	31,5
Juillet.	75,0	56,4	42,5	32,5
Août.	70,0	57,4	43,0	27,0
Septembre.	85,0	66,8	54,0	31,0
Octobre.	93,0	86,8	81,0	12,0
Novembre.	87,0	80,2	71,5	15,0
Décembre.	91,5	82,9	72,5	19,0
Maximum.	93,0	86,8	81,0	32,5
Moyenne.	82,2	71,8	59,8	22,4
Minimum	70,0	56,4	42,5	12,0
Oscillations	23 0	30,4	38,5	20,5

Ce tableau donne, pour le plus grand maximum,	93,0
Et pour le plus petit minimum,	42,5
Différence	50,5

Ainsi, à Montpellier, pendant l'année 1827, l'aiguille de l'hygromètre a parcouru, sur le cadran, 50 divisions et demie.

§. III.

Observations Thermométriques.

Je n'ai différé jusqu'ici la publication des précédentes observations que pour pouvoir y joindre celles du thermomètre que je n'avais pu commencer qu'en avril 1827, faute d'un thermomètre qui pût m'inspirer une entière confiance. Celui dont j'ai fait usage est un thermomètre à chemise de verre, de Fortin, qui marche assez d'accord avec un grand thermomètre étalon du même artiste, que j'ai reçu en même temps que celui-là, et qui a été confronté par M. Mathieu, avant son départ de Paris, avec ceux de l'obse vatoire royal. Le thermomètre tout en verre est placé en dehors d'une fenêtre de mon cabinet, au second étage d'une maison faisant face au nord nord-est, de manière cependant à ne pas toucher les carreaux de vitre, et là je puis l'observer en transparent. Les observations se font d'ailleurs aux heures déjà indiquées pour les autres instrumens. Comme la rue est un peu étroite, on sent que, dans l'hiver, la température doit y être constamment moins basse que dans la campagne. Il y a même l'été, de dix heures du matin à deux heures de l'après midi, une réverbération assez forte que j'ai tâché de combattre de mon mieux, en fermant en partie les contrevents. J'ai remarqué au surplus qu'il commence à geler dans la campagne dès que mon thermomètre est descendu à 3° au-dessus de zéro.

I. *Moyennes Thermométriques.*

1827 ET 1828	7 HEURES	MIDI.	5 HEURES	10 HEURES	MOYENNES
Avril 1827.	12,48	17,12	15,91	12,82	14,58
Mai.	16,21	19,98	19,14	15,98	17,83
Juin.	20,31	23,83	23,06	19,47	21,67
Juillet.	24,98	29,01	29,08	24,83	26,98
Août.	21,24	25,84	25,53	21,46	23,52
Septembre.	17,33	22,16	20,76	18,03	19,57
Octobre.	14,31	17,72	16,88	15,03	15,98
Novembre.	6,93	11,32	9,86	8,01	9,03
Décembre.	7,98	11,54	10,30	8,52	9,58
Janvier 1828.	6,98	10,65	9,48	6,75	8,47
Février.	6,86	10,90	10,22	73,5	8,88
Mars.	8,28	13,75	12,67	9,87	11,14
Moyennes.	13,66	17,82	16,91	14,02	15,60

Ce tableau donne, comme l'on voit, la température moyenne de l'année, un peu plus faible que la température moyenne d'octobre.

II. *Tableau des Mouvemens Thermométriques.*

1827 ET 1828	MAXIMUM.	MOYENNE.	MINIMUM.	OSCILLATIONS.
Avril 1827.	21,35	14,58	9,40	11,95
Mai.	23,70	17,83	12,35	11,35
Juin.	27,70	21,67	14,85	12,85
Juillet.	31,85	26,98	20,40	11,45
Août.	31,30	23,52	15,55	15,75
Septembre.	25,35	19,57	13,80	11,55
Octobre.	20,70	15,98	7,60	13,10
Novembre.	15,70	9,03	—0,05	15,75
Décembre.	16,50	9,58	1,85	14,65
Janvier 1828.	14,70	8,47	3,15	11'55
Février.	16,50	8,88	—0,50	17,00
Mars.	21,00	11,14	1,80	19,20
Maximum.	31,85	26,98	20,40	19,20
Moyenne.	22,20	15,60	8,35	13,85
Minimum.	14,70	8,47	— 0,50	11,35
Oscillations.	17,15	18,51	20,90	7,85

Ce dernier tableau donne, pour le plus grand maximum, 31°,85
Et pour le plus petit minimum, — 0,50

Différence 32°35

De sorte que, du 1.er avril 1827 au 1.er avril 1828, le sommet de la colonne de mercure a parcouru à Montpellier, dans le tube du thermomètre, un espace de 32°,35.

PHILOSOPHIE MATHÉMATIQUE.

Note sur la propriété fondamentale du triangle rectiligne ;

Par M. B. D. C.

Dans la deuxième note de ses *Elémens de géomètrie*, M. Legendre a donné, de l'égalité de la somme des angles de tout triangle rectiligne à deux angles droits, une démonstration contre laquelle on a élevé des objections de plus d'un genre, tant en France que dans l'étranger (*). En réfléchissant sur ce sujet, il nous a paru qu'on pouvait ôter à ces objections une grande partie de leur force, en présentant cette démonstration sous la forme suivante.

Soient a, b, c trois nombres abstraits représentant les côtés d'un

(*) Voy. en particulier tom. X, pag. 161 et tom. XVI, pag. 259 du présent recueil.

J. D. G.

triangle rectiligne, mesurés avec une longueur quelconque prise pour unité; soient A, B, C trois nombres abstraits représentant les angles respectivement opposés, mesurés avec un même angle quelconque pris également pour unité; les six nombre a, b, c, A, B, C varieront avec l'unité de mesure des longueurs et avec l'unité de mesure des angles; mais les rapports $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{c}{a}$, $\frac{A}{B}$, $\frac{B}{C}$, $\frac{C}{A}$ en seront tout à fait indépendans.

Cela posé, comme un triangle est complètement déterminé par ses trois côtés, chacun des angles A, B, C doit être une fonction déterminée des trois longueurs a, b, c; en outre, cette fonction doit être de telle forme qu'elle demeure la même si, sans changer l'unité de mesure des angles, on fait varier l'unité de mesure des côtés; ce qui exige évidemment qu'elle ne se compose que des rapports des côtés entre eux; et, comme ces rapports sont toujours traduisibles en rapports de deux d'entre eux au troisième, puisque, par exemple, $\frac{a}{b}=\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}}$, nous pourrons poser

$$\left.\begin{aligned} A&=\mathrm{f}\left(\frac{a}{c},\ \frac{b}{c}\right), \\ B&=\varphi\left(\frac{a}{c},\ \frac{b}{c}\right), \\ C&=\psi\left(\frac{a}{c},\ \frac{b}{c}\right). \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Or, on peut, en premier lieu, concevoir qu'entre ces trois équations on élimine les deux rapports $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$, ce qui conduira à une équation en A, B, C seulement; *il y a* donc, *entre les trois* *angles de tout triangle rectiligne, une relation indépendante des longueurs de ses côtés;* ce qui revient encore à dire que, *si deux angles d'un triangle sont respectivement égaux à deux angles d'un autre triangle, le troisième angle sera égal de part et d'autre.* On voit enfin qu'*un triangle rectiligne n'est point déterminé par ses seuls angles*, puisque donner les trois angles revient à n'en donner que deux seulement.

Deux des trois équations (1) suffisent pour déterminer les deux rapports $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$; cela revient à dire que, *lorsque deux des angles d'un triangle rectiligne sont donnés, les rapports entre les trois côtés de ce triangle, pris tour à tour, deux à deux, sont complètement déterminés;* ce qui signifie, en d'autres termes, que *deux triangles rectilignes qui ont deux angles égaux, chacun à chacun, ont leurs côtés homologues proportionnels.*

Conservons les mêmes notations, mais supposons qu'il soit question d'un triangle sphérique, alors le triangle ne sera pas déterminé par ses trois côtés; car si, sur deux sphères inégales, on construit deux triangles sphériques dont les côtés soient égaux chacun à chacun, ces triangles ne seront point égaux. Afin donc qu'un triangle sphérique soit complètement déterminé, il ne suffit pas de donner les longueurs a, b, c de ses trois côtés, il faut donner en outre la longueur r du rayon de la sphère à laquelle il appartient, longueur que nous supposerons d'ailleurs rapportée à la même unité linéaire.

Chacun des trois angles A, B, C du triangle devra donc être une fonction déterminée de ces quatre longueurs; de plus, cette fonction devra être de telle forme qu'elle demeure la même si, sans changer l'unité de mesure des angles, on fait varier l'unité de mesure des longueurs; ce qui exige évidemment que ces fonctions ne renferment que les rapports entre ces quatre longueurs prises deux à deux, ou, ce qui revient au même, les rapports de l'une d'elles aux trois autres; on devra donc avoir

$$\left.\begin{array}{l} A=\mathrm{f}\left(\frac{a}{r}\,,\ \frac{b}{r}\,,\ \frac{c}{r}\right), \\[2ex] B=\varphi\left(\frac{a}{r}\,,\ \frac{b}{r}\,,\ \frac{c}{r}\right), \\[2ex] C=\psi\left(\frac{a}{r}\,,\ \frac{b}{r}\,,\ \frac{c}{r}\right), \end{array}\right\} \quad (2)$$

équations en nombre insuffisant pour éliminer les trois rapports $\frac{a}{r}$, $\frac{b}{r}$, $\frac{c}{r}$, mais qui en donneront les valeurs en fonction de A, B, C et donneront conséquemment les longueurs des côtés, lorsque le rayon de la sphère sera connu. Ainsi, *dans un triangle sphérique*, *il n'existe point de relation entre les angles*, *indépendante des côtés*, et *un tel triangle est tout aussi complètement déterminé par ses trois angles que par ses trois côtés.*

Retournons présentement au triangle rectiligne ; il est deux autres cas où un tel triangle est complètement déterminé par trois de ses parties, savoir :

1.° Lorsqu'on donne deux angles et le côté compris ;

2.° Lorsqu'on donne deux côtés et l'angle compris ; et ces deux cas ont cela de remarquable qu'ils se traduisent l'un dans l'autre par la simple permutation des mots *angle* et *côté* entre eux. M. Legendre étant parti du premier, comme principe, pour établir qu'il existe entre les angles de tout triangle une relation indépendante de ses côtés, on a conclu, de la relation entre les deux cas, qu'en admettant le second à son tour comme principe, et permutant simplement entre eux les mots *angle* et *côté*, dans la démonstration de M. Legendre, on établirait, par un raisonnement tout aussi rigoureux que le sien, qu'il existe, entre les trois côtés de tout triangle, une relation indépendante de ses angles ; conclusion absurde qui infirme complètement la validité du raisonnement qui y conduit, et semble devoir infirmer également le raisonnement de M. Legendre qui paraît n'en différer aucunement.

Mais on doit remarquer qu'il n'en est ainsi qu'autant qu'on fait abstraction de tout principe subsidiaire de nature à rompre l'apparente analogie entre les deux cas ; et voilà précisément pourquoi nous n'avons pas cru devoir débuter comme l'a fait M. Legendre. Mais présentement que nous avons déjà démontré qu'il existe, entre les trois angles de tout triangle, une relation indépendante de ses côtés ; comme il est d'ailleurs manifeste, *à priori*, qu'il ne saurait exister, au contraire, entre les trois côtés une relation indépendante des angles, attendu que deux côtés d'un triangle étant donnés, on peut prendre le troisième d'une infinité de manières différentes, toute parité qu'on prétendrait établir entre les deux cas s'évanouit ainsi complètement.

Considérons en effet les deux équations

$$c=\varphi(a,b,C)\ , \qquad C=\psi(A,B,c)\ ;$$

on n'est nullement fondé à dire que C ne saurait figurer dans le second membre de la première, car, à cause de la relation que l'on sait exister entre les trois angles de tout triangle, on conçoit la possibilité de remplacer C dans ce second membre par une fonction équivalente de A et B, qui pourrait fort bien alors n'y figurer que par leur rapport, de sorte qu'on aurait ainsi

$$c=\varphi\left(a,b,\frac{A}{B}\right),$$

équation qui n'offre plus rien d'absurde (*).

(*) Il nous paraît que, pour qu'on pût remplacer C par une fonction équivalente du rapport $\frac{A}{B}$, il faudrait que l'équation de relation entre les trois angles de tout triangle fût réductible à cette forme

Au contraire, comme il n'existe aucune relation obligée entre les trois côtés d'un triangle, on n'a pas la même ressource pour sauver l'absurdité de la seconde équation, aussi long-temps qu'on laissera subsister c dans son second membre ; cette longueur ne saurait donc y entrer, et l'on doit avoir simplement

$$C=\psi(A,B) ;$$

ce qui rentre complètement dans ce que nous avons démontré dès le début.

Au surplus, quand bien même tous les géomètres s'accorderaient à regarder comme tout à fait rigoureuse, soit la démonstration de M. Legendre, soit celle que nous venons de tenter de lui substituer, soit enfin tout autre démonstration d'une forme analogue, on ne saurait se dissimuler que ces sortes de démonstrations seraient tout à fait déplacées dans le texte d'un traité élémentaire de géométrie, à raison de leur peu d'analogie avec le ton général de ces sortes d'ouvrages, pour lesquels conséquemment il resterait toujours à désirer quelque équivalent.

$$C=\mathrm{F}\left(\frac{A}{B}\right) ;$$

or, à moins qu'on admette, avec plusieurs géomètres, que tout angle est un nombre abstrait, cette équation nous paraît inadmissible, puisqu'en variant l'unité de mesure des angles, son premier membre varie, tandis que le second ne change pas de valeur. On trouvera, au surplus, dans l'article du tom. X, déjà cité, de plus amples réflexions sur ce sujet.

J. D. G.

GÉOMÉTRIE DE SITUATION.

Additions et corrections au mémoire sur les propriétés des systèmes de coniques, inséré à la pag. 277 du précédent volume ;

Par M. Chasles, ancien élève de l'Ecole polytechnique.

Les circonstances dans lesquelles nous avons écrit le mémoire inséré à la pag. 277 du précédent volume ne nous ayant pas laissé toute la liberté d'esprit que nous aurions désiré, il en est résulté diverses sortes d'omissions plus ou moins graves et quelques inexactitudes de rédaction. Nous destinons cette note à les signaler, ainsi que quelques incorrections qui se sont glissées dans l'impression.

47. Nous avons dit (20) : M. Poncelet a discuté très-clairement l'existence des centres d'homologie et des *axes de symptose ;* il faut lire : *cordes communes réelles ou idéales* au lieu de : *axes de symptose*, parce qu'il a y une distinction à faire entre les six cordes communes à deux coniques qui se coupent en quatre points ; il est possible, en effet, qu'elles ne soient pas toutes des axes de symptose. C'est ce que nous allons faire voir, en reprenant la discussion des axes de symptose et des centres d'homologie de deux coniques ; et en examinant un cas qui n'est pas énoncé dans l'art. 20 : celui où les deux coniques se coupent en quatre points, sans avoir de tangentes communes. Cela nous justifiera pleinement d'avoir eu

recours à une expression nouvelle : celle d'*axe de symptose*, en prouvant qu'elle était indispensable.

48. Les théorèmes (17) ou (19) constituent la propriété fondamentale des axes de symptose et des centres d'homologie de deux coniques situées dans un même plan.

D'après les théorèmes de la première colonne on voit que, pour que le point de concours de deux tangentes communes à deux coniques soit un de leurs centres d'homologie, il faut que toute droite qui, menée par ce point, rencontre l'une des coniques, rencontre également l'autre. Cette condition exige que les deux coniques soient dans un même angle de ces deux tangentes, ou partie dans un angle et partie dans son opposé au sommet.

Cela fait voir que, *quand deux coniques sont extérieures l'une à l'autre, elles n'ont que deux centres d'homologie, et, par suite, deux axes de symptose, bien qu'il y ait six points de concours de leurs quatre tangentes communes.*

Pour quatre de ces points de concours, une droite menée par l'un d'eux ne pourrait à la fois rencontrer les deux coniques ; la construction des théorèmes (17) et (19) (1.re colonne), n'aurait donc plus lieu ; ces quatre points, par conséquent, ne sont pas des centres d'homologie.

La méthode, par laquelle nous avons déduit les propriétés de deux coniques quelconques de celles de deux coniques homothétiques, confirme (ainsi que le fait voir l'art. 14) la distinction que nous venons d'établir entre les six points de concours des quatre tangentes communes à deux coniques extérieures l'une à l'autre.

50. Quand les deux coniques ont quatre tangentes communes et se coupent en quatre points, chacun des six points de concours, deux à deux de leurs quatre tangentes communes, est un centre d'homologie, parce qu'une droite menée par chacun de ces points peut à la fois rencontrer les deux courbes ; de sorte que la construction des numéros 17 et 19 (1.re colonne) est toujours possible.

Cela est évident pour deux ellipses qui se coupent en quatre points, parce que deux quelconques de leurs quatre tangentes communes comprennent toujours ces deux courbes dans un même angle.

Mais deux coniques quelconques qui se coupent en quatre points et qui ont quatre tangentes communes peuvent être considérées comme les polaires réciproques de deux ellipses; car il suffit de prendre, pour centre de la conique directrice, un point compris dans les deux coniques. Or, ces deux ellipses se couperont en quatre points et auront quatre tangentes communes; elles auront donc six centres d'homologie et six axes de symptose; et par suite les deux coniques proposées auront également six axes de symptose et six centres d'homologie.

Donc, *deux coniques quelconques qui se coupent en quatre points et ont quatre tangentes communes, ont toujours six centres d'homologie et six axes de symptose.*

51. Considérons maintenant deux coniques se coupant en quatre points et n'ayant aucune tangente commune; leurs polaires réciproques auront quatre tangentes communes et seront extérieures l'une à l'autre; elles n'auront donc (48) que deux axes de symptose et deux centres d'homologie; d'où il suit que les deux coniques proposées n'auront aussi que deux centres d'homologie et deux axes de symptose, bien qu'elles aient six cordes communes.

Donc, *deux coniques qui se coupent en quatre points et n'ont pas de tangentes communes, n'ont que deux axes de symptose et deux centres d'homologie.*

L'une de ces deux coniques sera toujours une hyperbole; car nous venons de voir qu'elles sont les polaires réciproques de deux coniques extérieures l'une à l'autre; le centre de la conique directrice sera toujours au-dehors d'une au moins de ces deux courbes; l'autre conique pourra être indistinctement une hyperbole, une ellipse ou une parabole.

Il est facile de distinguer celles des six cordes communes aux deux coniques qui seront les axes de symptose; ce sont celles qui auront des points au-dehors de deux coniques ; les quatre autres seront entièrement comprises dans ces courbes.

Si, par exemple, on a une hyperbole et une ellipse qui la rencontrent en quatre points dont deux sur une branche et deux sur l'autre, les axes de symptose seront les deux cordes qui joindront les points d'une même branche, parce que les prolongemens de ces cordes seront au-dehors des deux coniques. Chacune des quatre autres cordes, au contraire, joindra un point d'une branche à un point de l'autre branche, et aura tous ses points compris dans l'une ou dans l'autre courbe.

On voit clairement que les deux coniques n'ont aucune tangente commune ; car toute tangente à l'hyperbole passe entre ses deux branches et rencontre par conséquent l'ellipse qui est aussi comprise entre les deux branches, puisqu'elle les rencontre l'une et l'autre.

53. La distinction que nous venons d'établir entre les six cordes communes aux deux coniques, correspond à celle que nous avons faite (49) entre les six points de concours des quatre tangentes communes à deux coniques extérieures l'une à l'autre.

Elle est également une conséquence des deux théorèmes (17) et (19) (2.me colonne), d'après lesquels il faut, pour qu'une corde commune à deux coniques soit un axe de symptose, qu'on puisse mener, par des points de sa direction, des tangentes à l'une et à l'autre courbe.

54. *Quand deux coniques ne se coupent qu'en deux points, elles n'ont qu'un système de deux axes de symptose.*

Car, si elles avaient deux autres axes de symptose, ils passeraient par les deux points d'intersection des deux coniques et les couperaient en deux autres points ; les deux coniques auraient donc quatre points communs, ce qui est contre l'hypothèse.

55. *Quand deux coniques n'ont ni points communs ni tangentes communes, elles ont un système d'axes de symptose et n'en ont qu'un seul.*

Nous avons déjà dit (20) que les deux coniques ont toujours un système de deux axes de symptose, parce qu'il en existe généralement trois dont la recherche donne lieu à une équation du troisième degré qui doit avoir au moins une racine réelle.

Dans le cas énoncé où deux coniques n'ont aucun point commun, il ne saurait exister un deuxième système de deux axes de symptose; car ces deux axes couperaient les deux premiers en quatre points réels qui appartiendraient à la fois aux deux coniques, ce qui est contre l'hypothèse.

56. Nous venons de passer en revue les différens cas que peut offrir le système de deux coniques, et notre discussion nous a conduit au résumé que voici :

Deux coniques situées dans un même plan ont six axes de symptose et six centres d'homologie quand elles se coupent en quatre points et qu'elles ont quatre tangentes communes.

Dans tous les autres cas, même dans celui où elles se coupent en quatre points, sans avoir de tangentes communes, elles n'ont que deux axes de symptose et deux centres d'homologie.

57. La discussion précédente fait voir qu'il était indispensable de donner un nom particulier à celles des cordes communes à deux coniques que nous avons appelées *axes de symptose*, et que la dénomination simple de *cordes communes* est insuffisante, puisqu'il peut arriver que, six cordes étant réelles, il n'y en ait pourtant que deux qui jouissent des propriétés qui constituent les axes de symptose.

C'est par une raison toute semblable que l'on n'aurait pu désigner simplement les centres d'homologie comme *les points de concours des tangentes communes* aux deux coniques, puisqu'il peut arriver que deux seulement de ces six points jouissent des propriétés qui constituent les centres d'homologie.

58. Malgré la différence qui peut exister (51) entre les six cordes communes à deux coniques, il est une propriété générale qui leur appartient à toutes indistinctement, et que nous n'avons démontrée que pour les axes de symptose; elle consiste en ce que *les polaires*

d'un point quelconque d'une corde commune à deux coniques, prises par rapport à ces deux courbes, se coupent sur la corde même.

Cela résulte de la troisième partie du théorème de l'art. 39 (2.me colonne), parce que deux cordes communes peuvent être regardées comme une conique qui passe par les quatre points d'intersection des deux proposées.

59. Pareillement, les six points de concours des quatre tangentes communes à deux coniques, jouissent tous d'une propriété générale que nous avons démontrée (21) pour les centres d'homologie; elle consiste en ce que *toute droite menée par un quelconque des six points de concours des quatre tangentes communes à deux coniques a ses pôles, relatifs aux deux courbes, en ligne droite avec ce point de concours.*

Ce théorème se déduit du précédent par la théorie des polaires réciproques.

60. Les axes de symptose et les centres d'homologie jouissent de propriétés plus générales que celles énoncées par les théorèmes (17) et (19); nous les donnerons après avoir exposé les propriétés analogues des coniques homothétiques.

61. Les deux triangles dont il est question à l'art. 30 (pag. 290) n'en font évidemment qu'un seul; car on sait, d'après les élémens de la théorie des transversales, que, quand un quadrilatère est inscrit dans deux coniques, le point de concours de deux côtés opposés est, par rapport à l'une et à l'autre courbes, le pôle de la droite qui joint le point de concours des deux autres côtés au point de concours des deux diagonales.

Nous reviendrons sur cette question qui fait partie essentielle des propriétés du système de deux coniques, mais que nous avons dû ajourner jusqu'à ce que nous ayons fait connaître certaines propriétés des coniques homothétiques, parce que la considération des axes de symptose est insuffisante pour la traiter complètement. Car il existe en général trois points dont chacun a pour polaire, par rapport à deux coniques données, la droite qui joint les deux autres, et ces trois points peuvent être réels, bien que les deux coniques n'aient qu'un seul système d'axes de symptose.

Nous verrons, en effet, que *ces trois points sont réels toutes les fois que les deux coniques se coupent en quatre points ou ne se coupent pas du tout, et que deux sont imaginaires et le troisième toujours réel, quand les deux coniques ne se coupent qu'en deux points.*

Nous verrons aussi que deux des trois points en question, divisent harmoniquement les segmens formés sur la droite qui les joint 1.° par les deux axes de symptose qui passent par le troisième point; 2.° par les deux centres d'homologie qui leur correspondent; 3.° par chacune des deux coniques proposées; et, en général, par toute conique qui passerait par les quatre points d'intersection réels ou imaginaires de ces deux courbes (*).

GÉOMÉTRIE DE SITUATION.

Note sur une inadvertance grave, commise à la pag. 336 du précédent volume;

Par M. GERGONNE.

Soit qu'on assujettisse une courbe plane à passer par un point donné ou qu'on exige qu'elle touche une droite donnée, il n'en résulte jamais qu'une condition unique, propre seulement à déterminer un des coefficiens de son équation; et si l'on assujettit à la

(*) Les corrections moins importantes sont indiquées dans l'errata du précédent volume.

J. D. G.

fois cette courbe à passer par un point donné et à toucher une droite donnée, cela ne devra compter que pour deux conditions seulement, propres à déterminer deux des coefficiens de son équation; il importe peu d'ailleurs que le point donné soit hors de la droite donnée ou qu'il soit situé sur cette droite.

Si, en effet, dans le dernier cas, (a,b) est le point donné, l'équation de la droite donnée sera de la forme

$$y-b=m(x-a)\ ;$$

il faudra d'abord exprimer que le point (a,b) satisfait à l'équation de la courbe, ce qui donnera une première équation de condition; il faudra ensuite exprimer que la tangente à la courbe en ce point, dont l'équation sera de la forme

$$y-b=M(x-a)\ ,$$

coïncide avec la droite donnée, ce qui donnera, pour seconde équation de condition, $M=m$.

On voit, en particulier, que, si deux triangles sont inscrit et circonscrit l'un à l'autre, assujettir une courbe à être à la fois circonscrite à l'un et inscrite à l'autre, c'est l'assujettir à six conditions distinctes; si donc il s'agit d'une ligne du second ordre, dont la détermination n'exige, comme l'on sait, que cinq conditions seulement, le problème sera plus que déterminé; il ne sera donc possible que sous certaine condition; aussi a-t-on vu (tom. XVIII, pag. 323) qu'il fallait pour cela que les points de concours des directions des côtés opposés dans les deux triangles, appartinssent tous trois à une même droite. On a vu aussi qu'il fallait que les droites, qui joignaient les sommets opposés des deux triangles, concourussent toutes trois en un même point; mais ce n'est point là une seconde condition, car on a vu (tom. XVI, pag. 219) que ces deux conditions se comportent réciproquement.

Soit qu'on assujettisse une surface courbe à passer par un point donné ou qu'on exige qu'elle touche un plan donné, il n'en résulte jamais qu'une condition unique, propre seulement à déterminer un des coefficiens de son équation. Si on l'assujettit à la fois à passer par un point donné et à toucher un plan donné, il y aura à faire une distinction qui n'a pas lieu dans la géométrie plane. Ou bien le point donné sera situé hors du plan donné, auquel cas cela ne devra compter que pour deux conditions propres seulement à déterminer deux des coefficiens de l'équation de cette surface, ou bien le point donné sera situé dans le plan donné, et alors les deux conditions devront compter pour trois, propres à déterminer un nombre égal de coefficiens.

Si, en effet, dans le dernier cas (a,b,c) est le point donné, l'équation du plan donné sera de la forme

$$z-c=p(x-a)+q(y-b)\ ;$$

il faudra d'abord exprimer que le point (a,b,c) satisfait à l'équation de la surface proposée, ce qui donnera une première équation de condition ; il faudra ensuite exprimer que le plan tangent à la surface en ce point, dont l'équation sera de la forme

$$z-c=P(x-a)+Q(y-b)\ ,$$

coïncide avec le plan donné, ce qui donnera les deux autres équations de condition $P=p$, $Q=q$.

On voit, en particulier, que, si deux tétraèdres sont inscrit et circonscrit l'un à l'autre, assujettir une surface courbe à être à la fois circonscrite à l'un et inscrite à l'autre, c'est l'assujettir à *douze* conditions distinctes, et non pas à *huit*, comme nous l'avions dit par une inadvertance tout à fait impardonnable, et justement relevée par M. Bobillier dans la note de la page 336 du précédent volume ; note qui, conséquemment, doit être réputée non avenue. Si donc la surface est du second ordre seulement, comme *neuf* conditions suffisent pour déterminer une telle surface, le problème sera plus que déterminé et ne sera possible que sous certaines conditions ; aussi MM. Steiner et Bobillier ont-ils reconnu l'un et l'autre qu'alors les droites, suivant lesquelles se coupent les plans des faces opposées des deux tétraèdres, doivent appartenir toutes quatre à une même surface gauche du second ordre, et que les droites qui joignent les sommets opposés de ces tétraèdres doivent aussi appartenir à une même surface gauche de cet ordre (*).

Mais voilà qu'après avoir accusé ces deux élégans théorèmes de pécher par excès, nous sommes présentement obligés de les accuser de pécher par défaut, c'est-à-dire, d'être incomplets. En admettant, en effet, qu'ils ne se comportent pas l'un et l'autre, comme leurs analogues, dans la géométrie plane, ce qui est tout au moins très-douteux, ils ne constitueraient encore que *deux* conditions distinctes, tandis qu'ici le nombre des conditions imposées excède de *trois* unités le nombre de celles qui sont nécessaires pour la détermination complète de la surface dont il s'agit. Voilà donc un sujet de recherche dont le défaut de loisir ne nous permet malheureusement pas de nous occuper dans ce moment, mais auquel les deux estimables géomètres, auteurs de l'un et de l'autre théorèmes, voudront peut-être bien donner quelque attention.

(*) Au moment où nous corrigeons l'épreuve de cette feuille, nous recevons une lettre de M. Chasles qui signale également l'inconcevable erreur dont nous faisons ici l'humble aveu.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problème de situation ;

Par M. J. STEINER, de Berlin.

LE nombre des faces d'un polyèdre étant donné, on peut demander de quelle nature peuvent être ces faces. On trouve, pour les cas les plus simples, les résultats que voici :

		Nombre des cas.	Nombre des Faces.		
			Triangul.	Quadrang.	Pentag.
Corps. . . .	Tétraèdre.	1	4	»	»
	Pentaèdres.	1	4	1	»
		2	2	3	»
	Hexaèdre.	1	6	»	»
		2	5	»	1
		3	4	2	»
		4	3	2	1
		5	2	4	»
		6	2	2	2
		7	»	6	»

Quelle est la loi générale ?

GÉOMÉTRIE PURE.

Développement d'une série de théorèmes relatifs aux sections coniques ;

Par M. J. Steiner.

1.

Si, de l'un quelconque P des points du plan d'un triangle ABC (fig. 1), on abaisse, sur les directions de ses côtés BC, CA, AB, respectivement, les perpendiculaires PA′, PB′, PC′, et qu'on joigne le même point à ses sommets par des droites, on aura

$$\overline{BA'}^2-\overline{CA'}^2=\overline{BP}^2-\overline{CP}^2\ ,$$

$$\overline{CB'}^2-\overline{AB'}^2=\overline{CP}^2-\overline{AP}^2\ ,$$

$$\overline{AC'}^2-\overline{BC'}^2=\overline{AP}^2-\overline{BP}^2\ ;$$

d'où, en ajoutant, réduisant et transposant,

$$\overline{AB'}^2+\overline{BC'}^2+\overline{CA'}^2=\overline{BA'}^2+\overline{CB'}^2+\overline{AC'}^2\ ;\qquad (*)$$

(*) Pour un triangle sphérique, on aurait

$$\mathit{Cos}.AB'.\mathit{Cos}.BC'.\mathit{Cos}.CA'=\mathit{Cos}.BA'.\mathit{Cos}.CB'.\mathit{Cos}.AC'\ ;$$

d'où on déduirait des conséquences analogues.

telle est donc la condition nécessaire et suffisante pour que des perpendiculaires élevées aux trois côtés BC, CA, AB d'un triangle ABC, par des points A′, B′, C′ de leurs directions respectives, concourent toutes trois en un même point P.

Il en résulte immédiatement 1.° que les perpendiculaires élevées aux côtés d'un triangle, par leurs milieux, concourent toutes trois en un même point; 2.° que les perpendiculaires abaissées sur les directions de ces mêmes côtés, des sommets respectivement opposés, concourent aussi toutes trois en un même point.

2.

Par les pieds A′, B′, C′ des trois perpendiculaires, concevons un cercle dont O soit le centre, lequel coupera de nouveau les mêmes côtés du triangle aux points A″, B″, C″. Par les points P et O soit conduite une droite, et soit prolongée cette droite au-delà du point O d'une quantité OP′=OP. Parce que les perpendiculaires qu'on abaisserait du point O sur les directions des trois côtés du triangle tomberaient sur les milieux des cordes interceptées A′A″, B′B″, C′C″; il s'ensuit que les perpendiculaires élevées à ces mêmes côtés, par les points A″, B″, C″, doivent concourir toutes trois au point P′. On a donc ce théorème:

« Si, de l'un quelconque P des points du plan d'un triangle
» ABC, on abaisse, sur les directions respectives des côtés BC,
» CA, AB de ce triangle, les perpendiculaires PA′, PB′, PC′, et
» si, par les pieds A′, B′, C′ de ces perpendiculaires, on fait
» passer une circonférence dont O soit le centre et qui coupe
» de nouveau les directions de ces mêmes côtés en A″, B″, C″,
» les perpendiculaires élevées respectivement à ces mêmes côtés, par
» ces trois derniers points, se couperont toutes trois en un même
» point P′ tel que le point O sera le milieu de la droite PP′ ».

3.

Soient menées les droites $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ ainsi que $B''C''$. Les angles $AB'C'$ et $AC''B''$ qui ayant leurs sommets à la circonférence s'appuient sur le même arc $B''C'$, sont égaux; mais à cause des quadrilatères $B'PC'A$, $C''P'B''A$ inscriptibles au cercle, ces angles sont respectivement égaux aux angles APC', $AP'B''$; donc ces derniers sont aussi égaux entre eux. D'un autre côté, les angles $B'PC'$, $B''P'C''$, supplémens d'un même angle A, sont égaux entre eux; donc, par soustraction, les angles APB' et $AB'C''$ sont aussi égaux; et il en doit être de même de leurs complémens PAB' et $P'AC''$; mais à cause du quadrilatère inscriptible au cercle, à PAB' on peut substituer son égal $PC'B'$; donc ce dernier est égal à $P'AC''$; puis donc que les côtés $C'P$ et AC'' de ces deux angles sont perpendiculaires l'un à l'autre, leurs côtés $C'B'$ et AP' seront aussi perpendiculaires l'un à l'autre; et il devra en être de même des droites $C'A'$, $A'B'$, comparées respectivement aux droites $P'B$, $P'C$.

Soit a le milieu de la corde $B'C'$, la droite Oa devra être perpendiculaire à $B'C'$, et, par suite, parallèle à $P'A$. Pour les mêmes raisons si b et c sont les milieux respectifs de $C'A'$ et $A'B'$, les droites Ob et Oc seront respectivement perpendiculaires à celles-là.

On a donc ce théorème :

« Si, de l'un quelconque P des points du plan d'un triangle ABC, » on abaisse, sur les directions de ses côtés BA, CA, AB, les per- » pendiculaires PA', PB', PC', et si, des sommets du triangle, » on abaisse, respectivement sur les directions des côtés $B'C'$, $C'A'$, » $A'B'$ du triangle $A'B'C'$, d'autres perpendiculaires, ces trois der- » nières concourront en un même point P' (*). En outre, si l'on

(*) Ce théorème n'est qu'un cas particulier d'un autre que nous avons proposé de démontrer, sous le n.° 54, dans le II.e volume du *Journal* de M. Crelle (pag. 287) où on trouvera aussi ses analogues, sous les n.os 55 et 56.

» abaisse de ce dernier point, sur les directions des mêmes côtés
» du triangle ABC, des perpendiculaires P′A″, P′B″, P′C″, les six
» points A′, B′, C′, A″, B″, C″ appartiendront à une même cir-
» conférence ayant son centre O au milieu de la droite PP′ ».

De là on déduira facilement la solution de ce problème :

« Des droites PA, PB, PC étant menées de l'un quelconque P
» des points du plan d'un triangle ABC à ses trois sommets ; ins-
» crire à ce triangle un autre triangle A′B′C′, dont les trois cô-
» tés B′C′, C′A′, A′B′ soient respectivement perpendiculaires à ces
» droites ? »

4.

Nous venons de faire voir que les angles PAC et P′AB sont égaux ; or, comme les circonstances sont les mêmes relativement aux trois sommets du triangle ABC, on doit avoir

$$\text{Ang.}PAC=\text{Ang.}P'AB\ ,$$

$$\text{Ang.}PBA=\text{Ang}\ P'BC\ ,$$

$$\text{Ang.}PCB=\text{Ang}\ P'CA\ ;$$

d'où résulte ce théorème :

« Par l'un quelconque P, des points du plan d'un triangle ABC,
» soient menées à ses sommets des droites PA, PB, PC ; si, par
» les mêmes sommets, on mène trois nouvelles droites faisant
» respectivement, avec les côtés AB, BC, CA, des angles égaux aux
» angles PAC, PBA, PCB, ces trois dernières droites concourront
» en un même point P′ ; et si, des points P, P′ on abaisse sur
» les directions des côtés BC, CA, BA du triangle les perpendicu-
» laires PA′, PB′, PC′ P′A″, P′B″, P′C″, leurs pieds A′, B′,
» C′, A″, B″, C″ appartiendront tous six à une même circon-
» férence ayant son centre O au milieu de la droite PP′ ».

5.

Soit prolongée la perpendiculaire PA', au-delà de A', d'une quantité $A'Q=A'P$, et soient menées QP', coupant BC en M, OA', qui sera parallèle à $P'Q$ et d'une longueur moitié moindre, et enfin PM; d'après cette construction on aura $MP=MQ$, et, par suite, $MP+MP'=P'Q=2OA'$; en outre les angles $P'MB$, PMA, tous deux égaux à l'angle QMC, seront conséquemment égaux entre eux. Il résulte de tout cela que les points P, P' sont les deux foyers d'une ellipse tangente en M au côté BC, laquelle a son centre en O et son grand axe égal au diamètre du cercle dont le point O est le centre; d'où il résulte qu'elle touche ce cercle aux deux extrémités de son grand axe; et, comme ce que nous venons de prouver, relativement au côté BC du triangle, se prouverait également des deux autres, on a le théorème suivant:

« 1.° Chacun des points de l'intérieur d'un triangle peut être con-
» sidéré comme l'un des foyers d'une ellipse inscrite à ce trian-
» gle;

» 2.° Les pieds des perpendiculaires abaissées des deux foyers
» d'une ellipse sur ses tangentes sont tous situés sur une même
» circonférence, ayant le grand axe de cette ellipse pour diamètre;

» 3.° Un angle étant arbitrairement circonscrit à une ellipse,
» les droites menées de ses deux foyers au sommet de cet angle
» font des angles respectivement égaux avec ses deux côtés ».

En conséquence de cette dernière propriété et de l'égalité des angles $B'PC'$, $B''P'C''$, les triangles rectangles $P'C''A$, $P'B''A$ sont respectivement semblables aux triangles rectangles $PB'A$, $PC'A$, ce qui donne

$$P'B'':PC'::AP':AP\,,$$

$$PB':P'C''::AP:AP'\,,$$

et, par suite,

$$PB'.P'B''=P'C'' ,$$

c'est-à-dire ,

« 4.° Le rectangle des perpendiculaires abaissées des deux foyers » d'une ellipse sur une quelconque de ses tangentes est constant , » et conséquemment égal au carré du demi-petit axe de l'ellipse ».

6.

Entre divers cas particuliers nous signalerons seulement le suivant :

Supposons que le point P (fig. 2) soit le centre du cercle circonscrit au triangle ABC ; les pieds A′, B′, C′ des perpendiculaires PA′, PB′, PC′, abaissées de ce point sur les directions des côtés BC, CA, AB, en seront respectivement les milieux ; et, par conséquent, les droites B′C′, C′A′, A′B′ seront respectivement parallèles aux côtés BC, CA, AB ; et comme, par exemple, la droite AP′ est (3) perpendiculaire à B′C′, elle sera aussi perpendiculaire à BC, et, par conséquent, le point P′ sera le point de concours des perpendiculaires abaissées des sommets du triangle ABC sur les directions des côtés respectivement opposés. On a donc ce théorème :

« Les milieux A′, B′, C′ des côtés d'un triangle ABC, et les pieds » A″, B″, C″ des perpendiculaires abaissées de ses sommets sur les » directions de ces mêmes côtés, sont six points situés sur la circonférence d'un même cercle dont le centre O est au milieu » de la droite PP′ qui joint le centre P du cercle circonscrit au » triangle ABC avec le point P′ de concours des perpendiculaires » abaissées de ses sommets sur les directions des côtés opposés. Ces » deux points P, P′ sont les foyers d'une ellipse inscrite au triangle ABC, laquelle est concentrique avec le cercle circonscrit au » triangle A′B′C′ et a son grand axe égal au diamètre de ce cer-

» cle, ou, ce qui revient au même (puisque les côtés du trian-
» gle $A'B'C'$ sont moitié de ceux du triangle ABC), égal au rayon
» du cercle circonscrit au triangle ABC. En outre, les trois rayons
» PA, PB, PC seront respectivement perpendiculaires aux côtés
» $B''C''$, $C''A''$, $A''B''$ du triangle $A''B''C''$; enfin ces rayons se-
» ront tellement dirigés que les angles PAB, PBC, PCA, sont respectivement égaux aux angles $A''AC$, $P''AB$, $B''BA$, $C''CB$ ».

Sur la droite PP' il existe un quatrième point G (*Carnot*), intersection des droites AA', BB', CC' qui joignent les sommets du triangle ABC aux milieux des côtés respectivement opposés, et les quatre points P, G, O, P' sont situés harmoniquement, c'est-à-dire, de telle sorte qu'on a $GO:GP::P'O:P'P$, ce qui revient à $1:2::3:6$. En outre, les points P', G sont les centres de similitude des deux cercles qui ont leurs centres en O et P; donc le cercle qui a son centre en O passe par les milieux des droites $P'A$, $P'B$, $P'C$; et les points A'', B'', C'', sont les milieux respectifs des droites $P'A'''$, $P'B'''$, $P'C'''$, prolongemens des droites $P'A''$, $P'B''$, $P'C''$, jusqu'à la rencontre de la circonférence qui a son centre en P (*).

Le cercle qui a son centre en O jouit, en particulier, de cette propriété bien digne de remarque: « il touche chacun des qua-

---

(*) De là, en particulier, on conclura facilement ce théorème:

« Si, sur la circonférence du cercle qui a son centre en P, on prend ar-
» bitrairement quatre points A, B, C, D; ces quatre points seront, trois
» à trois, les sommets de quatre triangles inscrits auxquels correspondront
» quatre points P', quatre points O et quatre points G. Or, les quatre
» points de chaque sorte appartiendront à une même circonférence dont
» le rayon sera, pour les quatre points P', égal à celui du cercle donné;
» moitié de ce rayon, pour les quatre points O, et son tiers seulement pour
» les quatre points G. En outre, les centres de ces trois nouveaux cercles
» seront, avec le point P harmoniquement situés sur une même droite,
» comme le sont les quatre points P', O, G, P; de sorte que le centre P
» sera le centre de similitude commun de ces trois nouveaux cercles ».

» tre cercles inscrits et ex-inscrits au triangle ABC ; c'est-à-dire, » chacun des quatre cercles qui peuvent toucher à la fois les trois » côtés de ce triangle ».

7.

Comme les propriétés de l'ellipse démontrées ci-dessus (5) ont lieu d'une manière analogue pour toutes les autres coniques, ce qui se prouve par de semblables considérations, on peut établir ce théorème plus général :

« Chaque point pris à volonté dans le plan d'un triangle donné, » est le foyer d'une conique inscrite ou ex-inscrite à ce triangle ; » conique de laquelle on peut, par une construction facile, dé- » terminer l'autre foyer, le centre et le premier axe ».

Proposons-nous d'abord de découvrir quelle relation il peut y avoir entre la nature de la conique et la situation, par rapport au triangle, du point pris arbitrairement pour foyer.

8.

Soit ABC (fig. 3) le triangle donné, et soit P un point pris arbitrairement sur son plan pour foyer d'une conique touchant à la fois les trois côtés de ce triangle.

De ce point P soient menées les droites PA, PB aux deux sommets A, B de ce triangle. Pour déterminer l'autre foyer P′ de la courbe, il faudra (5) conduire par les points A, B deux droites AP′, BP′ formant, respectivement avec CA, CB ou leurs prolongemens, des angles égaux à PAB, PBA ; et le point P′ de concours de ces deux droites sera le second foyer cherché. Afin donc que la courbe soit une parabole, il faudra que ce second foyer soit infiniment distant du premier, ou, ce qui revient au même, il faudra que les deux droites AP′, BP′ soient parallèles ; et réciproquement, toutes les fois que ces deux droites seront parallèles, la courbe sera une parabole.

Si alors on conçoit par le sommet C une parallèle à ces deux droites, cette parallèle divisera l'angle ACB en deux parties respectivement égales aux angles que forment AP et BP avec les prolongemens de CA et CB ; donc la somme de ces deux derniers angles, est égale à l'angle C ; donc aussi la somme des deux angles PAB et PBA, respectivement égaux à ces deux-là, doit aussi être égale à l'angle ACB ; mais l'angle APB est supplément de la somme des deux angles PAB et PBA, donc il doit être aussi supplément de l'angle ACB ; d'où il suit que les quatre points A, B, C, P appartiennent à une même circonférence ; on a donc ce théorème :

« Toutes les paraboles, touchant à la fois les trois côtés d'un » même triangle, ont leurs foyers sur la circonférence du cercle » circonscrit, et, réciproquement, tout point de la circonférence du » cercle circonscrit à un triangle est le foyer d'une parabole tou- » chée à la fois par les trois côtés de ce triangle ».

D'après ce qui a été démontré ci-dessus (5, 2°), les pieds des perpendiculaires abaissées du foyer d'une parabole sur ses tangentes sont tous situés sur la tangente au sommet de la courbe, et conséquemment en ligne droite ; en combinant donc cette proposition avec celle qui vient d'être démontrée, on parviendra à ce théorème connu (*) :

« Les pieds des perpendiculaires abaissées sur les directions des » trois côtés d'un triangle, de l'un quelconque des points de la » circonférence du cercle circonscrit, appartiennent tous trois à une » même droite ».

Il ne sera pas difficile de parvenir par les mêmes considérations à ce théorème plus général :

« Si, de l'un quelconque des points de la circonférence du cer-

---

(*) Voy. *Annales*, tom. IV, pag. 251.

J. D. G.

» cle circonscrit à un triangle, on conduit, sur les directions de ses » côtés, des obliques faisant, dans le même sens, avec ces mê- » mes côtés, des angles égaux quelconques, les pieds de ces obli- » ques appartiendront tous trois à une même droite. En outre, » toutes les droites qu'on obtiendra, en variant l'angle des obli- » ques, envelopperont une parabole qui aura pour foyer le point » de départ de ces obliques ».

9.

Revenons au problème que nous nous étions proposé (7). Observons d'abord que le plan de la figure se trouve partagé tant par les trois côtés du triangle ABC, considérés comme des droites indéfinies, que par la circonférence du cercle, en *dix* régions dont quatre finies et six indéfinies. Les quatre finies sont le triangle lui-même que nous désignerons par T, et les trois segmens que nous désignerons respectivement par S_a, S_b, S_c. Les six indéfinies sont les opposées au sommet des trois angles du triangle que nous désignerons respectivement par A′, B′, C′, et trois autres régions terminées chacune par un arc de cercle et par les prolongemens de deux côtés du triangle. Nous désignerons ces dernières par T_a, T_b, T_c.

En supposant les deux droites AP′, BP′ parallèles, nous avions l'angle ACB égal à la somme des deux angles PAB et PBA ; mais, si la somme de ces deux angles croît de manière à devenir plus grande que l'angle ACB, les droites AP′, BP′ convergeront en un point P′, situé dans la région T_c, et le point P passera aussi dans cette même région ; de sorte que *la conique ne pourra être qu'une ellipse.*

Si au contraire la somme des angles PAB et PBA diminue, le point P passera dans la région ou segment S_c, tandis que le point P′ passera dans la région C′ ; d'où il est aisé de conclure que *la conique ne pourra être qu'une hyperbole.*

Donc (8) on a le théorème suivant :

« Tout point P, pris arbitrairement dans le plan d'un triangle
» ABC, est le foyer d'une conique touchant à la fois les trois cô-
» tés de ce triangle ; or, 1.° cette conique sera une *parabole* si
» le point P est sur la circonférence du cercle circonscrit au trian-
» gle ; 2.° ce sera une *ellipse* si le point P est intérieur au trian-
» gle, ou bien si, étant extérieur au cercle, il se trouve situé dans
» l'espace terminé par un quelconque des côtés de ce triangle, et
» les prolongemens des deux autres ; 3.° enfin la courbe sera une
» *hyperbole* si le point P est à la fois intérieur au cercle et ex-
» térieur au triangle, ou bien s'il se trouve situé dans l'opposé au
» sommet de l'un des angles de ce triangle (*) ».

Et réciproquement,

« Une conique touchant à la fois les trois côtés d'un triangle
» ABC ; 1.° si cette conique est une *parabole*, son foyer sera si-
» tué sur la circonférence du cercle circonscrit ; 2.° si cette coni-
» que est une *ellipse*, ou bien elle aura ses deux foyers intérieurs
» au triangle, ou bien ils seront tous deux extérieurs au cercle et
» situés dans l'espace circonscrit par l'un des côtés de ce triangle,
» et les prolongemens des deux autres ; 3.° enfin, si cette conique
» est une *hyperbole*, un de ses foyers sera compris dans l'un des
» trois segmens du cercle circonscrit extérieur au triangle, tandis
» que l'autre se trouvera situé dans l'opposé au sommet de l'an-
» gle respectivement opposé de ce triangle ».

Ce que nous avons dit ci-dessus (5, 3°) permet de préciser mieux encore la situation relative des deux foyers dans le cas de l'ellipse et dans celui de l'hyperbole ; il en résulte, en effet, que deux tangentes étant menées d'un même point à la courbe, et étant menées les deux droites qui divisent en deux parties égales les qua-

(*) C'est le théorème 32 que nous avions proposé à démontrer à la pag. 191 du II.me volume du *Journal* de M. Crelle.

tre angles formés par ces deux tangentes, les deux foyers se trouveront toujours situés d'un même côté de l'une de ces droites et de différens côtés de l'autre.

10

Nous avons déjà remarqué (pag. 3) que si, par un point P pris arbitrairement dans le plan d'un triangle ABC, et par chacun de ses sommets, on mène trois droites AP, BP, CP, rencontrant les directions des côtés respectivement opposés en A′, B′, C′, il existe toujours une conique qui touche les trois côtés du triangle en ces trois points. Examinons présentement *quelle doit être la situation du point* P *sur le plan du triangle, pour que la courbe soit une parabole, une ellipse ou une hyperbole.* Commençons par le cas de la parabole dont la discussion n'offre aucune difficulté.

Soit P (fig. 4) le foyer d'une parabole, et soit AB une tangente quelconque à la courbe, dont le point de contact soit en C′. Sur la droite PC′ soit pris un point C quelconque par lequel soit menée la droite CDP′, parallèle à l'axe de la parabole, coupant la tangente AB en D; alors les droites CC′P et CDP′ couperont la tangente AB sous le même angle; de telle sorte que le triangle DCC′ sera isocèle.

Par le point C soient menées à la courbe deux nouvelles tangentes CA, CB, lesquelles (8) formeront respectivement des angles égaux avec les droites CP, CP′; d'où on conclura que le trian- ACB est isocèle. Donc

« Si une parabole touche les trois côtés d'un triangle isocèle,
» la droite menée par le sommet de ce triangle et par le point de
» contact de sa base passera constamment par le foyer de la courbe ».

De ce théorème on conclut, sur-le-champ, le suivant :

« Si une parabole touche les trois côtés d'un triangle équilaté-
» ral, les droites qui joindront les points de contact des côtés du

» triangle avec les sommets respectivement opposés concourront tou-
» tes trois au foyer de la courbe » ; et, par conséquent (8),

« Si une parabole touche les trois côtés d'un triangle équilaté-
» ral, les droites menées par les sommets et par les points de con-
» tact des côtés respectivement opposés se coupent toutes trois en
» un même point, et le lieu de ce point est la circonférence du
» cercle circonscrit ».

Soit donc ABC (fig. 4) un triangle équilatéral, et soient menées par ses sommets et par un quelconque P des points de la circonférence du cercle circonscrit, les droites AP, BP, CP rencontrant en A′, B′, C′ les directions des côtés respectivement opposés ; la conique qui touchera les trois côtés du triangle en A′, B′, C′ sera donc une parabole dont le point P sera le foyer ; et les droites AA″, BB″, CC″, menées par les sommets du triangle et par les milieux A″, B″, C″ des cordes de contact B′C′, C′A′, A′B′, que l'on sait être parallèles à l'axe, seront ainsi parallèles entre elles.

Supposons présentement que le point P se déplace sur la droite CP, et que, par exemple, il passe en p dans l'intérieur du cercle ; les points de contact A′, B′ passeront respectivement en a', b' ; les cordes de contact C′A′, C′B′ deviendront C′a', C′b' dont les milieux seront en b'' et a'' ; et les droites Aa'', Bb'' se rencontreront nécessairement dans l'angle A′CB′, ce qui s'aperçoit aisément si l'on considère le parallélisme de AA″ et BB″ de A″a'' et B′b' et de B″b'' et A′a' ; et le point de concours k de ces deux droites sera le centre de la conique ; d'où il est aisé de voir que *cette courbe ne saurait être alors qu'une ellipse.* Si, au contraire, on suppose que le point P sort du cercle, les deux mêmes droites Aa'', Bb'' iront concourir dans l'opposé au sommet de l'angle A′CP′ ; d'où on conclura qu'alors *la courbe ne saurait être qu'une hyperbole.* Donc

« Si, par un quelconque P des points du plan d'un triangle équila-
» téral ABC, et par ses sommets, on mène les droites AP, BP, CP,

» rencontrant les directions des côtés respectivement opposés en A′,
» B′, C′, la conique touchant les côtés du triangle en ces trois
» points sera une ellipse, une hyperbole ou une parabole, suivant
» que le point P sera intérieur au cercle circonscrit, extérieur à
» ce cercle ou sur sa circonférence, et *vice versâ* ».

Ce théorème est susceptible de généralisation et d'application diverses qui vont présentement nous occuper.

11.

Par une projection parallèle sur un plan quelconque, la figure dont les propriétés viennent de nous occuper se modifie comme il suit :

1.° Le triangle équilatéral ABC devient un triangle d'espèce quelconque ;

2.° Le cercle circonscrit devient la plus petite ellipse circonscrite au nouveau triangle, c'est-à-dire, celle dont le centre coïncide avec son centre de gravité, point de concours des droites qui joignent ses sommets aux milieux des côtés respectivement opposés ;

3.° Les coniques touchant les trois côtés du triangle changent de forme, mais conservent leur caractère, c'est-à-dire, qu'elles demeurent ellipses, hyperboles ou paraboles, comme dans la figure projetée.

Réciproquement, tout triangle donné quelconque peut être considéré comme une projection parallèle d'un certain triangle équilatéral. En conséquence le théorème démontré (10) pourra être généralisé comme il suit :

« Si, par un quelconque P des points du plan d'un triangle
» quelconque ABC et par ses sommets, on mène des droites AP,
» BP, CP, rencontrant les directions des côtés respectivement op-
» posés en A′, B′, C′, la conique qui touchera les trois côtés du
» triangle en ces trois points sera une ellipse, une hyperbole ou
» parabole, suivant que le point P sera intérieur à la plus petite

» ellipse circonscrite au triangle ABC, extérieur à cette ellipse ou
» sur son périmètre même, et *vice versâ* ».

12.

De ce théorème on en déduit un autre encore plus général :

Par une projection centrale ou perspective, sur un plan quelconque, la figure dont il vient d'être question se modifie comme il suit :

1.° Le triangle donné devient un triangle quelconque ABC (fig. 5); la plus petite ellipse circonscrite devient une conique quelconque S circonscrite au nouveau triangle; les tangentes à l'ellipse, par les sommets du triangle, lesquelles sont parallèles aux côtés respectivement opposés, deviennent des tangentes à la conique S par les sommets du nouveau triangle, lesquelles rencontrent les directions des côtés respectivement opposés de ce triangle en trois points A', B', C', appartenant à une même droite, laquelle forme, avec les côtés du triangle ABC, un quadrilatère complet dont ces trois tangentes sont les diagonales.

2.° Toutes les paraboles touchant les trois côtés du triangle donné deviennent des coniques inscrites à ce quadrilatère complet;

3.° Les droites Aa, Bb, Cc joignant les sommets A, B, C du triangle inscrit aux sommets respectivement opposés a, b, c du triangle circonscrit, formé par les tangentes aux sommets du premier, diagonales du quadrilatère complet, se coupent toutes trois en un même point S, pôle de la droite $A'B'C'$, relativement à la conique circonscrite au triangle ABC; enfin les polaires de ce point S, relatives aux coniques inscrites au quadrilatère complet, enveloppent cette même conique circonscrite au triangle ABC. Donc

« 1.° Etant donné un quadrilatère complet, ses côtés pris trois
» à trois forment quatre triangles; et on peut inscrire à ce qua-
» drilatère une infinité de coniques différentes; 2.° les droites $A\alpha$,
» $B\beta$, $C\gamma$ menées par les points de contact de l'une de ces coni-

» ques avec les côtés de l'un ABC de ces quatre triangles, et par
» les sommets respectivement opposés se coupent toutes trois en un
» même point D; et le lieu de ce point D est une certaine conique
» circonscrite à ce triangle ABC, et en même temps inscrite au trian-
» *abc* formé par les trois diagonales du quadrilatère complet, de
» telle sorte qu'elle touche les côtés de ce dernier triangle aux som-
» mets du premier ABC; 3.° les droites A*a*, B*b*, C*c* qui joignent
» les sommets respectivement opposés de ces deux triangles se cou-
» pent toutes trois en un même point S, pôle du quatrième côté
» A′B′C′ du quadrilatère complet; et les polaires de ce point, re-
» latives aux coniques inscrites au quadrilatère complet, envelop-
» pent la conique circonscrite au triangle ABC; en outre, les trois
» points α', β', γ', où se coupent les côtés correspondans des deux
» triangles ABC, $\alpha\beta\gamma$, appartiennent à une même droite, la-
» quelle passe constamment par le point S; 4.° enfin les coniques
» à la fois circonscrites aux quatre triangles formés par les côtés
» du quadrilatère complet, pris trois à trois, et inscrites au trian-
» gle formé par ses diagonales, se touchent deux à deux aux six
» sommets A, B, C, A′, B′, C′ de ce quadrilatère complet, et el-
» les sont touchées en ces mêmes points de contact par ses trois
» diagonales ».

13.

Et réciproquement,

« Si, à un triangle donné quelconque ABC, on circonscrit une
» conique quelconque, et qu'ensuite par un point D, pris arbi-
» trairement sur le périmètre de cette conique et par chacun des
» sommets du triangle, on mène trois droites AD, BD, CD ren-
» contrant les côtés respectivement opposés en trois points α, β,
» γ où ces côtés sont touchés par une deuxième conique, cette
» conique et toutes les autres, déterminées par une semblable cons-
» truction, seront touchées par une même droite A′B′C′, déter-

» minée par les intersections respectives des directions des côtés du
» triangle ABC avec les tangentes menées à la première conique
» par ses sommets respectivement opposés »

14.

Supposons que le triangle ABC, le point D et la conique inscrite, touchant ses côtés en α, β, γ restant fixe, la conique passant par les quatre points A, B, C, D, varie de toutes les manières possibles, la droite $A'B'C'$ roulera alors (13) sur la conique invariable, d'où résulte le théorème suivant :

» 1.° Etant donné un quadrilatère quelconque ABCD, on peut
» lui circonscrire une infinité de coniques différentes, lesquelles
» seront aussi inscrites à chacun des quatre triangles formés par
» les côtés du quadrilatère pris trois à trois; 2.° les tangentes AA',
» BB', CC', menées à une quelconque de ces coniques par les
» sommets de l'un quelconque ABC des quatre triangles, ont leurs
» intersections A', B', C', avec les directions des côtés respective-
» ment opposés de ce même triangle situées sur une même droite;
» et l'enveloppe de cette droite est une certaine conique passant
» par les trois points α, β, γ d'intersection des trois systèmes de
» deux droites joignant deux à deux les quatre sommets du qua-
» drilatère ABCD, et touchant, en ces trois points, les côtés du
» triangle ABC; 3.° les points α', β', γ' d'intersection des côtés
» correspondans des deux triangles ABC, $\alpha\beta\gamma$ appartiennent tous
» trois à une même droite $\alpha'\beta'\gamma'$, polaire du quatrième sommet
» D, relativement à la conique circonscrite au quadrilatère; en
» outre, les pôles de cette droite, relativement à toutes les coni-
» ques qui peuvent être circonscrites à ce même quadrilatère, sont
» sur le périmètre de la conique enveloppe de la droite $A'B'C'$;
» 4.° enfin, les coniques à la fois inscrites aux quatre triangles formés
» par les sommets du quadrilatère ABCD, pris trois à trois, et cir-
» conscrites au triangle $\alpha\beta\gamma$, se touchent deux à deux aux trois points

» α, β, γ ; de telle sorte que chacun de ces points est le point de
» contact de deux différentes paires de coniques ; et en même temps
» ces coniques sont touchées deux à deux, à leur point de contact,
« par les six droites qui joignent deux à deux les quatre sommets
» du quadrilatère donné ABCD ».

Par la théorie des *polaires réciproques* on aurait pu déduire ce théorème de celui que nous avons précédemment démontré (12).

15.

Du théorème précédemment démontré (6) on peut, par la considération des projections, en déduire un grand nombre d'autres. En remarquant, par exemple, que les perpendiculaires, abaissées d'un point quelconque de la circonférence du cercle circonscrit au triangle ABC (fig. 2) sur les directions des côtés de ce triangle, sont respectivement parallèles aux trois hauteurs AA″, BB″, CC″, ainsi qu'aux trois perpendiculaires PA′, PB′, PC′, abaissées du centre de ce cercle sur ces mêmes côtés, on en conclura que

« 1. Une conique quelconque étant circonscrite à un triangle
» donné ABC, et étant menée par son centre P et par les mi-
» lieux A′, B′, C′ des côtés du triangle, les droites PA′, PB′,
» PC′, les droites AA″, BB″, CC″ menées par les sommets du
« même triangle, parallèlement à celles-là, se couperont toutes trois
» en un même point P′ ; les six points A′, B′, C′, A″, B″, C″
» appartiendront à une seconde conique semblable à la première
» et semblablement située (*homothétique*) ; le point P′, les deux
» centres P, O et le centre de gravité G du triangle donné ap-
» partiendront à une même droite, et seront situés harmoniquement,
» de telle sorte qu'on aura OG : GP : OP′ : PP′ :: 1 : 2 : 3 : 6 ; en
» outre (8), si de l'un quelconque D des points de la conique
» circonscrite au triangle ABC on abaisse, sur les directions de
» ses côtés, des obliques respectivement parallèles aux droites PA′,
» PB′, PC′, leurs pieds seront situés sur une même droite ».

Et réciproquement,

« II. Si, par l'un quelconque P' des points du plan d'un triangle donné ABC et par ses sommets, on mène les droites AP', BP', CP', il y aura une infinité de points D tels qu'en menant, de l'un de ces points sur les côtés du triangle, des obliques respectivement parallèles à ces droites, leurs pieds appartiendront tous trois à une même droite; et tous ces points D seront situés sur une même conique circonscrite au triangle donné; le centre P de cette conique sera le point de concours des droites conduites par les milieux A', B', C' des côtés du triangle, parallèlement aux droites AP', BP', CP'; etc.

Comme le point P' de concours des trois hauteurs du triangle ABC peut être situé ou dans l'intérieur de ce triangle, ou dans l'une des trois régions α, β, γ, il s'ensuit que

« III. Les deux coniques semblables et semblablement situées dont les centres sont P et O sont 1.° des ellipses, si le point P' est situé dans l'intérieur du triangle ABC, ou dans l'une des trois régions α, β, γ; 2.° des hyperboles, si ce point P' est situé dans l'une des trois régions α', β', γ'; 3.° des paraboles, si ce point est infiniment distant du triangle ABC. En outre les points P et P' sont des points homologues des deux triangles ABC et $A'B'C'$ ».

Dans le cas de la parabole où le point P' est à l'infini, les droites AA'', BB'', CC'' sont parallèles, d'où il suit que

« IV. Si, par les sommets d'un triangle donné ABC, on mène, dans une direction arbitraire, trois parallèles AA'', BB'', CC'' rencontrant les directions des côtés opposés en A'', B'', C'', ces points et les milieux A', B', C' des mêmes côtés appartiendront tous six à une même parabole ». Et réciproquement « si, par les milieux A', B', C' des côtés d'un triangle donné ABC, on fait passer une parabole quelconque, coupant de nouveau ces mêmes côtés en A'', B'', C'', les droites AA'', BB'', CC'' seront nécessairement parallèles ».

16.

A l'aide de la projection centrale, des précédens théorèmes (15), on déduira les suivans :

« I. Une conique quelconque étant circonscrite à un triangle donné
» ABC (fig. 6), et étant menées par un point G quelconque et
» par les sommets du triangle des droites AG, BG, CG, coupant
» les directions des côtés opposés en A', B', C', et étant menées
» de plus les droites B'C'α, C'A'β, A'B'γ, coupant les directions
» des côtés correspondans du triangle donné en α, β, γ, situés sur
» une même droite αβγ; enfin P étant le pôle de cette droite, et
» étant menées les droites PA'α', PB'β', PC'γ' coupant respective-
» ment la droite αβγ en α', β', γ'; les droites AA''α', BB''β',
» CC''γ', coupant les côtés du triangle donné en A'', B'', C'',
» concourront toutes trois en un même point P'; les six points A',
» B', C', A'', B'', C'' appartiendront à une seconde conique; la
» droite αβγ sera une sécante commune à cette seconde conique
» et à la première; les pôles P, O de cette droite, par rapport
» aux deux coniques, et les deux points G et P' appartiendront à
» une même droite PGOP' sur laquelle ils seront harmonique-
» ment situés; en outre, si, par l'un quelconque D des points du
» périmètre de la conique circonscrite au triangle donné et par
» chacun des points α', β', γ', on mène des droites, leurs points
» d'intersection avec les côtés correspondans du triangle donné ap-
» partiendront tous trois à une même droite ».

Et réciproquement,

« II. Par un quelconque G des points du plan d'un triangle
» donné ABC et par chacun de ses sommets, soient menées les
» droites AGA', BGB', CGC' coupant respectivement en A', B',
» C' les directions des côtés opposés; et soient ensuite menées les
» droites B'C'α, C'A'β, A'B'γ, coupant les directions de ces mêmes

» côtés en α, β, γ, points qui appartiendront tous trois à une
» même droite $\alpha\beta\gamma$; si, par un autre point quelconque P, on mène
» les droite $PA'\alpha'$, $PB'\beta'$, $PC'\gamma'$, lesquelles coupent la droite $\alpha\beta\gamma$
» en α', β', γ', les droites $A\alpha'$, $B\beta'$, $C\gamma'$ concourront en un même
» point P'. Or, si des points α', β', γ' on abaisse des obliques sur
» les directions des côtés opposés du triangle donné, de manière
» qu'elles se coupent en un même point D, et que leurs pieds ap-
» partiennent à une même droite, le lieu de ce point D sera une
» certaine conique circonscrite au triangle donné; le point P sera
» le pôle de la droite $\alpha\beta\gamma$ relativement à cette conique, etc. ».
Ou, en d'autres termes: « Si, par un quelconque P' des points
» du plan d'un triangle donné ABC et par ses sommets, on mène
» des droites AP', BP', CP', et qu'ensuite on mène arbitrairement
» une droite $\alpha'\beta'\gamma'$ coupant respectivement celles-là en α', β', γ', il
» y aura alors une infinité de points D tels que les droites $D\alpha'$,
» $D\beta'$, $D\gamma'$ coupent les côtés correspondans du triangle donné en
» trois points appartenant à une même droite; et le lieu de ces
» points D sera une une certaine conique circonscrite au triangle
» donné, etc. »

« III. Les deux points P, P' (1) sont des points homologues par
» rapport aux triangles ABC, A'B'C'; quand l'un d'eux tombe sur
» la droite $\alpha\beta\gamma$, l'autre coïncide avec lui, et alors la conique qui
» passe par les six points A', B', C', A'', B'', C'' touche cette droite
» $\alpha\beta\gamma$ en ce point P ou P' ». Et réciproquement, « si une coni-
» que passe par trois points donnés A', B', C' et touche une droite
» donnée $\alpha\beta\gamma$, en un certain point Q, elle coupera les directions
» des côtés du triangle ABC, déterminé par les droites $A'\alpha$, $B'\beta$,
» $C'\gamma$, en trois points A'', B'', C'' lesquels seront situés sur les droi-
» tes AQ, BQ, CQ, et *vice versâ*, etc. ».

C'est là une propriété commune à toutes les coniques qui passent par les trois mêmes points donnés A', B', C' et touchent la même droite donnée $\alpha\beta\gamma$.

17.

Les précédens théorèmes ont leurs *polaires réciproques ;* tel est, par exemple, le suivant :

« Soit menée une droite quelconque, coupant les côtés d'un » triangle donné ABC en α, β, γ; et, par un quelconque D des » points du plan de ce triangle, soient menées les droites $D\alpha$, $D\beta$, » $D\gamma$, alors on peut abaisser, des sommets du triangle donné, sur » les droites respectivement opposées, des obliques $A\alpha'$, $B\beta'$, $C\gamma'$, » telles qu'elles se coupent en un même point E, et que leurs » pieds α', β', γ', appartiennent à une même droite ; cette droite » enveloppera une certaine conique inscrite au triangle donné ; etc. »

Etc., etc.

18

Soit circonscrite une conique quelconque à un triangle donné ABC (fig. 7). Par les sommets de ce triangle, et par un quelconque P' des points de son plan, soient menées les droites $AP'A''\alpha$, $BP'B''\beta$, $CP'C''\gamma$, coupant respectivement les directions des côtés opposés du triangle en A'', B'', C'', et la courbe en α, β, γ. Si, par un quelconque D des points du périmètre de cette conique, on mène les droites $D\alpha$, $D\beta$, $D\gamma$, coupant les côtés opposés du triangle donné en α', β', γ', ces trois points seront toujours situés sur une même droite $\alpha'\beta'\gamma'$, passant par le point P'; car, à cause de l'hexagone inscrit $D\beta BCA\alpha D$, par exemple (Pascal), les trois points α', β', P' appartiendront à une même droite.

Lorsque le point D se meut sur le périmètre de la courbe, la droite $\alpha'\beta'\gamma'$ tourne sur son point P', et *vice versâ*.

19.

Supposons que la conique soit un cercle, et que les droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ soient respectivement perpendiculaires aux côtés du triangle donné, alors le point D sera le foyer d'une parabole inscrite à ce triangle, et l'on aura (6)

$$P'A''=A''\alpha\,,\qquad P'B''=B''\beta\,,\qquad P'C''=C''\gamma\,.$$

Soit menée la droite DE, parallèle à $\gamma P'$; elle sera perpendiculaire à la tangente AB; et, en supposant qu'elle coupe $\alpha'\beta'\gamma'$ en E et AB en F, on aura DF=FE, car $\gamma C''=C''P'$; d'où il suit que le point E est situé sur la directrice de la parabole, et que par conséquent la droite $\alpha'\beta'\gamma'$ est elle-même cette directrice; donc

« Les directrices de toutes les paraboles inscrites à un même » triangle donné ABC se coupent toutes en un même point P' » intersection des trois hauteurs de ce triangle; et

» Les intersections des trois hauteurs de tous les triangles circons- » crits à une même parabole sont toutes situées sur la directrice » de cette courbe (*) ».

En remarquant que quatre droites données sur un plan peuvent être touchées par une même parabole, on conclura de là la démonstration du 4.^{e} théorème de la pag. 302 du précédent volume, savoir :

« Dans les quatre triangles que forment trois à trois quatre droi- » tes tracées sur un même plan, les points de concours des trois » hauteurs appartiennent tous quatre à une même droite (**) ».

20.

En observant que les pieds F.... des perpendiculaires abaissées du foyer D sur les directions des côtés du triangle ABC appar-

(*) C'est le théorème 29, proposé à démontrer à la pag. 191 du II.^{me} volume du Journal de M. Crelle.

(**) C'est le théorème 8 de l'endroit cité du Journal de M. Crelle.

tiennent à une même droite parallèle à la directrice $\alpha'\beta'\gamma'$, cette circonstance fournit un moyen très-simple de résoudre, par projection, le problème suivant :

« Une conique quelconque étant circonscrite à un triangle donné » ABC; si de l'un quelconque D des points du périmètre de la » courbe on abaisse, sur les côtés du triangle, des obliques respec- » tivement parallèles aux diamètres qui passent par les milieux de » ces côtés, leurs pieds F..... appartiendront à une même droite. » Cela posé, quelle doit être la situation du point D sur la courbe, » pour que cette droite soit parallèle à une droite donnée » ?

Si, en effet, on mène les droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ respectivement parallèles aux diamètres dont il s'agit, et qu'ensuite, par le point de concours P' de ces trois droites, on mène la droite $\alpha'\beta'\gamma'$, parallèle à la droite donnée, les droites $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ se couperont au point cherché D.

21.

De ce qui précède il suit encore, comme cas particulier, que

« Les centres de tous les triangles équilatéraux circonscrits à une » même parabole sont situés sur la directrice de cette parabole », et

« Les directrices de toutes les paraboles inscrites à un même » triangle équilatéral donné passent toutes par le centre de ce » triangle ».

De là on conclura (5 et 11), par la projection parallèle, que

« Un triangle quelconque ABC étant circonscrit à une parabole » donnée, et Q étant le point de concours des droites qui joignent » ses sommets aux points de contact des côtés respectivement op- » posés; si l'on imagine tous les triangles pour lesquels ce point » Q est le même, les centres de gravité de tous ces triangles ap- » partiendront à une même droite, polaire du point Q; les plus » petites ellipses circonscrites à ces mêmes triangles seront sembla- » bles et semblablement situées, et se couperont toutes en ce même » point Q ».

Et réciproquement,

« A chaque parabole inscrite à un même triangle donné ABC » correspond un point Q de concours des droites menées des som- » mets aux points de contact des côtés opposés ; et les polaires » de tous les points Q, relatives aux paraboles correspondantes » se coupent toutes en un même point G, centre de gravité de » ce triangle ».

22.

Si, par les points A'', B'', C'', milieux respectifs des droites $P'\alpha$, $P'\beta$, $P'\gamma$ (fig. 7), on mène des droites respectivement parallèles à $D\alpha$, $D\beta$, $D\gamma$, elles passeront par les milieux respectifs des droites $P'\alpha'$, $P'\beta'$, $P'\gamma'$, et concourront en un même point D' situé sur la conique qui passerait par les six points A', B', C', A'', B'', C'' (6) ; de sorte que les trois points D, D', P' seront en ligne droite. De là résulte ce théorème dû à M. Lamé.

« Quatre points A, B, C, P' donnés sur un même plan dé- » terminent trois systèmes de deux droites AP' et BP', BP' et » AC, CP' et AB, qui se coupent respectivement en A'', B'', » C''. Si l'on coupe ces systèmes par une droite quelconque $\alpha'\beta'\gamma'P'$, » conduite par P', et si, par les points A'', B'', C'', et par les mi- » lieux des segmens de cette droite, on mène des droites $A''D'$, » $B''D'$, $C''D'$, ces droites concourront en un même point D', et » le lieu de ce point sera une conique passant par les points A'', » B'', C'', et par les milieux des droites BC, CA, AB, AP', BP', » CP', etc. ».

23.

Revenons de nouveau au cas où la conique circonscrite au triangle donné ABC est un cercle. Dans ce cas, le point D est le foyer et la droite $\alpha'\beta'\gamma'P'$ la directrice d'une parabole inscrite au triangle ; et conséquemment la polaire du point P', relative à la parabole, passe par le point D, et est perpendiculaire à la droite P′D; cette polaire enveloppera donc une certaine conique dont P′ sera le foyer, et dont l'axe principal coïncidera (5) avec le diamètre PP′ du cercle circonscrit au triangle. Donc

« Les polaires du point de concours P′, des trois hauteurs d'un » triangle donné ABC, relatives à toutes les paraboles inscrites à » ce triangle, enveloppent une certaine conique dont le point P′ » est le foyer, dont l'axe principal passe par le centre du cercle cir- » conscrit au triangle donné, et qui est inscrite au triangle formé » par les parallèles menées aux côtés du triangle donné par les » sommets de ce triangle ».

Ou plus généralement, par les projections,

« Les polaires de l'un quelconque P′ des points du plan d'un » triangle donné ABC, relatives à toutes les paraboles inscrites à » ce triangle, enveloppent une conique inscrite au triangle formé » par des parallèles aux trois côtés du triangle donné, conduites » par les sommets de ce triangle ».

24.

Il résulte encore de là, par la projection centrale (12),

« Les polaires de l'un quelconque des points du plan d'un qua- » drilatère complet, relatives à toutes les coniques inscrites à ce » quadrilatère, enveloppent une nouvelle conique touchant les » trois diagonales du même quadrilatère ».

25.

Lorsque le point P′ passe à l'infini, ses polaires deviennent des diamètres dont les conjugués, concourant en ce Point P′, sont alors parallèles, et, comme les premiers sont tangens à une certaine conique (24), ils seront parallèles deux à deux; d'où l'on conclut que

« Entre les coniques inscrites à un même quadrilatère donné,

» on n'en saurait trouver trois ayant un système de diamètres con-
» jugués parallèles ; mais, si l'on trace arbitrairement, pour l'une
» de ces coniques, un système de diamètres conjugués, il existera
» une autre conique inscrite dont deux diamètres conjugués seront
» parallèles à ceux-là ». Donc

« Si l'on propose d'inscrire à un quadrilatère une conique dont
» deux diamètres conjugués soient parallèles à deux droites don-
» nées, le problème n'aura que deux solutions au plus ».

26.

On sait que les centres de toutes les coniques C, C′, C″, ... inscrites à un même quadrilatère complet donné, sont situés sur la droite D qui joint les milieux de ses trois diagonales. Les conjugués Δ, Δ', Δ'', ... de ce diamètre commun D touchent une certaine conique S (25), d'où il suit qu'en général, entre les diamètres Δ, Δ', Δ'', ... il doit y en avoir deux parallèles à une droite arbitraire L. Et réciproquement, entre les conjugués des diamètres parallèles à une droite donnée L, il s'en trouve généralement deux qui coïncident avec la droite D ; d'où l'on conclut que cette droite touche la conique S. Donc

« Dans les coniques inscrites à un même quadrilatère donné, les
» conjugués des diamètres parallèles à une même droite envelop-
» pent une même conique, et *toutes les coniques enveloppées qui*
» *résultent des diverses directions de cette droite*, *sont inscrites au*
» *quadrilatère complet formé par le lieu des centres des coniques de*
» *la première série et par les trois diagonales du quadrilatère com-*
» *plet donné* ».

27.

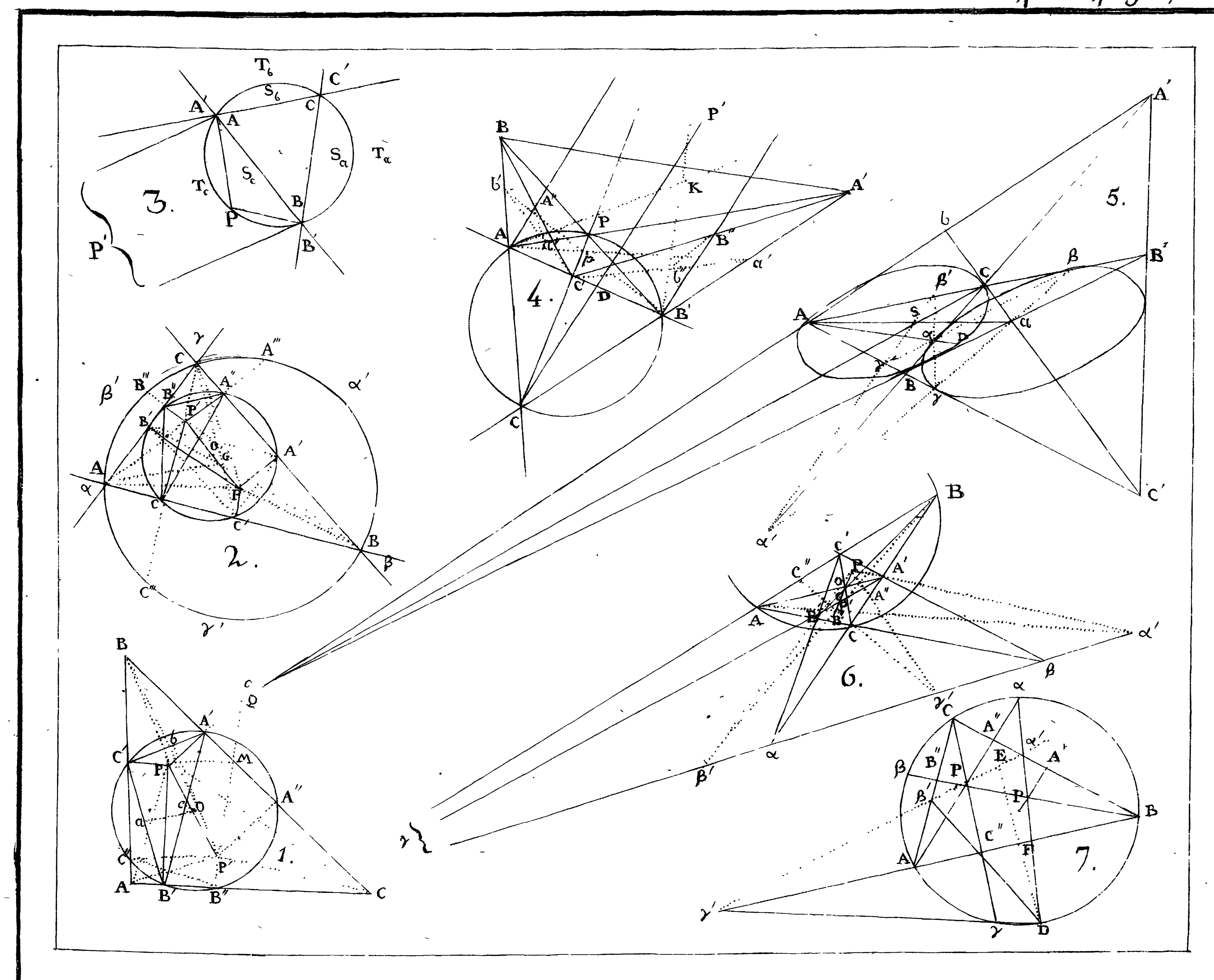
Les diamètres parallèles se coupent en un même point à l'infini, et lorsqu'on varie leur direction commune, tous les points de concours appartiennent à une même droite également à l'infini. Les pôles de cette droite, par rapport aux mêmes coniques, en sont les centres situés sur la droite qui joint les milieux des trois diagonales du quadrilatère complet donné. De là, par les projections centrales, on conclura les théorèmes suivans :

« 1.° Les pôles d'une droite quelconque, relatifs à toutes les » coniques inscrites à un même quadrilatère complet donné, sont » situés sur une même droite ; 2.° les polaires de l'un quelcon- » que des points de cette droite enveloppent une certaine conique, » et *toutes les coniques enveloppées qu'on obtient*, *en variant la* » *situation de ce point sur cette droite*, *sont inscrites au qua-* » *drilatère dont les côtés seront cette même droite et les trois dia-* » *gonales du quadrilatère complet donné ;* 3.° si la polaire tourne » sur l'un des points de sa direction, la droite des pôles enve- » loppera une nouvelle conique, etc. »

28.

Ces divers théorèmes ont leurs *polaires réciproques* ; tel est, par exemple, le suivant :

« 1.° Les polaires d'un point quelconque, relatives à toutes les » coniques circonscrites à un même quadrilatère donné, concourent » toutes en un même point ; 2.° les pôles d'une droite quelcon- » que passant par ce point sont situés sur une certaine conique, » et *toutes les coniques de cette sorte que l'on obtient*, *en variant* » *la direction de la droite conduite par ce point*, *sont circonscrites* » *au quadrilatère dont les sommets sont ce même point*, *et les trois* » *points où concourent les systèmes de droites qui joignent deux* » *à deux les quatre sommets du quadrilatère donné ;* 3.° si le pôle » décrit une droite, le point de concours des polaires décrira une » nouvelle conique, etc. »



J.D.G. fecit.

GÉOMÉTRIE DE SITUATION.

Démonstration de quelques propriétés du triangle, de l'angle trièdre et du tétraèdre, considérés par rapport aux lignes et surfaces du second ordre;

Par M. Chasles, ancien élève de l'Ecole polytechnique.

Des théorèmes sur les hexagones inscrit et circonscrit aux lignes du second ordre, on déduit immédiatement comme corollaires les deux propositions suivantes :

1. *Deux triangles étant inscrits et circonscrits à une ligne du second ordre, de telle sorte que les sommets de l'inscrit soient les points de contact des côtés du circonscrit,*

Les points de concours des directions des côtés respectivement opposés des deux triangles appartiennent tous trois à une même droite.

Les droites qui joignent les sommets respectivement opposés des deux triangles concourent toutes trois en un même point.

Cette droite et ce point sont polaire et pôle, l'un de l'autre, par rapport à la courbe dont il s'agit.

De cette double proposition résulte immédiatement la suivante:

2. *Deux angles trièdres de même sommet étant inscrits et circonscrits à une surface conique du second ordre, de telle sorte*

que les arêtes de l'inscrit soient les lignes de contact des faces du circonscrit,

Les intersections des plans des faces respectivement opposées des deux tétraèdres sont situées toutes trois dans un même plan.

Les plans déterminés par les arêtes respectivement opposées des deux tétraèdres se coupent tous trois suivant une même droite.

Ce plan et cette droite sont polaire et pôle, l'un de l'autre, par rapport à la surface conique dont il s'agit.

Soit inscrite à la surface conique une autre surface quelconque du second ordre, cette nouvelle surface se trouvera aussi inscrite à l'angle trièdre circonscrit à la première, et ses points de contact avec les faces de cet angle trièdre se trouveront sur les arêtes de l'inscrit. De là résulte cet autre théorème :

3. *Un triangle et un angle trièdre étant inscrits et circonscrits à une même surface quelconque du second ordre, de telle sorte que les sommets du triangle soient les points de contact des faces du tétraèdre,*

Les points où les directions des côtés du triangle sont coupées par les plans des faces respectivement opposées de l'angle trièdre appartiennent tous trois à une même droite.

Les plans déterminés par les sommets du triangle et par les arêtes respectivement opposées de l'angle trièdre se coupent tous trois suivant une même droite.

Ces deux droites sont polaires conjuguées l'une de l'autre, par rapport à la surface du second ordre dont il s'agit.

Il est clair que, réciproquement, quand trois points seront pris respectivement sur les faces d'un angle trièdre, de telle sorte que l'une des deux parties du théorème ait lieu, l'autre aura lieu également, et alors une infinité de surfaces du second ordre pourront toucher les faces de l'angle trièdre en ces trois points; toutes ces surfaces se couperont suivant une même ligne du second ordre, circonscrite au triangle qui a ses sommets en ces trois points, et inscrite à celui suivant lequel l'angle trièdre est coupé par le plan de celui-là.

4. THÉORÈME. *Deux tétraèdres étant l'un inscrit et l'autre circonscrit à une même surface quelconque du second ordre, de telle sorte que les sommets de l'inscrit soient les points de contact du circonscrit.*

Les droites qui joignent les sommets respectivement opposés dans les deux tétraèdres sont quatre génératrices d'un même mode de génération d'une même surface du second ordre.

Et les quatre droites, suivant lesquelles se coupent trois à trois les douze plans conduits par les arêtes du circonscrit et par les sommets de l'inscrit non situés dans les faces du circonscrit qui déterminent ces arêtes, sont quatre génératrices du deuxième mode de génération de cette même surface du second ordre (*).

Les droites suivant lesquelles se coupent les plans des faces respectivement opposées dans les deux tétraèdres sont quatre génératrices d'un même mode de génération d'une même surface du second ordre.

Et les quatre droites que déterminent trois à trois les douze points suivant lesquels les arêtes de l'inscrit sont coupées par les plans des faces du circonscrit qui ne contiennent pas les extrémités de ces arêtes, sont quatre génératrices du deuxième mode de génération de cette même surface du second ordre (*).

(*) Voilà le complément que nous avions désiré à la pag. 35 du présent volume pour cet élégant théorème. Ce complément peut aussi se déduire assez simplement de l'analyse de M. Bobillier.

On a vu, en effet, à la page 328 du précédent volume, que les faces d'un tétraèdre étant données par les équations linéaires en x, y, z, $A=o$, $B=o$, $C=o$, $D=o$, une surface quelconque du second ordre, circonscrite à ce tétraèdre, était donnée par l'équation

$$aBC+bCA+cAB+\alpha AD+\beta BD+\gamma CD=o\,,$$

Et, non seulement ces deux surfaces sont polaires réciproques l'une de l'autre, par rapport à la surface du second ordre dont il s'agit, mais leurs huit génératrices sont, chacune à chacune, polaires conjuguées ou réciproques, par rapport à cette même surface.

---

et qu'alors les équations des faces du tétraèdre circonscrit dont les points de contact étaient les sommets de l'inscrit étaient

$$bC+cB+\alpha D=0\ ,$$

$$cA+aC+\beta D=0\ ,$$

$$aB+bA+\gamma D=0\ ,$$

$$\alpha A+\beta B+\gamma C=0\ .$$

On a vu, de plus, que les plans des faces respectivement opposées des deux tétraèdres se coupaient suivant quatre droites appartenant à une même surface du second ordre donnée par l'équation

$$\left.\begin{aligned}\alpha\beta\gamma D^2+\alpha(\beta b+\gamma c)A\\ +\beta(\gamma c+\alpha a)B\\ +\gamma(\alpha a+\beta b)C\end{aligned}\right|\, D+(\alpha A+\beta b+\gamma C)(bcA+caB+abC)=0\ ,$$

et que les droites joignant les sommets respectivement opposés appartenaient toutes quatre à une autre surface du second ordre ayant pour équation

$$\left.\begin{aligned}(\beta b-\gamma c)(\beta b+\gamma c-\alpha a)(aBC+\alpha AD)\\ +(\gamma c-\alpha a)(\gamma c+\alpha a-\beta b)(bCA+\beta BD)\\ +(\alpha a-\beta b)(\alpha a+\beta b-\gamma c)(cAB+\gamma CD)\end{aligned}\right\}=0\ ;$$

or, la première de ces deux équations est également satisfaite par chacun des quatre systèmes d'équations

Démonstration. Chacune des deux parties du théorème est facile à démontrer directement ; mais, attendu qu'elles se déduisent l'une de l'autre par la théorie des polaires réciproques ; nous nous bornerons à donner la démonstration de la première ; démonstration susceptible d'ailleurs d'une traduction pareille à celle de l'énoncé.

$$\frac{A}{a}+\frac{B}{b}+\frac{C}{c}=0\ , \qquad D=0\ ,$$

$$\frac{B}{\gamma}+\frac{C}{\beta}+\frac{D}{\alpha}=0\ , \qquad A=0\ ,$$

$$\frac{C}{\alpha}+\frac{A}{\gamma}+\frac{D}{b}=0\ , \qquad B=0\ ,$$

$$\frac{A}{\beta}+\frac{B}{\alpha}+\frac{D}{c}=0\ , \qquad C=0\ ,$$

équations que l'on reconnaîtra facilement pour être celles des quatre génératrices du deuxième mode de génération de la seconde partie du théorème.

On s'assurera de même que l'autre équation du second degré est satisfaite par chacun des quatre systèmes d'équations

$$(\beta b-\gamma c)A+a(\beta B-\gamma C)=0\ , \quad (\gamma c-\alpha a)B+b(\gamma C-\alpha A)=0\ , \quad (\alpha a-\beta b)C+c(\alpha A-\beta B)=0\ ,$$

$$(\gamma c-\alpha a)A+\beta(\gamma D-aB)=0\ , \quad (\alpha a-\beta b)B+\gamma(\alpha D-bC)=0\ , \quad (\beta b-\gamma c)C+\alpha(\beta D-cA)=0\ ,$$

$$(\alpha a-\beta b)A+\gamma(aC-\beta D)=0\ , \quad (\beta b-\gamma c)B+\alpha(bA-\gamma D)=0\ , \quad (\gamma c-\alpha a)C+\beta(cB-aD)=0\ ,$$

$$(\beta b-\gamma c)D+a(bC-cB)\ ,$$

$$(\gamma c-\alpha a)D+b(cA-aC)\ ,$$

$$(\alpha a-\beta b)D+c(aB-bA)\ ;$$

lesquelles sont celles des douze plans qui se coupent trois à trois suivant les quatre génératrices du deuxième mode de génération de la première partie du théorème.

J. D. G.

Les droites qui vont de trois sommets du tétraèdre circonscrit à leurs opposés respectifs dans l'inscrit sont dans trois plans qui se coupent (3) suivant une même droite, passant par le quatrième sommet; la droite qui va de ce sommet à son opposé dans l'inscrit rencontre aussi cette droite; donc les quatre droites qui joignent les sommets respectivement opposés dans les deux tétraèdres s'appuyent sur quatre autres droites partant de ces mêmes sommets; ce qui prouve qu'elles appartiennent à une surface du second ordre, donc ces quatre autres droites sont des génératrices du deuxième mode de génération.

Les quatre droites qui joignent les sommets respectivement opposés, dans les deux tétraèdres, étant des génératrices d'un même mode de génération d'une surface du second ordre, on en peut déduire les conséquences suivantes :

5. *Si deux de ces quatre droites concourent en un même point, les deux autres devront concourir en un autre point ; et, si trois d'entre elles concourent en un même point, la quatrième devra aussi passer par ce point.*

Les quatre droites suivant lesquelles se coupent les plans des faces opposées, dans les deux tétraèdres, étant des génératrices d'un même mode de génération d'une surface du second ordre, on en peut déduire les conséquences suivantes:

5. *Si deux de ces quatre droites sont situées dans un même plan, les deux autres devront aussi être situées dans un autre plan ; et, si trois d'entre elles sont dans un même plan, la quatrième devra aussi être dans ce plan.*

Ces dispositions sont en effet les seules qui puissent permettre alors de mener, par chacun des points de l'une quelconque des quatre droites, une droite qui s'appuye à la fois sur les trois autres. Dans ces circonstances particulières, la surface du second ordre, lieu de ces quatre droites, se trouve remplacée par deux plans ou par un plan unique. On doit aussi remarquer que, quand les quatre dernières droites sont dans un même plan, les quatre premières concourent en un même point, pôle de ce plan.

Les théorèmes ci-dessus (4) ont leurs réciproques qui peuvent être énoncés comme il suit :

6. *Si, par les sommets d'un tétraèdre, on mène quatre droites qui soient des génératrices d'un même mode de génération d'une surface du second ordre, ces droites perceront les plans des faces respectivement opposées en quatre points par lesquels on pourra faire passer une surface du second ordre inscrite au tétraèdre dont il s'agit.*

6. *Si, dans les plans des faces d'un tétraèdre, on trace quatre droites qui soient des génératrices d'un même mode de génération d'une surface du second ordre, ces droites, avec les sommets respectivement opposés, détermineront quatre plans que pourra toucher une surface du second ordre circonscrite au tétraèdre dont il sagit.*

Ces deux théorèmes pouvant être déduits l'un de l'autre par la théorie des polaires réciproques, il nous suffira de démontrer le premier.

Soient A, B, C, D les quatre sommets du tétraèdre ; puisque les droites menées par les trois premiers A, B, C, appartiennent à une surface du second ordre dont une génératrice du même mode de génération passe par le quatrième sommet D, on pourra, par ce dernier sommet, mener une génératrice du deuxième mode de génération, laquelle s'appuyera sur les trois droites conduites par les sommets A, B, C ; donc, par les points où ces trois droites perceront les plans des faces opposées, on pourra (3) faire passer une infinité de surfaces du second ordre touchant ces plans en ces trois points ; l'une de ces surfaces pourra donc être choisie de manière à toucher aussi la quatrième face du tétraèdre ; et la droite qui joindra le point de contact au sommet D, qui lui est opposé, appartiendra (4) à la surface du second ordre déterminée par les trois premières droites ; ce sera donc précisément la quatrième droite ; le théorème est donc démontré.

Les propriétés des angles trièdres et des tétraèdres inscrits et circonscrits aux surfaces du second ordre, que nous venons, comme on le voit, de déduire d'une manière fort simple des propriétés analogues et bien connues des triangles inscrits et circonscrits aux coniques, ne sont que des cas très particuliers de théorèmes généraux, relatifs à l'angle trièdre et au tétraèdre, placés d'une manière quelconque, par rapport à une surface du second ordre.

7. *THÉORÈME. Si, par rapport à une même surface fixe quelconque du second ordre, on prend*

Les pôles des trois faces d'un angle trièdre, les plans conduits par ses arêtes et par les pôles des faces respectivement opposées se couperont tous trois suivant une même droite.

Les polaires des trois arêtes d'un angle trièdre, les polaires relatives à chacune des arêtes perceront les plans des faces respectivement opposées en trois points qui appartiendront à une même droite.

Les deux droites seront polaires l'une de l'autre, par rapport à la surface du second ordre dont il s'agit.

Démonstration. Chacune des deux parties de ce théorème résultant de l'autre, par la théorie des polaires réciproques, il nous suffira de démontrer la première.

Pour y parvenir, prenons les trois arêtes de l'angle trièdre dont il s'agit pour les axes des coordonnées, et supposons qu'alors l'équation de la surface du second ordre soit

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dyz+2Ezx+2Fxy+2Gx+2Hy+2Kz+L=0\,;$$

les plans conduits par les arêtes et par les pôles des faces respectivement opposées auront respectivement pour équations

$$\{EH^2-(DG+FK)H+BKG+L(FD-BE)\}y-\{FK^2-(EH+DG)K+CGH+L(DE-CF)\}z=0\,,$$

$$\{FK^2-(EH+DG)K+CGH+L(DE-CF)\}z-\{DG^2-(FK+EH)G+AHK+L(EF-AD)\}x=0\,,$$

$$\{DG^2-(FK+EH)G+AHK+L(EF-AD)\}x-\{EH^2-(DG+FK)H+BKG+L(FD-BE)\}y=0\,;$$

or, il est manifeste que chacune de ces trois équations est comportée par les deux autres ; donc les plans qu'elles expriment se coupent tous trois suivant une même droite dont la double équation est

$$\{DG^2-(EH+FK)G+AHK+L(EF-AD)\}x$$

$$=\{EH^2-(FK+DG)H+BKG+L(FD-BE)\}y$$

$$=\{FK^2-(DG+EH)K+CGH+L(DE-CF)\}z\,;$$

ce qui démontre le théorème.

Si le sommet de l'angle trièdre est au centre de la surface directrice, le théorème devient celui-ci :

8. *Si un angle trièdre a son sommet au centre d'une surface du second ordre,*

Les plans conduits par ses arêtes et par les diamètres conjugués aux plans des faces respectivement opposées se coupent tous trois suivant une même droite.

Les plans diamètraux conjugués aux trois arêtes coupent les plans des faces respectivement opposées suivant trois droites qui sont situées dans un même plan.

Ce plan est le diamètral conjugué de la droite dont il s'agit.

Si la surface du second ordre est une sphère, on a alors ce théorème :

Les plans conduits par les arêtes d'un angle trièdre, perpendiculairement à ceux des faces respectivement opposées, se coupent tous trois suivant une même droite.

Les plans conduits par le sommet d'un angle trièdre, perpendiculairement à ses arêtes, coupent les plans des faces respectivement opposées suivant trois droites situées dans un même plan.

Le plan et la droite dont il s'agit sont perpendiculaires l'un à l'autre.

En d'autres termes :

Deux angles trièdres SUPPLÉMENTAIRES *l'un de l'autre ayant même sommet,*

Les plans qui contiennent leurs arêtes correspondantes se coupent tous trois suivant une même droite.

Les droites suivant lesquelles se coupent les plans des faces correspondantes sont toutes trois dans un même plan.

Et ce plan et cette droite sont perpendiculaires l'un à l'autre.

Supposons que, dans le théorème (7), la surface du second ordre soit une surface conique, de même sommet que l'angle trièdre, et soit mené un plan transversal quelconque; ce plan coupera la surface conique suivant une ligne du second ordre et l'angle trièdre suivant un triangle; il coupera en outre les droites conjuguées aux trois faces de l'angle trièdre en trois points qui seront, par rapport à la courbe, les pôles des trois côtés du triangle; il coupera enfin les plans conjugués aux arêtes suivant trois droites qui seront, par rapport à la même courbe, les polaires des sommets du triangle; on aura donc ce théorème de géométrie plane :

9. *Un triangle et une ligne du second ordre étant situés dans un même plan,*

Les droites qui joignent les sommets du triangle aux pôles des côtés respectivement opposés se coupent toutes trois au même point.

Les points de concours des directions des côtés du triangle et des polaires des sommets respectivement opposés appartiennent tous trois à une même droite.

Et cette droite et ce point sont polaires l'un de l'autre.

Ce théorème donne naissance à plusieurs autres.

Si, par exemple, le triangle est inscrit ou circonscrit à la courbe, on retombe sur le théorème (1) qui n'est ainsi qu'un cas particulier de celui-ci.

Si l'un des sommets du triangle est au centre de la courbe, on obtient ce théorème :

10. *Les droites menées par les sommets d'un triangle, paral-*

lèlement aux conjugués des diamètres d'une conique parallèles à ses côtés, concourent toutes trois en un même point.

Et, si cette conique est remplacée par deux droites perpendiculaires l'une à l'autre, le théorème se changera en celui-ci :

11. *Si, par les sommets d'un triangle, on mène des droites faisant, avec une droite quelconque, des angles supplémentaires respectifs de ceux que font les côtés opposés avec cette même droite, ces trois droites concourront en un même point.*

Si dans le théorème (9) la conique devient infiniment petite, en restant homothétique avec une autre conique donnée, on aura ce théorème :

12. *Si, par les sommets d'un triangle on mène des diamètres à une conique tracée sur son plan, les conjugués de ces diamètres couperont les directions des côtés respectivement opposés en trois points qui appartiendront à une même droite.*

Si l'on remplace la conique par deux droites perpendiculaires l'une à l'autre, le théorème se changera en celui-ci :

13. *Si l'on mène des droites aux trois sommets d'un triangle, de l'un quelconque des points de son plan, les perpendiculaires menées à ces droites, par ce même point, rencontreront les directions des côtés respectivement opposés en trois points qui appartiendront à une même droite.*

Considérons une conique tracée sur une surface du second ordre et un triangle dans son plan ; les plans polaires des sommets du triangle, pris par rapport à la surface courbe, passeront par les polaires de ces mêmes sommets, prises dans la conique ; et les polaires des côtés du triangle, prises par rapport à la surface courbe, passeront par les pôles de ces mêmes côtés, pris dans la conique ; or, ces trois polaires doivent concourir en un même point, pôle du plan du triangle, par rapport à la surface courbe ; d'où il suit que le théorème (9) peut prendre cet énoncé plus général :

14. *Un triangle et une surface quelconque du second ordre existant ensemble dans l'espace,*

Les plans déterminés par les sommets du triangle et par les polaires des côtés respectivement opposés se coupent tous trois suivant une même droite.

Les points où les plans polaires des sommets du triangle coupent les directions des côtés respectivement opposés appartiennent tous trois à une même droite.

Et ces deux droites sont polaires réciproques par rapport à la surface du second ordre dont il s'agit.

Nous pourrions démontrer ce théorème d'une autre manière qui consisterait à le déduire, par une transformation polaire, du théorème (7); nous en conclurions alors le théorème (9) de géométrie plane.

En supposant que la surface du second ordre devient infiniment petite, en restant homothétique avec une surface donnée, on obtient une nouvelle démonstration du théorème (8); et, en supposant que le plan de la conique soit tangent à la surface du second ordre, on obtient une nouvelle démonstration du théorème (12).

On pourrait ajouter à ce qui précède plusieurs autres théorèmes relatifs au système d'une conique et d'un triangle tracés dans son plan; mais nous préférons passer de suite à une proposition plus importante.

15. *THÉORÈME. Une surface quelconque du second ordre et un tétraèdre quelconque étant situés d'une manière quelconque dans l'espace,*

Les droites qui joignent les sommets du tétraèdre aux pôles des faces respectivement opposées sont quatre génératrices d'un même mode de génération d'une autre surface du second ordre.

Les droites, suivant lesquelles les plans des faces du tétraèdre sont coupés par les plans polaires des sommets respectivement opposés, sont quatre génératrices d'un même mode de génération d'une autre surface du second ordre.

Et, non seulement, ces deux nouvelles surfaces du second ordre sont polaires réciproques l'une de l'autre, par rapport à la surface du second ordre proposée, mais en outre les quatre génératrices de l'une sont polaires réciproques des quatre génératrices de l'autre, chacune à chacune.

Démonstration. Les deux parties de ce théorème résultant l'une de l'autre, par la théorie des polaires réciproques, il doit nous suffire de démontrer la première.

Par la première partie du théorème (7), les droites qui joignent trois sommets du tétraèdre aux pôles des faces respectivement opposées sont comprises dans trois plans se coupant suivant une même droite qui passe par le quatrième sommet; d'où il suit que cette dernière s'appuye à la fois sur les trois autres. Or, la droite qui joint le quatrième sommet au pôle de la face opposée a aussi ce sommet pour point commun avec cette quatrième droite; d'où il suit que celle-ci s'appuye à la fois sur les droites qui joignent les quatre sommets aux pôles des faces respectivement opposées. On peut donc mener, par chaque sommet du tétraèdre, une droite qui s'appuye à la fois sur les quatre droites dont il s'agit; ces quatre droites sont donc, en effet, quatre génératrices d'un même mode de génération d'une même surface du second ordre.

Les quatre droites qui, menées par les sommets du tétraèdre, s'appuyent ainsi, à la fois, sur les quatre autres, sont, comme nous en avons déjà fait la remarque (4), quatre génératrices du deuxième mode de génération de la surface du second ordre déterminée par les quatre premières.

Ce théorème est d'une grande généralité, et conduit à une multitude de propriétés nouvelles du tétraèdre.

Et, d'abord, si une ou plusieurs faces du tétraèdre dont il s'agit, sont tangentes à la surface du second ordre, ces faces auront pour pôles leurs points de contact avec elles; comme à l'inverse, si un ou plusieurs de ses sommets sont sur cette surface, leurs plans polaires seront les plans tangens à ces sommets, d'où l'on voit déjà que ce théorème comprend, comme cas particulier, celui que nous avons démontré directement ci-dessus (4).

Si l'on suppose un des sommets placé au centre de la surface, la première partie de ce théorème (15) donne celui-ci :

16. *Les parallèles menées, par les sommets d'un tétraèdre, aux conjugués des plans diamétraux d'une surface quelconque du second ordre, respectivement parallèles à ses faces, sont quatre génératrices d'un même mode de génération d'une autre surface du second ordre.*

Nous pouvons donc ajouter, d'après le théorème (6) que,

Par les points où ces quatre droites sont respectivement coupées par les plans des faces opposées, on peut faire passer une surface du second ordre tangente à ces quatre faces.

Si la surface du second ordre est supposée sphérique, on aura ce théorème :

Les perpendiculaires abaissées des sommets d'un tétraèdre sur les plans des faces respectivement opposées, sont quatre génératrices d'un même mode de génération d'une même surface du second ordre.

Si, dans le théorème (15), la surface du second ordre devient infiniment petite, en restant homothétique avec une surface donnée du même ordre, on en conclura celui-ci :

17. *Les plans diamétraux d'une surface du second ordre, conjugués aux diamètres de cette surface dont les directions passent par les sommets d'un tétraèdre, coupent les plans des faces respectivement opposées de ce tétraèdre suivant quatre génératrices d'un même mode de génération d'une autre surface du second ordre.*

Si la surface du second ordre est sphérique, ce théorème se modifiera comme il suit :

Les plans conduits par un même point quelconque de l'espace, perpendiculairement aux droites menées de ce point aux sommets d'un tétraèdre, coupent les plans des faces respectivement oppo-

tes de ce tétraèdre suivant quatre génératrices d'un même mode de génération d'une surface du second ordre.

Si les six arêtes du tétraèdre sont tangentes à la surface du second ordre, le théorème (15) devient celui-ci :

18. *Une surface du second ordre touchant à la fois les six arêtes d'un tétraèdre,*

Dans l'hexaèdre octogone circonscrit, dont les faces seront les plans tangens aux six points de contact, les diagonales joignant les sommets respectivement opposés seront quatre génératrices d'un même mode de génération d'une autre surface du second ordre.

Dans l'octaèdre hexagone inscrit, qui aura ses sommets aux six points de contact, les droites suivant lesquelles se couperont les plans des faces respectivement opposés seront quatre génératrices d'un même mode de génération d'une autre surface du second ordre.

Et ces deux surfaces seront polaires réciproques l'une de l'autre, relativement à la surface proposée.

Les pôles des faces d'un tétraèdre sont les sommets d'un deuxième tétraèdre dont les faces ont respectivement pour pôles les sommets du premier. Si les arêtes de celui-ci sont tangentes à la surface directrice du second ordre, les arêtes correspondantes de l'autre en seront les tangentes conjuguées, et le précédent théorème pourra s'énoncer ainsi :

19. *Si les six arêtes d'un tétraèdre sont toutes tangentes à une même surface du second ordre, les conjuguées de ces tangentes sont les six arêtes d'un nouveau tétraèdre qui pourra être dit conjugué au premier.*

Les droites qui joindront les sommets respectivement opposés, dans les deux tétraèdres, seront quatre génératrices d'un même mode de génération d'une autre surface du second ordre.

Les intersections des plans des faces respectivement opposées, dans les deux tétraèdres, seront quatre génératrices d'un même mode de génération d'une autre surface du second ordre.

Et ces deux surfaces seront polaires réciproques l'une de l'autre, relativement à celle que touchent les douze arêtes des deux tétraèdres.

Si l'on suppose, dans le théorème (15), que la surface directrice se réduit à une conique, on en conclura celui-ci :

20. *Une conique et un tétraèdre existant ensemble dans l'espace, les droites qui joignent les sommets du tétraèdre avec les pôles des droites suivant lesquelles le plan de cette conique coupe les plans des faces respectivement opposées, sont quatre génératrices d'un même mode de génération d'une même surface du second ordre.*

Si l'un des axes de la conique devient nul, elle se réduit à une droite d'une longueur limitée, et le théorème se change dans celui qui suit :

21. *Une transversale perçant les plans des quatre faces d'un tétraèdre, et deux points fixes étant pris arbitrairement sur cette transversale ; si l'on joint par une droite chaque sommet du tétraèdre avec le point de cette transversale, quatrième harmonique, aux deux points fixes et à celui où elle perce le plan de la face opposée, on obtiendra ainsi quatre génératrices d'un même mode de génération d'une surface du second ordre.*

Si l'un des points fixes était à l'infini, on aurait une autre proposition que nous nous dispenserons d'énoncer.

Si la surface directrice du théorème (15) est une surface conique, on obtiendra le théorème suivant :

22. *Les plans diamétraux d'une surface conique du second ordre, conjugués aux droites qui joignent son sommet aux quatre sommets d'un tétraèdre, coupent les plans des faces respectivement opposées suivant quatre génératrices d'un même mode de génération d'une surface du second ordre.*

Ce théorème aurait pu être déduit de celui qui le précède (20), au moyen d'une transformation polaire. Il n'est, au surplus, qu'un cas particulier du théorème (17).

On peut supposer que la surface conique devient le système de deux plans, que ces plans se coupent à angles droits, qu'ils sont parallèles, que l'un d'eux passe à l'infini; ce qui offrira tout autant de théorèmes différens.

Les théorèmes (20) et (22) donnent lieu à deux autres théorèmes plus généraux, susceptibles de diverses conséquences.

Si, en effet, par la conique, on conçoit une surface quelconque du second ordre, la polaire, par rapport à cette surface du second ordre, d'une droite située dans le plan de la conique, percera ce plan en un point qui sera précisément le pôle de cette droite, par rapport à cette même conique; et si, dans la surface conique, on inscrit une surface quelconque du second ordre, la polaire, par rapport à cette dernière surface, d'une droite menée par le sommet du cône, sera comprise dans le plan diamètral de ce même cône conjugué à la droite dont il s'agit; nos deux théorèmes prendront donc la forme suivante :

23. *Une surface du second ordre et un tètraèdre existant ensemble dans l'espace,*

Les droites menées des sommets du tètraèdre aux points où un plan fixe quelconque est percé par les polaires de ses intersections, avec les plans des faces respectivement opposées, sont quatre génératrices d'un même mode de génération d'une autre surface du second ordre.

Les droites suivant lesquelles les plans des faces du tètraèdre sont coupés par les plans conduits par un point fixe quelconque, et par les polaires des droites qui joignent ce point fixe aux sommets respectivement opposés, sont quatre génèratrices d'un même mode de génération d'une autre surface du second ordre.

Si le plan et le point fixe sont polaires réciproques l'un de l'autre, il en sera de même des deux nouvelles surfaces du second ordre.

Si, dans la première partie du théorème, le plan transversal passe à l'infini, on retombe de nouveau sur le théorème (16), et si, dans la seconde, on suppose que le point fixe coïncide avec le centre de la surface, on retrouve le théorème (17).

Si, dans ce qui précède, les faces du tétraèdre avaient pour pôles, relativement à la surface du second ordre, les sommets repectivement opposés, ce qui, pour une même surface fixe du second ordre, peut avoir lieu dans une infinité de tétraèdre; chaque arête aurait pour polaire l'arête opposée, et alors les théorèmes ci-dessus n'auraient plus d'application. Mais, en considérant ces tétraèdres relativement à une deuxième surface fixe du second ordre, ils se trouveront jouir de diverses propriétés bien remarquables, dont l'examen fera partie d'un autre travail. Nous nous bornerons, pour le présent, à en extraire, sans les démontrer, les propositions suivantes :

24. *Deux surfaces du second ordre étant données dans l'espace, si l'on conçoit un angle trièdre mobile et variable autour de son sommet fixe, tel que les polaires de ses arêtes, relatives à la première de ces deux surfaces, soient constamment dans les plans des faces respectivement opposées;*

1.° *Les points où les arêtes de l'angle trièdre variable perceront la deuxième surface seront les sommets d'un octaèdre hexagone variable, inscrit à cette deuxième surface, lequel sera constamment circonscrit à une troisième surface fixe du second ordre.*

2.° *Les surfaces coniques circonscrites à la deuxième surface, suivant ses intersections avec les trois faces de l'angle trièdre variable, envelopperont constam-*

1.° *Les plans tangens menés à la deuxième surface par les polaires des arêtes de l'angle trièdre variable seront les faces d'un hexaèdre octogone variable, circonscrit à cette deuxième surface, lequel sera constamment inscrit à une troisième surface fixe du second ordre.*

2.° *Les surfaces coniques circonscrites à la deuxième surface, dont les sommets seront les pôles des faces de l'angle trièdre variable, se couperont constam-*

ment une quatrième surface fixe du second ordre.	*ment sur une quatrième surface fixe du second ordre.*

Si le sommet fixe de l'angle trièdre variable est le centre même de la première surface fixe du second ordre, ses arêtes seront évidemment trois diamètres conjugués de cette surface, et il en résultera les propositions suivantes :

1.° *Si, par un point fixe, on conduit trois droites mobiles, constamment parallèles à trois diamètres conjugués d'une surface fixe du second ordre, ces droites perceront une deuxième surface fixe du second ordre aux sommets d'un octaèdre hexagone variable inscrit, lequel sera constamment circonscrit à une troisième surface fixe du même ordre.*

2.° *Si, par un point fixe, on conduit trois plans mobiles, constamment parallèles à trois plans diamétraux conjugués d'une surface fixe du second ordre, les surfaces coniques circonscrites à une deuxième surface fixe du second ordre, suivant ses intersections avec ses plans mobiles, envelopperont constamment une troisième surface fixe du même ordre.*

3.° *Si, six plans mobiles dans l'espace et parallèles deux à deux sont constamment parallèles à trois plans diamétraux conjugués d'une première surface fixe du second ordre, et tangens à une deuxième surface fixe de cet ordre, ces plans formeront un parallélipipède variable circonscrit, lequel sera constamment inscrit à une troisième surface fixe du même ordre.*

4.° *Le lieu des points de l'espace par lesquels on peut mener, à une surface fixe du second ordre, trois tangentes respectivement parallèles à trois diamètres conjugués d'une deuxième surface fixe de cet ordre, est une troisième surface fixe du même ordre.*

Ces théorèmes sont susceptibles de nombreuses conséquences que nous nous réservons de développer dans un autre article où nous ferons connaître diverses autres propriétés de l'angle dièdre, de l'angle trièdre et du tétraèdre, considérés par rapport à une surface du second ordre (*).

P. S. Nous nous apercevons, en terminant, d'une inadvertance que nous devons nous empresser de réparer.

Immédiatement avant le n.° 13, il faut lire ce qui suit :

12 bis. *Si des rayons incidens, partant des trois sommets d'un triangle, vont concourir en un même point d'une droite réfléchissante, située d'une manière quelconque dans son plan, les rayons réfléchis rencontreront les directions des côtés respectivement opposés en trois points qui appartiendront à une même droite.*

Si l'on remplace la conique par un cercle, on obtiendra cet autre théorème, déjà énoncé par M. Bobillier (*Annales*, tom. XVIII, pag. 185).

13. *Si, de l'un quelconque des points du plan d'un triangle, on mène des droites à ses sommets, etc., etc.*

Les théorèmes (12 *bis*) et (13), ont leurs analogues dans l'espace, qui se

---

(*) M. Chasles désire que, dès aujourd'hui, nous fassions savoir à nos lecteurs, 1.° qu'il nous a adressé, sous la date du 8 juillet dernier, un mémoire sur les *projections stéréographiques*, dont le contenu renferme quelques propositions déjà publiées par M. Bobillier dans la *Correspondance* de M. Quetelet (tom. IV, pag. 153) ; 2.° que, par une lettre de Nice, en date du 15 janvier dernier, il nous avait déjà annoncé être depuis long-temps en possession de ces propositions et d'autres analogues. Nous nous empressons de faire cette déclaration pour conserver les droits de M. Chasles, dans le cas où l'abondance des matières nous contraindrait de différer la publication de son travail.

M. Chasles désire également qu'on sache qu'il est en état de remplacer par de la géométrie pure les quelques lignes de calcul que renferme le présent mémoire.

J. D. G.

déduisent du théorème (22), comme ceux-là se déduisent du théorème (12); les voici :

Si des plans, conduits par les quatre sommets d'un tétraèdre, se coupent suivant une même droite tracée dans un plan fixe quelconque les plans conduits par cette droite, de manière à faire, dans un autre sens, les mêmes angles avec le plan fixe, couperont les plans des faces respectivement opposées du tétraèdre, suivant quatre génératrices d'un même mode de génération d'une surface du second ordre.

Si, de l'un quelconque des points de l'espace, on mène des droites aux quatre sommets d'un tétraèdre, les plans conduits par le même point, perpendiculairement à ces droites, couperont les plans des faces respectivement opposées, suivant quatre génératrices d'un même mode de génération d'une surface du second ordre.

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Recherche des relations entre les rayons des cercles qui touchent trois droites données sur un plan et entre les rayons des sphères qui touchent quatre plans donnés dans l'espace;

Par M. J. Steiner.

I. Soient a, b, c les trois côtés d'un triangle; ces côtés, considérés comme des droites indéfinies, divisent le plan du triangle en *sept* régions, dont une seule finie qui est le triangle lui-même. Trois des six autres sont terminées chacune par un côté du triangle et les prolongemens des deux autres au-delà des extrémités de celui là. Quant aux trois dernières ce sont des angles respectivement, opposés à ceux du triangle.

Comme trois conditions sont nécessaires pour déterminer un cercle, ce n'est que dans les quatre premières régions que l'on peut se proposer d'inscrire des cercles. L'un de ces cercles sera intérieur au triangle ; c'est proprement le cercle *inscrit*, dont nous désignerons le rayon par r; les trois autres seront ce que M. Lhuilier a appelé les cercles *ex-inscrits*; nous désignerons respectivement leurs rayons par α, β, γ, suivant les côtés du triangle sur lesquels ils s'appuyeront. On démontre aisément que ces quatre cercles sont touchés à la fois par celui que l'on fait passer par les milieux des côtés du triangle.

Soit T l'aire du triangle ; en considérant les triangles qui ayant pour bases les trois côtés a, b, c du triangle donné et pour sommets les centres des quatre cercles, on a

$$\left.\begin{aligned} 2T&=r(a+b+c)\ , \\ 2T&=\alpha(b+c-a)\ , \\ 2T&=\beta(c+a-b)\ , \\ 2T&=\gamma(a+b-c)\ . \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

En prenant la somme des produits respectifs de ces équations par $-\alpha\beta\gamma$, $+\beta\gamma r$, $+\gamma\alpha r$, $+\alpha\beta r$, il vient, en divisant $2T$,

$$\alpha\beta\gamma=r(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)\ ,$$

ou bien

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\ ; \qquad (2)$$

c'est-à-dire, *l'inverse du rayon du cercle inscrit à un triangle est égal à la somme des inverses des rayons des trois cercles ex-inscrits au même triangle* (*).

Ou, en d'autres termes, *le parallélipipède rectangle, construit sur les rayons des trois cercles ex-inscrits, est équivalent à la somme des trois parallélipipèdes rectangles construits sur ces mêmes rayons pris deux à deux et sur le rayon du cercle inscrit.*

Au moyen de la relation (2) le rayon de chacun des quatre cercles se trouve déterminé par les rayons des trois autres.

Si le triangle est équilatéral, on a

$$\alpha=\beta=\gamma=3r=h\ ,$$

h étant la hauteur du triangle.

II. En observant que

$$16T^2=(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)\ ;$$

le produit des équations (1) donne, en réduisant

$$T^2=\alpha\beta\gamma r\ , \qquad (3)$$

d'où

$$T=\sqrt{\alpha\beta\gamma r}\ ;$$

c'est-à-dire, *l'aire d'un triangle est égal à la racine carrée du du produit des rayons des quatre cercles qui touchent à la fois ses trois côtés*. Théorème publié pour la première fois par Mahieu, et

(*) Il y a plusieurs mois que ce théorème nous a été adressé, avec plusieurs autres, par M. Bobillier, dans une note que le défaut d'espace nous a empêché jusqu'ici de publier.

J. D. G.

postérieurement par M. Lhuilier. (*Annales*, tom. I, pag. 150) (*).

Pour le triangle sphérique, on aurait

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}T=\frac{\sqrt{\text{Tang.}\alpha\text{Tang.}\beta\text{Tang.}\gamma\text{Tang.}r}}{2\text{Sin.}\frac{1}{2}a.\text{Sin.}\frac{1}{2}b.\text{Sin.}\frac{1}{2}c}$$

Si de l'équation (3) on élimine tour à tour les quatre rayons, au moyen de la relation (2), on trouvera

$$T^2=\frac{\alpha^2\beta^2\gamma^2}{\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta}=r^2.\frac{\beta^2\gamma^2}{\beta\gamma-r(\beta+\gamma)}=r^2.\frac{\gamma^2\alpha^2}{\gamma\alpha-r(\gamma+\alpha)}=r^2.\frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha\beta-r(\alpha+\beta)}. \quad (4)$$

Des équations (1) on tire (3)

$$\left.\begin{aligned} a&=\frac{\alpha-r}{\alpha r}.T=(\alpha-r)\sqrt{\frac{\beta\gamma}{\alpha r}}\,, \\ b&=\frac{\beta-r}{\beta r}.T=(\beta-r)\sqrt{\frac{\gamma\alpha}{\beta r}}\,, \\ c&=\frac{\gamma-r}{\gamma r}.T=(\gamma-r)\sqrt{\frac{\alpha\beta}{\gamma r}}\,; \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

d'où

$$\frac{a\alpha}{\alpha-r}=\frac{b\beta}{\beta-r}=\frac{c\gamma}{\gamma-r}=\frac{T}{r}\,; \qquad (6)$$

et par suite (3)

(*) Ce théorème fait aussi partie de la note de M. Bobillier.

J. D. G.

$$abc=\frac{(\alpha-r)(\beta-r)(\gamma-r)}{r^2}.T. \qquad (7)$$

Soit R le rayon du cercle circonscrit ; on sait que

$$R=\frac{abc}{4T} \;;$$

donc (7)

$$R=\frac{(\alpha-r)(\beta-r)(\gamma-r)}{4r^2}, \qquad (8)$$

En éliminant r de cette valeur, au moyen de la relation (2), on trouvera

$$R=\frac{(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)}{4(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)} \quad (*) . \qquad (9)$$

(*) D'après les équations (5) on peut écrire

$$abc=T^3\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\alpha}\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\beta}\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\gamma}\right)$$

ou bien, en développant et ordonnant,

$$abc=T^3\left\{\frac{1}{r^3}-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)\frac{1}{r^2}+\left(\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}+\frac{1}{\alpha\beta}\right)\frac{1}{r}-\frac{1}{\alpha\beta\gamma}\right\}.$$

Au moyen de la relation (2), les deux premiers termes de ce développement disparaissent, et l'on a simplement

Si, de la même valeur, on élimine successivement α, β, γ, au moyen de la même relation, on trouvera

$$R=\frac{(\beta-\gamma)(\gamma-r)(\beta+\gamma)}{4(\beta\gamma-\beta r-\gamma r)}=\frac{(\gamma-r)(\alpha-r)(\gamma+\alpha)}{4(\gamma\alpha-\gamma r-\alpha r)}=\frac{(\alpha-r)(\beta-r)(\alpha+\beta)}{4(\alpha\beta-\alpha r-\beta r)}. \quad (10)$$

III. Si le triangle est supposé rectangle, en désignant par c l'hypothénuse, on aura $2T=ab$, au moyen de quoi les équations (1) deviendront

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=\frac{ab}{b+c-a},\\ \beta&=\frac{ab}{c+a-b},\\ \gamma&=\frac{ab}{a+b-c};\\ r&=\frac{ab}{a+b+c}.\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

$$abc=T\left(\frac{T^2}{\beta\gamma r}+\frac{T^2}{\gamma\alpha r}+\frac{T^2}{\alpha\beta r}-\frac{T^2}{\alpha\beta\gamma}\right);$$

ou bien (3)

$$abc=T(\alpha+\beta+\gamma-r);$$

d'où enfin

$$R=\frac{1}{4}(\alpha+\beta+\gamma-r);$$

c'est-à-dire, *le rayon du cercle circonscrit à un triangle est le quart de l'excès de la somme des rayons des trois cercles ex-inscrits à ce triangle sur le rayon du cercle inscrit.* Cet élégant théorème appartient à M. Bobilier.

J. D. G.

En divisant chacune des trois premières par la dernière, il viendra, en chassant les dénominateurs,

$$r(a+b+c)=\alpha(b+c-a)=\beta(c+a-b)=\gamma(a+b-c) \;,$$

d'où on tirera aisément

$$\frac{\beta(\alpha-r)}{a}=\frac{\alpha(\beta-r)}{b}=\frac{r(\alpha+\beta)}{c} \;; \qquad (12)$$

Ainsi (11), si les trois côtés du triangle rectangle sont commensurables, les rayons des quatre cercles le seront aussi, et réciproquement (12).

Si, par exemple, il s'agit du triangle de Pythagore, pour lequel on a $a=3$, $b=4$, $c=5$, on aura

$$\alpha=2 \;,\quad \beta=3 \;,\quad \gamma=6 \;,\quad r=1 \;.$$

L'équation $a^2+b^2=c^2$ donne $2ab=(a+b)^2-c^2$ ou bien

$$2ab=(a+b+c)(a+b-c) \;;$$

mais les deux dernières équations (11) donnent

$$\gamma r=\frac{a^2b^2}{(a+b+c)(a+b-c)} \;;$$

donc

$$\gamma r = \frac{ab}{2} = T;$$

équation qui, comparée à l'équation (3), donne

$$\alpha\beta = \gamma r = T; \qquad (13)$$

c'est-à-dire, *dans tout triangle rectangle, le rectangle des rayons des cercles ex-inscrits, qui répondent aux deux côtés de l'angle droit, est équivalent au rectangle des rayons du cercle inscrit et du cercle ex-inscrit qui répond à l'hypothénuse, et l'un et l'autre sont équivalens à l'aire du triangle.*

IV. Soient a, b, c, d les quatre faces d'un tétraèdre dans leur ordre de grandeur, de la plus grande à la plus petite; ces faces, considérées comme des plans indéfinis, diviseront l'espace en *quinze* régions, dont *une* seule finie qui sera le tétraèdre lui-même. *Quatre* des quatorze restantes seront terminées chacune par une des faces du tétraèdre et par les prolongemens des plans des trois autres au-delà de celle-là. Il y en aura *six* dont chacune sera terminée par les prolongemens des plans des quatre faces au-delà d'une même arête. Enfin, les quatre dernières seront des angles trièdres opposés à ceux du tétraèdre.

Comme quatre conditions sont nécessaires pour déterminer une sphère, ce n'est que dans les onze premières régions qu'on peut se proposer d'inscrire des sphères. Mais il est aisé voir qu'il ne saurait y en exister à la fois dans les six régions sur les arêtes, opposées deux à deux, et que l'existence d'une sphère, dans l'une d'elles, entraîne l'impossibilité d'en inscrire une dans la région qui lui est opposée.

Il ne saurait donc y avoir plus de huit sphères, une inscrite et sept ex-inscrites qui touchent à la fois les quatre faces d'un tétraèdre, considérées comme des plans indéfinis; et ces dernières se divisent en deux classes, savoir: quatre sphères ex-inscrites aux faces, et les trois autres ex-inscrites aux arêtes.

Soit r le rayon de la sphère inscrite; soient α, β, γ, δ les rayons des quatre sphères respectivement ex-inscrites sur les faces a, b, c, d; soient α', β', γ' les rayons des sphères ex-inscrites respectivement sur les arêtes ad ou bc, bd ou ca, cd ou ab; soit enfin T le volume du tétraèdre.

En considérant les tétraèdres ayant leur sommet commun aux centres de ces différentes sphères et pour bases les faces du tétraèdre T, on trouvera aisément

$$3T=r(a+b+c+d)\ ; \qquad (1)$$

$$3T=\alpha(b+c+d=a)\ , \qquad (2)$$

$$3T=\beta(c+d+a-b)\ , \qquad (3)$$

$$3T=\gamma(d+a+b-c)\ , \qquad (4)$$

$$3T=\delta(a+b+c-d)\ , \qquad (5)$$

$$3T=\pm\alpha'(b+c-a-d)\ , \qquad (6)$$

$$3T=\pm\beta'(c+a-b-d)\ , \qquad (7)$$

$$3T=\pm\gamma'(a+b-c-d)\ ; \qquad (8)$$

les signes des seconds membres des trois dernières équations devant être pris de manière que ces seconds membres soient positifs.

Des équations (2, 3, 4, 5) on tire aisément

$$\left.\begin{aligned}
a&=\frac{3T}{4}\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}-\frac{1}{\alpha}\right),\\
b&=\frac{3T}{4}\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}+\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right),\\
c&=\frac{3T}{4}\left(\frac{1}{\delta}+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\gamma}\right),\\
d&=\frac{3T}{4}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\delta}\right).
\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (1) il viendra

$$\frac{2}{r}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}\;;\qquad(10)$$

c'est-à-dire, *la somme des inverses des rayons des sphères ex-inscrites sur les faces d'un tétraèdre, est double de l'inverse du rayon de la sphère qui lui est inscrite.*

Les mêmes valeurs (9) substituées dans les équations (6, 7, 8) donnent

$$\left.\begin{aligned} \pm\frac{2}{\alpha'}&=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\delta}-\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\gamma}\,, \\ \pm\frac{2}{\beta'}&=\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\delta}-\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\alpha}\,, \\ \pm\frac{2}{\gamma'}&=\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\,; \end{aligned}\right\}\quad(11)$$

c'est-à-dire, *la somme des inverses des rayons des sphères ex-inscrites sur deux des faces d'un tétraèdre, moins la somme des inverses des rayons des sphères ex-inscrites sur ses deux autres faces, est double de l'inverse du rayon de la sphère ex-inscrite sur l'arête des deux premières ou sur l'arête des deux dernières faces.*

On voit donc que les rayons de nos huit sphères sont liés les uns aux autres par quatre relations au moyen desquelles quatre d'entre eux sont déterminés par les quatre autres.

En ajoutant et retranchant tour à tour chacune des équations (11) à l'équation (10) on aura

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\delta}&=\frac{1}{r}\pm\frac{1}{\alpha'}\,, \\ \frac{1}{\beta}+\frac{1}{\delta}&=\frac{1}{r}\pm\frac{1}{\beta'}\,, \\ \frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}&=\frac{1}{r}\pm\frac{1}{\gamma'}\,; \end{aligned}\right\}(12)\qquad \left.\begin{aligned} \frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}&=\frac{1}{r}\mp\frac{1}{\alpha'}\,, \\ \frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\alpha}&=\frac{1}{r}\mp\frac{1}{\beta'}\,, \\ \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}&=\frac{1}{r}\mp\frac{1}{\gamma'}\,, \end{aligned}\right\}(13)$$

c'est-à-dire , *la somme des inverses des rayons des sphères ex-inscrites sur deux faces d'un tétraèdre , est égale à la somme ou à la différence des inverses des rayons de la sphère inscrite et de la sphère ex-inscrite sur l'arête de ces deux faces ou sur son opposée.*

Si le tétraèdre est régulier , on a $\alpha=\beta=\gamma=\delta=2r$, $\alpha'=\beta'=\gamma'=\infty$; d'où résulte ce théorème :

Si , à un angle trièdre régulier dont les trois angles plans sont les deux tiers d'un angle droit, on inscrit une suite de sphères , de manière que chacune d'elles touche celle qui la précède immédiatement, les rayons de ces sphères formeront une progression géométrique dont la raison sera deux.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problème de géométrie.

Si , à un angle trièdre donné quelconque , on inscrit une suite de sphères , de telle sorte que chacune d'elles touche celle qui la précède immédiatement, quelle loi suivront les rayons des sphères ainsi inscrites ?

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

Recherches sur les courbes algébriques de tous les degrés ;

Par M. le docteur PLUCKER, professeur à l'Université de Bonn.

JE me propose, dans l'essai que l'on va lire, de donner quelques exemples d'une méthode à l'aide de laquelle on peut déduire, immédiatement et sans aucune sorte de calcul, un grand nombre de propriétés générales des courbes de tous les degrés, de la simple considération de la constitution algébrique des équations qui les représentent. Dans un autre essai, qui suivra de près celui-ci, j'étendrai ces considérations aux surfaces courbes.

§. I.

On sait que cinq points sont nécessaires sur un plan pour déterminer complètement une courbe du second degré, et que, généralement parlant, il n'en saurait passer qu'une seule par cinq points donnés ; d'où il suit qu'on en peut faire passer une infinité par quatre points donnés ; il n'est donc pas étonnant, d'après cela, que deux courbes de ce degré se coupent en quatre points.

Mais on sait aussi que neuf points suffisent sur un plan pour déterminer complètement une courbe du troisième degré, et, qu'en général, il n'en saurait passer plus d'une par neuf points donnés ; on doit donc, d'après cela, éprouver quelque surprise de voir deux courbes de ce degré se couper en neuf points.

Pareillement, quatorze points suffisant sur un plan pour déterminer complètement une courbe du quatrième degré ; et une courbe unique de ce degré pouvant en général être conduite par ces quatorze points ; on ne saurait voir sans surprise deux courbes de ce degré se couper en seize points.

En général, le nombre des points nécessaires, sur un plan, pour déterminer complètement une courbe du $m.^{ieme}$ degré est, comme l'on sait, $\frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}-1$, et il n'en saurait passer plus d'une de ce degré par un tel nombre de points. D'un autre côté, deux courbes de ce degré, tracées sur un même plan, peuvent se couper en m^2 points. Si donc on choisit le nombre entier m, de telle sorte que m^2 soit au moins égal à $\frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}-1$, ce qui arrivera pour toutes les valeurs de $m>2$; on aura un exemple de deux courbes du même degré se coupant en autant de points au moins qu'en exigerait la détermination complète de l'une d'elles.

Cramer, dans son *Introduction à l'analyse des courbes algébriques*, est le premier, je crois, qui ait signalé cette espèce de paradoxe qui s'explique aisément en remarquant que, lorsqu'il est question du nombre des points nécessaires et suffisans sur un plan, pour déterminer complètement une courbe d'un degré déterminé, on sous-entend toujours que ces points sont pris au hasard, et ne sont liés entre eux par aucune relation particulière. Je l'avais rencontré moi-même en discutant la théorie de l'osculation des lignes courbes ; en cherchant à l'interpréter géométriquement, j'ai été conduit à quelques théorèmes assez singuliers au premier aspect, mais très-féconds en beaux corollaires ; ils ont déjà paru autre part, mais je crois devoir les reproduire ici avec plus de développemens. J'indiquerai ensuite brièvement quelques-unes des applications dont ils sont susceptibles.

§. II.

Bien qu'en général, passé $m=2$, le nombre m^2 des points d'intersections de deux courbes du $m.^{ieme}$ degré soit plus grand que le nombre $\frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}-1$ des points nécessaires pour déterminer l'une d'elles, on peut néanmoins faire passer par ces m^2 points, non seulement les deux courbes dont ils sont les intersections, mais encore une infinité d'autres courbes du $m.^{ieme}$ degré, de sorte qu'il faut se donner un point de plus pour déterminer complètement une d'entre elles. Si, en effet, on représente par

$$M=0\ ,\qquad M'=0\ ,$$

les équations de ces deux courbes, l'équation du même degré

$$\mu M+M'=0\ ,$$

dans laquelle μ est supposé un coefficient constant indéterminé, exprimera une infinité d'autres courbes du $m.^{ieme}$ degré, passant par les m^2 points d'intersection des deux premières; mais si l'on se donne arbitrairement un nouveau point de l'une d'elles, outre ceux-là il en résultera une équation linéaire pour la détermination de μ; de sorte qu'alors la courbe sera complètement déterminée.

Cela posé, soient $\frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}-2$ points donnés sur un plan; concevons qu'on ait décrit toutes les courbes, en nombre infini, qui peuvent passer par ces points, et considérons deux d'entre elles en particulier; elles auront m^2 points d'intersection, savoir : les $\frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}-2$ points donnés, et $m^2-\left(\frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}-2\right)$ nouveaux points; or, d'après ce qui précède, par ces m^2 points, on pourra faire passer une infinité d'autres courbes du $m.^{ieme}$ degré, lesquelles seront les autres courbes de la série dont il s'agit, puisqu'elles passeront par les $\frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}-2$ points donnés; donc toutes ces courbes passent aussi par les $m^2-\left(\frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}-2\right)$ points restans; en invoquant donc le principe de dualité on aura ces deux théorèmes :

THÉORÈME I. Toutes les courbes du $\mathrm{m}.^{ieme}$ *degré qui passent par les* $\frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}-2$ *mêmes points fixes, se coupent en outre aux* $m^2-\frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}+2$, *autres mêmes points fixes.*

Ainsi, par exemple, toutes les courbes du troisième degré qui passent par les huit mêmes points fixes, se coupent en outre en un neuvième même point fixe. De même encore, toutes les courbes du quatrième degré qui passent par les treize mêmes points fixes, se coupent toutes en outre en trois autres mêmes points fixes, et ainsi du reste.

THÉORÈME I. Toutes les courbes de $\mathrm{m}.^{ieme}$ *classe qui touchent les* $\frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}-2$ *mêmes droites fixes, touchent en outre les* $m^2-\frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}+2$, *autres mêmes droites fixes.*

Ainsi, par exemple, toutes les courbes de troisième classe qui touchent les huit mêmes droites fixes, touchent en outre une neuvième même droite fixe. De même encore, toutes les courbes de quatrième classe qui touchent les treize mêmes droites fixes, touchent en outre les trois autres mêmes droites fixes, et ainsi du reste.

Rien n'empêche d'admettre, dans le théorème qui précède, que tous ou partie des points fixes donnés se confondent par groupes plus ou moins nombreux en un point unique, auquel cas les courbes dont il s'agit auront en ces points des contacts d'ordres plus ou moins élevés.

Ainsi, par exemple, au lieu de considérer toutes les courbes du troisième degré qui passent par les huit mêmes points fixes, on peut considérer toutes celles qui, passant par les deux mêmes points fixes, ont entre elles, en chacun de ces points, un contact de quatre points ou du troisième ordre ; et l'on verra, en vertu du théorème, qu'elles doivent se couper toutes en un troisième point.

Nous n'avons comparé, dans ce qui précède, que des courbes exprimées par des équations complètes dans lesquelles tous les coefficiens étaient supposés indéterminés ; mais en assujétissant ces courbes à certaines conditions, nous pourrons rabaisser, à volonté, le nombre des constantes arbitraires de leur équation commune. Nous pourrons, par exemple, regarder comme donnés, un certain nombre de ces coefficiens pour toutes les courbes que nous comparons, ou bien supposer qu'il existe entre tous ou partie d'entre eux un certain nombre d'équations de condition. Ces considérations conduisent au théorème suivant plus général que celui que nous avions d'abord établi :

THÉORÈME II. Etant donnés n *coefficiens de l'équation générale du* m.ieme *degré à deux indéterminées, ou encore étant données* n *équations linéaires entre tous ou partie de ces coefficiens; toutes les courbes représentées par l'équation générale, ainsi modifiée et passant par les* $\frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}-(n+2)$ *mêmes points fixes donnés, se couperont en outre aux* $m^2-\frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}+(n+2)$ *autres mêmes points fixes.*

Il est évident que, dans l'application de ce théorème, on ne doit pas supposer $n>\frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}-1$.

§. III.

Notre théorème, sous sa première forme, ne saurait s'appliquer qu'aux courbes des degrés supérieurs au second ; mais, sous la seconde, il s'applique fort bien aux courbes du second degré. Il prend alors la forme particulière que voici :

Etant donnés n *coefficiens de l'équation générale du second degré à deux indéterminées, ou encore, étant données* n *équations linéaires entre tous ou partie de ces coefficiens ; toutes les courbes représentées par l'équation générale ainsi modifiée et passant par les* 4—n *mêmes points fixes donnés, se coupent en outre aux* n *autres mêmes points fixes.*

Ainsi l'équation générale du second degré à deux indéterminées étant

$$Ax^2+By^2+2Cxy+2Dx+2Ey+F=0\,, \tag{1}$$

dans laquelle il est permis de supposer F connu ; si l'on donne 1.° un des cinq autres coefficiens et trois points ; 2.° deux d'entre eux et deux points ; 3.° trois d'entre eux et un point ; 4.° enfin quatre d'entre eux, il y aura, dans tous les cas, un nombre infini de courbes représentées par l'équation (1), et toutes ces courbes passeront par les quatre mêmes points. Il en sera de même si, au lieu de se donner un certain nombre de ces coefficiens, on se donne un égal nombre d'équations entre tous ou partie d'entre eux. On va voir, par quelques exemples pris au hasard, avec quelle facilité on déduit de là la plupart des propriétés des courbes du second degré.

On sait que, dans l'hypothèse des coordonnées rectangulaires, l'équation (1) représente des hyperboles équilatères lorsqu'on a $A+B=0$; donc

Toutes les hyperboles équilatères qui passent par les trois mêmes points donnés, se coupent en outre en un quatrième point fixe.

Le système de deux droites perpendiculaires l'une à l'autre peut, comme l'on sait, être considéré comme une hyperbole équilatère ; en conséquence, les trois systèmes de bases et de hauteurs, d'un même triangle, peuvent être considérés comme trois hyperboles équilatères ayant trois points communs, qui sont les sommets du triangle ; elles doivent donc avoir un quatrième point commun ; et ainsi se trouve démontré que *les trois hauteurs de tout triangle concourent en un même point.*

Etant donné l'un des deux rapports $\frac{C}{A}$ ou $\frac{C}{B}$, on connaît deux diamètres conjugués de la courbe, dont un est parallèle à l'un des axes des coordonnées; donc

Toutes les coniques qui ont deux diamètres conjugués parallèles à deux droites fixes, et qui passent par trois points fixes, se coupent en outre en un quatrième point fixe.

La construction de ce quatrième point étant très-facile, on pourra trouver tant de points qu'on voudra, 1.° d'une conique dont on connaîtra quatre points, avec les directions de deux diamètres conjugués ; 2.° d'une conique dont on connaîtra trois points, avec les directions de deux systèmes de diamètres conjugués.

Et de là encore cet autre théorème :

Toutes les coniques qui passent par les quatre mêmes points fixes ont un système de diamètres conjugués parallèles à deux droites fixes.

On sait que l'équation

$$By+Cx+E=0$$

est celle du diamètre de la courbe (1) dont le conjugué est parallèle à l'axe des x; d'où il suit que, $\frac{E}{B}$ étant donnée, on connaîtra le point d'intersection de ce diamètre avec l'axe des y; c'est-à-dire, si cet axe rencontre la courbe, le point milieu de la corde interceptée. Etant donné un quelconque (a, b) des points de la direction de ce diamètre, on aura

$$Bb+Ca+E=0\ ,$$

c'est-à-dire, une équation linéaire entre les trois coefficiens B, C,

E. En connaissant de plus l'un quelconque (a', b') des points de la direction du diamètre dont le conjugué est parallèle à l'axe des y, on aura semblablement

$$Aa'+Cb'+D=0 \;;$$

c'est-à-dire, une équation linéaire entre les trois coefficiens A, C, D. Enfin, une droite quelconque étant donnée par l'équation

$$\alpha x+\beta y+\gamma=0 \,,$$

l'équation du diamètre dont le conjugué lui est parallèle sera

$$\alpha(By+Cx+E)=\beta(Ax+Cy+D) \;;$$

équation linéaire par rapport à A, B, C, D, E. On pourra se donner une, deux, trois ou quatre équations de la même forme. Dans ce dernier cas, en supposant un de ces coefficiens donné, ce qui est permis pourvu qu'on rende au dernier terme F son indétermination, ils seront tous complètement déterminés excepté celui-là. De ces considérations se déduisent, sur-le-champ, les théorèmes suivans :

Toutes les coniques qui passent par trois points donnés, et dans lesquelles les conjugués des diamètres parallèles à une même droite fixe vont concourir en un même point fixe, se coupent en outre en un quatrième point.

Si tant de coniques qu'on voudra passent toutes par les quatre mêmes points, les conjugués de leurs diamètres parallèles à une même droite fixe concourront tous en un même point fixe.

Ce dernier théorème, dû à M. Lamé (*Annales*, tom. VII, pag. 229), peut être complété de la manière suivante :

Si la droite, à laquelle les diamètres sont parallèles, tourne sur l'un quelconque des points de sa direction, le point de concours des conjugués de ces diamètres décrira une conique, lieu géométri-

ques des centres de toutes les coniques passant par les quatre points donnés (*).

Si deux coniques sont telles qu'elles interceptent, sur une même droite donnée, des cordes dont les milieux coïncident ; la même chose aura lieu pour toutes les coniques qui, passant par les quatre points d'intersection de ces deux là, couperont la droite donnée.

Généralement, *toutes les coniques passant par* 4—n *points donnés, et assujéties en outre à la condition que les conjugués de* n *de leurs diamètres, parallèles à* n *droites données, passent par* n *points fixes, se coupent en outre en* n *points.*

Si $n=4$, les coniques seront semblables et concentriques, de manière que les points d'intersection passeront à l'infini.

Pour dernier exemple, supposons deux points (a, b), (a', b') tels que l'un d'eux soit situé sur la polaire de l'autre relativement à la courbe (1) ; cette circonstance sera exprimée par l'équation

$$b(Bb'+Ca'+E)+a(Aa'+Cb'+D)+(Da'+Eb'+F)=0\ ,$$

ou

$$Aaa'+Bbb'+C(ab'+ba')+D(a+a')+E(b+b')+F=0\ ;$$

équation dont la symétrie prouve qu'alors réciproquement l'autre point se trouve situé sur la polaire du premier. Or, c'est là une équation linéaire entre les coefficiens de l'équation (1), et chaque système de deux pareils points en fournirait une semblable; donc

Toutes les coniques passant par 4—n *points donnés, et assujéties à la condition que, par rapport à elles, les polaires de* n *points donnés quelconques passent respectivement par autant de points*

Toutes les coniques touchant 4—n *droites données, et assujéties à la condition que, par rapport à elles, les pôles de* n *droites données quelconques soient situés respectivement sur autant de droi-*

(*) C'est précisément ce qui a été démontré à la pag. 106 du précédent volume.

J. D. G.

également donnés, se coupent toutes aux quatre mêmes autres points.

tes également données, touchent toutes les quatre mêmes autres droites fixes.

On voit de suite que ce dernier théorème conduit à ceux qui ont été démontrés auparavant, lorsqu'on suppose que les n pôles passent à l'infini.

Bonn, 8 juin 1828.

GÉOMÉTRIE DE SITUATION.

Recherches sur les lois générales qui régissent les courbes algébriques;

Par M. Bobillier, professeur à l'Ecole des arts et métiers de Châlons-sur-Marne.

Nous nous proposons, dans ce qui va suivre, de revenir de nouveau sur des propositions déjà démontrées, pour les établir d'une manière à la fois plus simple, plus directe et plus générale.

Soit une courbe quelconque du $m.^{ieme}$ degré, rapportée à deux axes quelconques et exprimée par l'équation

$$M=0\,, \qquad (1)$$

en x et y. L'équation de la tangente à cette courbe, en l'un quelconque (x',y') de ses points, sera, comme l'on sait,

$$\frac{\mathrm{d}M'}{\mathrm{d}x'}(x-x')+\frac{\mathrm{d}M'}{\mathrm{d}y'}(y-y')=0\;; \qquad (2)$$

les coordonnées x',y' du point de contact étant liées par l'équation de relation

$$M'=0\,. \qquad (3)$$

Si, laissant x' et y' indéterminés, on veut profiter de leur indétermination pour assujétir la tangente à passer par un point (a, b) donné sur le plan de la courbe, il faudra exprimer que l'équation (2) est satisfaite en y faisant simultanément $x=a$ et $y=b$, ce qui la changera en celle-ci

$$\frac{dM'}{dx'}(a-x')+\frac{dM'}{dy'}(b-y')=0\,,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{dM'}{dx'}(x'-a)+\frac{dM'}{dy'}(y'-b)=0\,; \qquad (4)$$

de sorte que les points de contact des tangentes à la courbe (1), issues du point (a, b), seront donnés par le système des deux équations (3) et (4), ou, ce qui revient au même, par la combinaison de l'équation (1) avec l'équation

$$\frac{dM}{dx}(x-a)+\frac{dM}{dy}(y-b)=0\,; \qquad (5)$$

ces points seront donc ceux où la courbe proposée sera coupée par celle qu'exprime l'équation (5).

L'équation (5) n'étant, comme l'équation (1), que du m.ième degré seulement, il s'ensuit que le nombre des points de contact, ni conséquemment le nombre des tangentes issues du point (a, b) ne saurait être supérieur à m^2 (*); mais nous allons voir que le

(*) C'est sans doute par de semblables considérations que Waring, dans ses *Miscellanea Analityca* que nous n'avons pas présentement sous la main, fixe à m^2 limite du nombre des tangentes qu'on peut mener à une courbe du m.ième degré, de l'un quelconque des points de son plan.

J. D. G.

nombre de ces tangentes est réellement inférieur à cette limite.

Lorsque des points sont donnés sur un plan par le système de deux équations en x et y, ils le sont également par le système de l'une d'elles et d'une combinaison quelconque de l'une et de l'autre. En conséquence, puisque les points de contact des tangentes issues du point (a,b) sont donnés par le système des deux équations (1) et (5), ils le seront aussi par la première de ces deux là, combinée avec l'équation

$$\frac{dM}{dx}(x-a)+\frac{dM}{dy}(y-b)=mM\,; \qquad (6)$$

laquelle sera ainsi, comme l'équation (5), celle d'une courbe coupant la proposée aux points de contact cherchés. Or, en vertu du théorème connu sur les fonctions homogènes, tous les termes de m dimensions en x et y disparaissent de celle-ci qui ne s'élève conséquemment qu'au $(m-1)^{ième}$ degré; en la combinant donc avec l'équation (1) elle ne donnera au plus que $m(m-1)$, systèmes de valeurs pour les coordonnées des points de contact; d'où il suit que le nombre des tangentes menées à la proposée par le point (a,b) ne pourra s'élever au-dessus de cette limite (*).

(*) De même que, par suite du théorème des fonctions homogènes, la limite m^2 fixée par Waring se trouve trop élevée, il se pourrait qu'en vertu de quelque autre théorème, inaperçu jusqu'ici, la limite $m(m-1)$ le fût trop aussi; car il faut bien remarquer que des deux équations (1) et (6), la première seule est quelconque, tandis que l'autre en est déduite d'une manière tout à fait particulière. Or, s'il était vrai qu'on ne pût pas mener à une courbe du $m.^{ième}$ degré $m(m-1)$ tangentes d'un même point, il serait faux que la polaire réciproque d'une courbe du $m.^{ième}$ degré dût s'élever au $[m(m+1)]^{ième}$ degré. MM. les commissaires de l'Académie royale des sciences ont donc été fondés à dire (*Bulletin des sciences mathématiques*, avril 1828, pag. 227) que cette dernière proposition était encore à démontrer. M. Poncelet nous a lui-même offert des exemples de courbes du troi-

L'équation (6) étant ainsi celle d'une courbe qui coupe la proposée en ses points de contact avec les tangentes qui lui sont menées du point quelconque (a, b) de son plan, et cette équation n'étant que du $(m-1)^{ieme}$ degré seulement; en invoquant le principe des polaires réciproques on sera conduit à établir ces deux théorèmes :

THÉORÈME I. Les points de contact des tangentes menées à une courbe du m.^{ieme} *degré, de l'un quelconque des points de son plan, sont tous situés sur une courbe du* $(m-1)^{ieme}$ *degré au plus* (*).

THÉORÈME I. Les tangentes menées à une courbe du m.^{ieme} *degré, par ses intersections avec une transversale rectiligne quelconque, touchent toutes une courbe du* $(m-1)^{ieme}$ *degré au plus* (*).

---

sième degré, auxquelles on ne pouvait mener que trois tangentes par un quelconque des points de leur plan; mais il ne nous en a point indiqué de ce degré, pour lesquelles ces tangentes soient au nombre de six. Il ne nous a pas même montré, ce qui aurait pu suffire, une courbe continue tracée arbitrairement à la main, de laquelle on vît clairement 1.° qu'aucune droite ne peut la couper en plus de trois points; 2.° que, néanmoins d'un certain point, on peut lui mener six tangentes.

J. D. G.

(*) M. Poncelet observe, avec beaucoup de raison (*Bulletin des sciences mathématiques*, mai 1828, pag. 301), que c'est par erreur que M. Bobillier et nous, avons attribué ce théorème à M. Vallès, attendu qu'il se trouve clairement indiqué à la pag. 215 de notre VIII.e volume. Du reste, l'erreur de M. Bobillier sur ce point est fort excusable, car il ne connaît pas notre VIII.e volume qui ne se trouve plus aujourd'hui dans la librairie; et quant à nous, si M. Poncelet veut bien prendre la peine d'ouvrir notre XVI.e volume, à la page 132, il y verra proposé à démontrer, comme nouveau, un théorème que nous avions nous-même démontré à la page 282 de notre IX.e volume, et il ne saurait raisonnablement exiger de nous que nous ayons plus de mémoire de ses œuvres que des nôtres. Puisse-t-il vivre assez long-temps pour apprendre, par sa propre expérience, qu'avec l'âge la mémoire se perd tout aussi bien que les cheveux.

J. D. G.

Cette courbe est ce que nous avons appelé (*Annales*, tom. XVIII, pag. 253) la *courbe polaire* du point dont il s'agit, par rapport à la courbe directrice proposée.

Cette courbe est ce que nous avons appelé (*Annales*, tom. XVIII, pag. 253) la *courbe polaire* de la droite dont il s'agit, par rapport à la courbe directrice proposée.

Si le point de départ (a, b) des tangentes est mobile sur un droite ayant pour équation $y=\alpha x$, on devra avoir $b=\alpha a$, ce qui changera l'équation (6) en celle-ci :

$$x\frac{\text{d}M}{\text{d}x}+y\frac{\text{d}M}{\text{d}y}-mM=a\left(\frac{\text{d}M}{\text{d}x}+\alpha\frac{\text{d}M}{\text{d}y}\right). \tag{7}$$

Si, dans cette équation, on considère a comme un paramètre variable, cette équation ne pourra être satisfaite que par les systèmes de valeurs qui satisferont à la fois aux deux suivantes :

$$x\frac{\text{d}M}{\text{d}x}+y\frac{\text{d}M}{\text{d}y}=mM\,,\qquad \frac{\text{d}M}{\text{d}x}+\alpha\frac{\text{d}M}{\text{d}y}=0\,; \tag{8}$$

lesquelles expriment deux courbes du $(m-1)^{\text{ieme}}$ degré, qui se coupent en $(m-1)^2$ points seulement ; or, comme l'origine est quelconque, la droite donnée par l'équation $y=\alpha x$ est une droite quelconque ; de sorte qu'en invoquant la théorie des polaires réciproques on aura ces deux théorèmes :

THÉORÈME II. Les courbes polaires de tous les points d'une droite indéfinie, relatives à une directrice quelconque du m.$^{\text{ieme}}$ *degré, se coupent toutes aux* $(m-2)^2$ *mêmes points fixes.*

THÉORÈME II. Les courbes polaires de toutes les droites qui passent par un même point fixe, relatives à une directrice quelconque de m.$^{\text{ieme}}$ *classe, touchent toutes les* $(m-1)^2$ *mêmes droites fixes.*

Ces points sont, ce que nous avons appelé (*Annales*, tom.

Ces droites sont, ce que nous avons appelé (*Annales*, tom.

XVIII, pag 254) les *points polaires* de la droite dont il s'agit, relativement à la courbe directrice proposée.

XVIII, pag. 254) les *droites polaires* du point dont il s'agit, relativement à la courbe directrice proposée.

Si, dans les équations (8), on suppose α variable, les points d'intersection des deux courbes varieront aussi ; mais ces points seront toujours situés sur la première des deux courbes, dans l'équation de laquelle α n'entre pas ; or, faire varier α c'est faire tourner la droite $y=\alpha x$ autour de l'origine, qui est quelconque sur le plan de la courbe (1); et comme d'un autre côté, la première des équations (8) n'est autre chose que l'équation de la courbe polaire de l'origine, on a encore ces deux théorèmes :

THÉORÈME III. Si une droite tourne, dans le plan d'une courbe directrice, autour de l'un des points de sa direction, les points polaires de cette droite parcourront la courbe polaire de ce point fixe.

THÉORÈME III. Si un point parcourt une droite, dans le plan d'une courbe directrice, les droites polaires de ce point envelopperont la courbe polaire de cette droite fixe.

Soit μ une constante indéterminée, et soient deux courbes du $m.^{ieme}$ degré données par les équations $M'=0$, $M''=0$; l'équation générale des courbes de ce degré passant par leurs intersections sera, comme l'on sait,

$$M'+\mu M''=0\,; \qquad (9)$$

posant donc

$$M=M'+\mu M'',$$

il viendra, en différentiant,

$$\frac{dM}{dx}=\frac{dM'}{dx}+\mu\frac{dM''}{dx}, \qquad \frac{dM}{dy}=\frac{dM'}{dy}+\mu\frac{dM''}{dy}\,;$$

substituant ensuite dans (6), en y faisant a et b nuls, on obtiendra, pour la courbe polaire de l'origine, relativement à la directrice (9),

$$\left(\frac{dM'}{dx}+\mu\frac{dM''}{dx}\right)x+\left(\frac{dM'}{dy}+\mu\frac{dM''}{dy}\right)y=m(M'+\mu M'')$$

ou bien

$$x\frac{dM'}{dx}+y\frac{dM'}{dy}-mM'+\mu\left(x\frac{dM''}{dx}+y\frac{dM''}{dy}-mM''\right)=0\,. \quad (10)$$

Or, quelle que soit la valeur attribuée à la constante arbitraire μ, cette courbe polaire passe évidemment par les $(m-1)^2$ points fixes donnés par les deux équations

$$x\frac{dM'}{dx}+y\frac{dM'}{dy}=mM'\,; \qquad x\frac{dM''}{dx}+y\frac{dM''}{dy}=mM''\,;$$

on a donc ces deux théorèmes :

THÉORÈME IV. Si tant de courbes du m.$^{\text{ieme}}$ *degré qu'on voudra passant toutes par les* m^2 *mêmes points fixes, les courbes polaires d'un point quelconque, relatives à toutes celles-là, passeront toutes par les* (m—1)^2 *mêmes points également fixes.*

THÉORÈME IV. Si tant de courbes de m.$^{\text{ieme}}$ *classe qu'on voudra ont toutes les* m^2 *mêmes tangentes fixes, les courbes polaires d'une droite quelconque, relatives à toutes ces courbes, auront toutes les* (m—1)^2 *mêmes tangentes également fixes.*

C'est là, comme l'on voit, la première partie des deux théorèmes de la page 256 du précédent volume, et les deux autres seraient tout aussi faciles à établir.

Si l'équation $M''=0$ est homogène en x et y, elle exprimera le système de m droites réelles ou idéales, passant par l'origine ; et conséquemment les courbes comprises dans l'équation (9) auront

m sécantes communes, issues d'un même point; or, à cause de l'homogénéité de M'', on a identiquement

$$x\frac{dM''}{dx}+y\frac{dM''}{dy}=mM'' ;$$

au moyen de quoi l'équation (10) de la courbe polaire de l'origine, se réduit simplement à

$$x\frac{dM'}{dx}+y\frac{dM'}{dy}=mM' ;$$

de sorte que cette polaire est alors indépendante de la constante arbitraire μ; on a donc ces deux théorèmes :

THÉORÈME V. Si tant de courbes du m.$^{\text{ieme}}$ *degré qu'on voudra ont toutes les* m^2 *mêmes points communs, distribués* m *à* m *sur* m *droites, concourant en un même point, ce point n'aura qu'une courbe polaire unique par rapport à toutes les courbes proposées; cette polaire contiendra conséquemment les points de contact de toutes les tangentes menées à ces courbes par le même point.*

THÉORÈME V. Si tant de courbes de m.$^{\text{ieme}}$ *classe qu'on voudra ont toutes les* m^2 *mêmes tangentes communes, concourant* m *à* m *en* m *points, appartenant à une même droite, cette droite n'aura qu'une courbe polaire unique par rapport à toutes les courbes proposées; cette polaire sera conséquemment enveloppée par les tangentes menées à toutes ces courbes aux points où elles sont coupées par cette droite.*

En supposant, en particulier, $m=2$, on déduira de là ces deux propositions connues :

Les points de contact des tangentes menées à toutes les lignes du second ordre circonscrites à un même quadrilatère, par le point de concours de deux côtés

Les tangentes menées à toutes les lignes du second ordre inscrites à un même quadrilatère par leurs points d'intersection, avec la droite qui joint deux *opposés de ce quadrilatère, appartiennent tous à une seule et même droite, polaire commune de ce point, relativement à toutes ces courbes.*

sommets opposés de ce quadrilatère, concourent toutes en un seul et même point, pôle commun de cette droite, relativement à toutes ces courbes.

GÉOMÉTRIE DE SITUATION.

Double théorème de géométrie à trois dimensions;

Par M. GERGONNE.

On a vu, à la page 149 du précédent volume, que nous étions redevables à la sévère critique de M. Poncelet de la double classification des lignes et surfaces courbes que nous avons adoptée depuis lors; double classification tout à fait indispensable (*) à raison de sa liaison intime avec le principe de *dualité* (**); et qu'il serait très-peu philosophique de vouloir repousser sous le prétexte

(*) Nous disons *indispensable*, dans l'hypothèse du moins où le degré de la polaire réciproque d'une courbe serait plus élevé que le sien; ce qui peut être vrai, mais que des juges très-compétens, du choix de M. Poncelet lui-même, ne regardent pas comme suffisamment démontré.

(**) Nous avons long-temps hésité à employer cette expression, tant à cause du mauvais accueil que reçoivent d'ordinaire du public les locutions nouvelles, que parce que le mot *dualité* est un des termes d'une philosophie dont nous faisons assez peu de cas. M. Poncelet, en l'adoptant, en adoptant même le mot *trialité*, nous a beaucoup enhardis à en faire usage.

qu'elle est inusitée en géométrie, puisqu'alors il faudrait aussi rejeter, du *Traité des propriétés projectives*, et de beaucoup d'autres ouvrages modernes, d'excellentes choses qu'on ne rencontre ni dans Appollonius ni dans les autres auteurs de la même époque.

Nous devons aussi à cette attention scrupuleuse avec laquelle M. Poncelet veut bien scruter tout ce que nous publions dans notre recueil, de réparer une omission que nous avions commise à la pag. 326 de notre XI.e volume. Nous avions essayé de démontrer, en cet endroit, par les principes de la statique, un curieux théorème de géométrie plane de M. Coriolis, ainsi qu'un autre théorème que le principe de dualité nous en avait fait déduire. Parvenus à la fin de notre tâche, nous nous aperçûmes que la démonstration que nous avions donnée du premier de ces deux théorèmes n'exigeait pas nécessairement que les points qu'on y considérait fussent situés dans un même plan; mais, tout en faisant cette remarque, nous dûmes ajouter qu'il n'en était pas de même des droites dont il était question dans le second, attendu que, tandis que deux poids peuvent toujours se composer en un seul, deux forces, au contraire, ne peuvent se composer en une seule, qu'autant que ces forces sont situées dans un même plan.

M. Poncelet observe présentement, avec beaucoup de raison, que le théorème de M. Coriolis, étendu, comme nous l'avons fait, aux trois dimensions de l'espace, n'en a pas moins un correlatif qui s'en déduit en y remplaçant les points par des plans. C'est, en effet, une remarque qui nous avait échappé, mais dont nous n'aurions pu faire d'ailleurs aucun usage en l'endroit cité, quand bien même elle se serait alors offerte à notre esprit, attendu que, d'une part, nos moyens de démonstration n'auraient pu atteindre à ce nouveau théorème, et que, d'une autre, les idées de dualité n'étaient pas assez répandues à cette époque pour qu'il pût nous être permis de conclure ce théorème de l'autre, comme un simple corollaire.

Aujourd'hui, au contraire, qu'il doit être bien connu que tous les théorèmes de situation marchent par couples, il nous suffira d'avoir démontré l'un d'eux, à l'endroit cité, pour que l'autre soit admis sans contestation. Ils peuvent d'ailleurs être démontrés, chacun en particulier et même sans aucune sorte de calcul, comme il arrive pour tous les théorèmes de ce genre, en suivant une marche analogue à celle qui a été indiquée à la pag. 69 de notre XII.e volume ; et c'est une chose à laquelle nous regrettons de n'avoir pas songé en publiant notre article de la pag. 209 de notre XVI.e volume, article dont la démonstration de ces deux théorèmes aurait fait un supplément très-convenable. Nous nous bornerons ici à présenter les deux énoncés dans une rédaction unique.

THÉORÈME. Soient, dans l'espace, $n\left\{\begin{matrix}\text{points}\\ \text{plans}\end{matrix}\right\}$ quelconques numérotés arbitrairement ainsi qu'il suit

$$(1),\ (2),\ (3),\ \ldots\ldots (n)\ . \qquad (\text{1.}^{\text{re}}\ \textit{Série}).$$

Chacun de ces $\left\{\begin{matrix}\text{points}\\ \text{plans}\end{matrix}\right\}$, avec celui qui portera le numéro immédiatement supérieur, déterminera une droite ; de telle sorte qu'on aura ainsi $n-1$ droites, que l'on pourra désigner respectivement par l'ensemble des indices des deux $\left\{\begin{matrix}\text{points}\\ \text{plans}\end{matrix}\right\}$ qui déterminent chacune d'elles, en cette manière

$$\overline{(1)(2)},\ \overline{(2)(3)},\ \overline{(3)(4)},\ \ldots\ldots\ \overline{(n-1)(n)}\ .$$

Soient $n-1\left\{\begin{matrix}\text{points pris}\\ \text{plans conduits}\end{matrix}\right\}$ respectivement, et d'une manière out à fait arbitraire $\left\{\begin{matrix}\text{sur}\\ \text{par}\end{matrix}\right\}$ ces $n-1$ droites ; et soient désignés ces

$\left\{\begin{matrix}\text{points}\\ \text{plans}\end{matrix}\right\}$ par l'ensemble des numéros de la droite $\left\{\begin{matrix}\text{sur}\\ \text{par}\end{matrix}\right\}$ laquelle chacun d'eux est $\left\{\begin{matrix}\text{situé}\\ \text{conduit}\end{matrix}\right\}$ en cette manière :

$$(1,2)\,,\ (2,3)\,,\ (3,4),\ \ldots\ldots\ (n-1,n)\,. \qquad (\,2.^{\text{me}}\ \textit{Série}\,)$$

En prenant deux à deux, de toutes les manières possibles, les $\left\{\begin{matrix}\text{points}\\ \text{plans}\end{matrix}\right\}$ des deux séries, dont les indices comprennent ensemble trois nombres consécutifs de la suite naturelle, sans répétition ni lacune, ces couples de $\left\{\begin{matrix}\text{points}\\ \text{plans}\end{matrix}\right\}$ détermineront une nouvelle série de $2(n-2)$ droites dont chacune pourra encore être désignée par l'ensemble des indices des deux $\left\{\begin{matrix}\text{points}\\ \text{plans}\end{matrix}\right\}$ qui auront concouru à sa détermination, en cette manière :

$$\overline{(1)(2,3)}\,;\ \overline{(2)(3,4)}\,,\ \overline{(3)(4,5)}\,,\ \ldots\ldots\ \overline{(n-2)(n-1,n)}\,,$$

$$(1,2)(3)\,,\ (2,3)(4)\,,\ (3,4)(5)\,,\ \ldots\ldots\ \overline{(n-2,n-1)(n)}\,.$$

Or, il arrivera que les droites portant les mêmes nombres à leurs indices, lesquelles sont, comme l'on voit, les droites correspondantes dans les deux lignes $\left\{\begin{matrix}\text{concourront}\\ \text{seront situées}\end{matrix}\right\}$ en un même $\left\{\begin{matrix}\text{point}\\ \text{plan}\end{matrix}\right\}$, et donneront ainsi naissance à $n-2$ nouveaux $\left\{\begin{matrix}\text{points}\\ \text{plans}\end{matrix}\right\}$ que l'on pourra également désigner respectivement par l'ensemble des indices des deux droites qui auront concouru à déterminer chacun d'eux, en cette manière :

$$(1,2,3)\,,\ (2,3,4),\ (3,4,5)\,,\ \ldots\ (n-2,n-1,n)\,. \quad (\,3.^{\text{me}}\ \textit{Série}\,)$$

En prenant de nouveau deux à deux, de toutes les manières possibles, ceux des $\left\{\begin{matrix}\text{points}\\ \text{plans}\end{matrix}\right\}$ des trois séries dont les indices portent ensemble quatre nombres consécutifs de la suite naturelle, sans répétition ni lacune, ces couples de $\left\{\begin{matrix}\text{points}\\ \text{plans}\end{matrix}\right\}$ détermineront de nouvelles droites, au nombre de $3(n-3)$, dont chacune pourra, de la même manière, être désignée par l'ensemble des indices des deux $\left\{\begin{matrix}\text{points}\\ \text{plans}\end{matrix}\right\}$ qui auront concouru à sa détermination, en cette manière :

$$(1)(2,3,4)\,,\ (2)(3,4,5)\,,\ (3)(4,5,6)\,,\ \ldots\ (n-3)(n-2\,,\,n-1\,,\,n)\ .$$

$$(1,2)(3,4)\,,\ (2,3)(4,5)\,,\ (3,4)(5,6)\,,\ \ldots\ (n-3\,,\,n-2)(n-1\,,\,n)\ ,$$

$$(1,2,3)(4)\,,\ (2,3,4)(5)\,,\ (3,4,5)(6)\,,\ \ldots\ (n-3\,,\,n-2\,,\,n-1)(n)\ .$$

Or, il arrivera que les systèmes de trois droites portant les mêmes nombres à leurs indices, lesquelles sont, comme l'on voit, celles qui sont inscrites dans une même colonne $\left\{\begin{matrix}\text{concourront}\\ \text{seront situées}\end{matrix}\right\}$ en un même $\left\{\begin{matrix}\text{point}\\ \text{plan}\end{matrix}\right\}$, et donneront ainsi naissance à $n-3$ nouveaux $\left\{\begin{matrix}\text{plans}\\ \text{points}\end{matrix}\right\}$ que l'on pourra continuer à désigner respectivement par l'ensemble des indices des droites qui auront concouru à leur détermination, en cette manière :

$$(1,2,3,4)\,,(2,3,4,5)\,,(3,4,5,6)\,,\ldots(n-3\,,n-2\,,n-1\,,\,n)\,.\ (4.^{\text{me}}\ \textit{Série})$$

En poursuivant continuellement le même procédé, on obtiendra successivement $4(n-4)$ droites $\left\{\begin{matrix}\text{concourant}\\ \text{situées}\end{matrix}\right\}$ quatre à quatre en $n-4\left\{\begin{matrix}\text{points}\\ \text{plans}\end{matrix}\right\}$, puis $5(n-5)$ droites $\left\{\begin{matrix}\text{concourant}\\ \text{situées}\end{matrix}\right\}$ cinq à cinq en $n-5\left\{\begin{matrix}\text{points}\\ \text{plans}\end{matrix}\right\}$, et ainsi de suite ; de sorte que l'on parviendra finalement à $n-1$ droites désignées respectivement par

$$(1)(2,3,4\,,\,\ldots\ldots\, n-1\,,\,n)\;,$$

$$(1,2)(3,4,5\,,\,\ldots\ldots\, n-1\,,\,n)\;;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(1,2,3\,,\,\ldots\, n-2)(n-1\,,\,n)\;;$$

$$(1,2,3\,,\,\ldots\, n-2\,,\,n-1)(n)\;;$$

$\left\{\begin{matrix}\text{concourant}\\ \text{situées}\end{matrix}\right\}$ toutes en un $\left\{\begin{matrix}\text{point}\\ \text{plan}\end{matrix}\right\}$ unique désigné par

$$(1,2,3\,,\,\ldots\ldots\ldots\, n-2\,,\,n-1\,,\,n)\;,$$

GÉOMÉTRIE DE SITUATION.

Rectifications de diverses propositions énoncées dans les Annales;

Par M. Gergonne.

En annonçant (*Bulletin universel*, mai 1828, pag. 302) que les rectifications que nous avions indiquées (*Annales*, tom. XVIII, pag. 149) pour notre *Mémoire sur les lois générales qui régissent les lignes et surfaces courbes* (tom. XVII, pag. 214) étaient loin de suffire, M. Poncelet nous avait tellement effrayés que nous n'avions pas eu le courage de relire ce mémoire, dans la crainte d'y trouver trop à réformer. M. Chasles a bien voulu prendre cette peine et y joindre obligeamment celle de nous indiquer les propositions qu'il avait trouvé defectueuses ou inexactement déduites. Nous avons été agréablement surpris en apprenant que tout portait uniquement sur quelques corollaires très-accessoires, et qui n'intéressent en aucune sorte le fond de notre travail ni de nos doctrines. Il ne s'agit, en effet, que des corollaires VI de la pag. 240 et des corollaires II de la pag. 244, qu'on pourra supprimer si l'on veut, ou bien que l'on conservera en y substituant, au *contact simple* qui s'y trouve mentionné, un *contact du second ordre*, et en modifiant d'une manière convenable les considérations qui amènent les corollaires VII de la pag. 240.

La nécessité de ces rectifications tient, comme l'observe très-bien M. Chasles, à ce que, pour que deux surfaces du second degré qui se touchent en un point se coupent en outre suivant une courbe plane, il ne suffit pas qu'elles aient en ce point un *simple contact*, mais qu'il faut que le contact qui existe entre elles soit un *contact du second ordre*.

Comme ceci n'intéresse que nous, nous y attachons assez peu d'importance; mais il est d'autres rectifications qui nous tiennent beaucoup plus au cœur, parce qu'elles intéressent M. Chasles, à qui nous avons fait dire, en divers endroits, des choses qu'il n'avait pas dites et qui ne sont point parfaitement exactes.

D'abord, dans le XVIII.e volume, pag. 317, ce qui suit le 4.o doit être lu ainsi :

A ces principes on pourra joindre encore les suivans qui, au surplus, ne sont point nécessaires pour la première solution du problème et dont la seconde n'exige que l'application du dernier :

1.o *Le pôle d'une droite, par rapport à un point directeur, est ce point lui-même.*

2.o *La polaire d'un point, par rapport à un point directeur considéré comme conique infiniment petite, est le conjugué du diamètre qui contient l'autre point.*

3.o *La polaire d'un point, par rapport à une droite directrice, est une parallèle à cette droite située du côté opposé, à la même distance où en est le point.*

4.o *Le pôle d'une parallèle à une droite directrice est un quelconque des points d'une parallèle à cette même directrice située à la même distance du côté opposé.*

Dans le même mémoire, pag. 319, ligne 16, il faut remplacer la conjonction et par le pronom relatif qui.

Dans le dernier mémoire du XIX.e volume, pag. 66, le verbe couperont doit être remplacé par le verbe toucheront.

Le n.o 24, pag. 82, doit être lu comme il suit:

24. *Une surface directrice du second ordre et une autre surface du même ordre étant données dans l'espace ;*

Si l'on conçoit un angle triè-	*Si l'on conçoit un triangle va-*

dre variable et mobile autour de son sommet, supposé fixe, tel que la polaire de chacune de ses arêtes soit constamment dans le plan de la face opposée ;

1.° Les points d'intersection des arêtes de l'angle trièdre, par la seconde surface, seront les sommets d'un octaèdre hexagone variable inscrit, lequel sera constamment circonscrit à une troisième surface fixe du second ordre.

2.° Les plans mobiles tangens à la fois aux courbes suivant lesquelles la seconde surface sera coupée par les trois faces de l'angle trièdre, seront les faces d'un autre octaèdre hexagone variable, constamment circonscrit à une quatrième surface fixe du second ordre.

riable et mobile dans son plan, supposé fixe, tel que la polaire de chacun de ses côtés passe constamment par le sommet opposé ;

1.° Les plans tangens menés à la seconde surface, par les côtés du triangle, seront les faces d'un hexaèdre octogone variable circonscrit, lequel sera constamment inscrit à une troisième surface fixe du second ordre.

2.° Les points mobiles d'intersection des surfaces coniques circonscrites à la seconde surface dont les sommets seront ceux du triangle, seront les sommets d'un hexaèdre octogone variable, constamment inscrit à une quatrième surface fixe du second ordre.

Et, si le triangle et l'angle trièdre sont polaires réciproques l'un de l'autre, les deux octaèdres hexagones et les deux hexaèdres octogones seront aussi polaires réciproques les uns des autres, chacun à chacun.

Le 2.° de la page 83 doit être lu de la manière suivante ;

2.° *Si, par un point fixe, on conduit trois plans mobiles, constamment parallèles à trois points diamétraux conjugués d'une surface fixe du second ordre, les plans tangens à la fois aux courbes suivant lesquelles ces trois plans couperont une deuxième surface fixe du second ordre, seront les faces d'un octaèdre hexa-*

gone variable constamment circonscrit à une troisième surface fixe du second ordre.

Enfin nous observerons que le dernier théorème du mémoire (pag. 85) n'est autre que le théorème du n.° 17 (pag. 78) reproduit sous une autre forme (*).

(*) Nous saisissons avec empressement cette occasion pour témoigner notre regret de ce que quelques personnes aient semblé prendre le change sur le sens de la note qui se trouve placée au bas de la pag. 309 de notre XVIII.e volume. Il est certes bien loin de notre pensée de vouloir disputer à M. Chasles la propriété de son beau théorème sur les projections stéréographiques, théorème dont il est en possession depuis plus de quatorze ans. Notre but était uniquement, en écrivant cette note, d'informer ceux de nos lecteurs qui pouvaient l'ignorer, que ce théorème est aujourd'hui bien connu et journellement appliqué par les géomètres allemands, soit que quelqu'un d'entre eux y soit aussi parvenu de son côté, soit, plus probablement, qu'ils en aient pris connaissance dans la *Correspondance sur l'Ecole polytechnique* et dans le *Traité des surfaces du second degré*, de M. Hachette; ouvrages qu'ils citent assez fréquemment.

Nous n'avons entendu parler, au surplus, que de la première partie du théorème, et non de la seconde, comme pourrait le faire croire la manière dont il a été rendu compte du mémoire dans le *Bulletin universel* (juillet 1828, pag. 15).

ANALYSE ALGÉBRIQUE.

Note sur un symptôme d'existence de racines imaginaires, dans les équations algébriques;

Par M. Gergonne.

Il a été démontré, dans le XVI.e volume du présent recueil (pag. 385), qu'*autant on rencontre, dans une équation algébrique, de séries de trois termes consécutifs formant une proportion continue par quotiens, autant l'équation a de couples de racines imaginaires au moins.*

Dans une lettre qu'il nous a fait l'honneur de nous adresser, il y a déjà un peu de temps, M. Dupré, élève distingué de l'Ecole normale du collége royal de Louis-le-Grand, et qui, comme on l'a vu (tom. XVIII, pag. 68), s'est aussi occupé des symptômes d'existence des racines imaginaires dans les équations, objecte contre cette proposition qu'il s'ensuivrait qu'une équation complète du troisième degré, dont les quatre termes formeraient une progression par quotiens, devrait avoir quatre racines imaginaires.

Mais il résulte clairement de la démonstration même, donnée à l'endroit cité, que, dans le cas de plusieurs séries de trois termes consécutifs formant une proportion continue par quotiens, la proposition ne saurait être vraie qu'autant que les plus voisines de ces séries de trois termes consécutifs n'auraient au plus qu'un terme commun, ce qui ne saurait avoir lieu dans le troisième degré. L'équation du degré le moins élevé, dans laquelle on pourra rencontrer deux séries *disjointes* de trois pareils termes, sera donc une équation du quatrième degré. Elle sera de la forme

$$a^2x^4+ax^3+x^2+bx+b^2=0\,,$$

qui revient à

$$\{ax^2+\tfrac{1}{2}(1+\sqrt{8ab-3})x+b\}\{ax^2+\tfrac{1}{2}(1-\sqrt{8ab-3})x+b\}=0\;;$$

et qui a, en effet, ses quatre racines imaginaires.

M. Dupré, qui s'occupe aussi de recherches d'un ordre plus élevé, observe, dans la même lettre, qu'au lieu de réduire les fonctions elliptiques, comme on le fait ordinairement aux trois formes

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{R}\,,\quad\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a)R}\,,\quad\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{R}\,;$$

où $R=\sqrt{A+Bx^2+Cx^4}$, on pourrait les réduire seulement aux deux dernières formes, attendu que la première n'est qu'un cas particulier de la seconde. On a, en effet, comme le prouve la différentiation,

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{R}=2\sqrt{\frac{A}{C}}\int\frac{\mathrm{d}x}{\left(x^2+\sqrt{\frac{A}{C}}\right)R}$$

$$-\frac{2}{\sqrt{2\sqrt{AC}-B}}.\mathrm{Arc.}\left(\mathrm{Sin.}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{\frac{A}{C}}-\frac{B}{C}}.\frac{x}{x^2+\sqrt{\frac{A}{C}}}}\right),$$

qui donnera $\int\frac{dx}{R}$, lorsqu'on saura intégrer $\frac{dx}{\left(x^2+\sqrt{\frac{A}{C}}\right)R}$, qui rentre dans $\frac{dx}{(x^2+a)R}$.

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Rectification approchée de la circonférence ;

Par M. Specht, étudiant en philosophie à Berlin.

On a

$$\frac{13\sqrt{146}}{50}=3,141591953\ldots\ldots ;$$

mais on sait que

$$\varpi=3,141592653\ldots\ldots ;$$

voilà donc une expression finie du nombre ϖ qui n'est pas fautive d'un *millionième* d'unité.

Or, cette expression peut être mise sous la forme

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{13}{5}\sqrt{1+\left(\frac{11}{5}\right)^2},$$

et alors elle sera facile à construire graphiquement, ainsi que l'aire approchée d'un cercle dont le rayon sera donné (*).

(*Extrait du Journal de M. Crelle*, tom. III, pag. 83 ,

(*) Quelque approchée que soit cette expression, elle l'est moins toutefois que la formule

$$\varpi=\frac{501+80\sqrt{10}}{240}=3,1415926536\ldots\ldots$$

que nous avons fait connaître dans le VIII.e volume du présent recueil (pag. 252).

J. D. G.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Théorèmes de géométrie proposés à démontrer ;

Par M. J. Steiner, de Berlin.

Soient, sur un même plan, six points dont trois sur une droite et trois sur une autre. Si l'on joint, deux à deux, les points d'une série à ceux de l'autre série par *neuf* droites, ces droites se couperont, deux à deux, en *dix-huit* nouveaux points distribués, trois à trois, sur *six* droites qui concourront elles-mêmes, trois à trois, en *deux* nouveaux points.

Soient, sur un même plan, six droites dont trois concourant en un point et trois en un autre. Les droites d'une série auront, avec celles de l'autre série, *neuf* points d'intersection ; ces points détermineront, deux à deux, *dix-huit* nouvelles droites concourant, trois à trois, en *six* points qui seront eux-mêmes, trois à trois, sur *deux* nouvelles droites.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

Recherches sur les surfaces algébriques de tous les degrés ;

Par M. le docteur Plucker, professeur à l'Université de Bonn.

§. I.

On sait que *neuf* points sont nécessaires dans l'espace, pour determiner complètement une surface du second degré, et que, généralement parlant, on n'en saurait faire passer qu'une seule par neuf points donnés : d'où il suit qu'une infinité de surfaces de ce degré peuvent passer par les huit mêmes points. On ne saurait donc être surpris, d'après cela, de voir trois surfaces du second degré se couper en *huit* points.

Mais on sait aussi que *dix-neuf* points sont nécessaires pour déterminer complètement une surface du troisième degré, et, qu'en général, il n'en saurait passer plus d'une par dix-neuf points donnés ; et on doit, en conséquence, éprouver quelque surprise en considérant que trois surfaces du troisième degré se coupent en *vingt-sept* points.

Pareillement, *trente-quatre* points de l'espace déterminent complètement une surface conique du quatrième degré ; et néanmoins trois surfaces de ce degré peuvent avoir entre elles *soixante-quatre* points communs.

En général, le nombre des points de l'espace nécessaires pour la détermination complète d'une surface du $m.^{ieme}$ degré est $\frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}\cdot\frac{m+3}{3}-1$, et ces points n'en déterminent qu'une seule. D'un autre côté, trois surfaces de ce degré peuvent se couper en m^3 points de l'espace. Si donc on choisit le nombre entier m, de telle sorte que m^3 soit plus grand que $\frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}\cdot\frac{m+3}{3}-1$, ce qui arrivera toujours pour $m>2$, on aura un exemple de trois surfaces du même degré, assujéties à passer par plus de points qu'il n'en faudrait pour la détermination complète d'une seule d'entre elles.

Voilà donc un paradoxe apparent tout à fait analogue à celui qui nous a déjà occupé, relativement aux lignes courbes, dans un précédent article, et qui s'explique, comme celui-là, en considérant que, lorsqu'on parle du nombre des points de l'espace nécessaires et suffisans pour la détermination complète d'une surface, on sous-entend toujours qu'il s'agit de points pris au hasard dans l'espace, n'étant liés entre eux par aucune relation; et que tels ne sont point, en général, les m^3 points d'intersection de trois surfaces du $m.^{ieme}$ degré.

Ce paradoxe donne naissance à des théorèmes analogues à ceux que nous avons déduits, à la pag. 97 du présent volume, du semblable paradoxe relatif aux lignes courbes; théorèmes non moins féconds que ceux-là en conséquences curieuses, et dont la recherche va présentement nous occuper.

§. II.

Deux surfaces du $m.^{ieme}$ degré se coupent, comme l'on sait, suivant une courbe à double courbure, dont la projection sur un plan quelconque est, en général, une courbe du $(m^2)^{ieme}$ degré; et trois pareilles surfaces se coupent, comme nous venons de l'observer, en m^3 points au plus.

Soient donc

$$M=0\ ,\qquad M'=0\qquad M''=0\ ;$$

les équations de ces trois surfaces; l'équation

$$\mu M+\mu' M'+M''=0\ ,$$

dans laquelle μ et μ' sont supposées des constantes indéterminées, sera celle de toutes les surfaces du $m.^{ieme}$ degré, passant par les m^3 points d'intersection des trois premières; de sorte que, bien que ces points soient, en général, en plus grand nombre qu'il n'est nécessaire pour déterminer complètement une de ces surfaces, ils les laisseront toutes néanmoins indéterminées. Mais si l'on se donne seulement deux points de plus, ces derniers, joints aux m^3 autres, détermineront complètement une de ces surfaces; car ils donneront naissance à deux équations de conditions linéaires en μ et μ', qui suffiront pour déterminer ces deux coefficiens, et, par suite, pour particulariser la surface cherchée.

Remarquons, en outre, que les équations

$$\mu M+M''=0\ ;\qquad \mu' M'+M''=0\ ;\qquad \mu M+\mu' M'=0\ ,$$

représentent respectivement toutes les surfaces du $m.^{ieme}$ degré passant par les courbes à double courbure, intersections deux à deux des surfaces proposées. Une surface du $m.^{ieme}$ degré n'est donc pas déterminée par la seule condition de passer par les courbes à double courbure, intersections de deux autres surfaces de ce degré. Mais ici un seul point de l'espace par lequel une de ces surfaces, en nombre infini, sera assujétie a passer, suffira pour la déterminer complètement; car il en résultera une équation linéaire, soit en μ, soit en μ', soit en $\frac{\mu'}{\mu}$, suffisante pour fixer la valeur de ce coefficient.

On voit par là que toutes les surfaces du $m.^{ieme}$ degré qui passent par les m^3 points d'intersection de trois autres surfaces de ce degré, et en outre par un point donné, ont la même courbe d'intersection.

Concevons présentement que, sur la courbe d'intersection de deux surfaces du $m.^{ieme}$ degré, on prenne arbitrairement $\frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}\cdot\frac{m+3}{3}-2$ points; si l'on y ajoute un nouveau point quelconque de l'espace, une troisième surface, assujétie à passer par tous ces points, sera complètement déterminée; mais nous venons de voir qu'elle le serait aussi, si on l'assujétissait à passer par ce même point et par la courbe d'intersection des deux premières; en invoquant donc le principe de dualité, on aura ces deux théorèmes:

THÉORÈME I. Toutes les surfaces du m.^{ieme} *degré qui passent par les* $\frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}\cdot\frac{m+3}{3}-2$ *mêmes points, se coupent, en général, suivant une même courbe à double courbure.*

THÉORÈME I. Toutes les surfaces de m.^{ieme} *classe qui touchent les* $\frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}\cdot\frac{m+3}{3}-2$ *mêmes plans, sont, en général, circonscrites à une même surface développable.*

Donc, en particulier,

Corollaire. Toutes les surfaces du second ordre qui passent par les huit mêmes points, se coupent suivant une même courbe à double courbure.

Corollaire. Toutes les surfaces du second ordre qui touchent les huit mêmes plans, sont inscrites à une même surface développable.

De même, trois surfaces du $m.^{ieme}$ degré se coupant en m^3 points; si l'on prend $\frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}\cdot\frac{m+3}{3}-3$ de ces points, et qu'on y joigne deux points quelconques de l'espace, une quatrième surface de ce degré sera tout aussi complètement déterminée, par ce système de points, qu'elle le serait par les deux dernières et par la totalité des

m^3 points d'intersection des trois premières ; en invoquant donc encore ici le principe de dualité, on aura ces deux théorèmes :

THÉORÈME II. Toutes les surfaces du m.^{ieme} *degré assujéties à passer par* $\frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}\cdot\frac{m+3}{3}-3$ *points donnés, passent en outre par les* $m^3-\frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}\cdot\frac{m+3}{3}+3$ *mêmes points fixes.*

THÉORÈME II. Toutes les surfaces de m.^{ieme} *classe assujéties à toucher* $\frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}\cdot\frac{m+3}{3}-3$ *plans donnés, touchent en outre les* $m^3-\frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}\cdot\frac{m+3}{3}+3$ *mêmes plans fixes.*

Donc, en particulier,

Corollaire. Toutes les surfaces du second ordre qui passent par sept points donnés, ont en outre un huitième point commun (*).

Corollaire. Toutes les surfaces du second ordre qui touchent sept plans donnés, ont en outre un huitième plan tangent commun (*).

(*) Dans le troisième volume du *Journal* de M. Crelle (pag. 200 et 205), on recontre ces deux théorèmes fort analogues à ceux-là.

THÉORÈME. Toutes les surfaces du second ordre qui passent par sept des huit sommets d'un hexaèdre octogone, passent aussi par le huitième et lui sont conséquemment circonscrites.

THÉORÈME. Toutes les surfaces du second ordre qui touchent sept des huit faces d'un octaèdre hexagone, touchent aussi la huitième et lui sont conséquemment inscrites.

Un anonyme démontre le premier de ces théorèmes, par un calcul direct qui n'est pas dépourvu d'une certaine élégance ; M. Steiner en déduit l'autre par la théorie des polaires réciproques.

Le premier de ces théorèmes, le seul qu'il soit nécessaire de démontrer, nous paraît pouvoir être assez simplement établi comme il suit :

Soient

$$M=0\,, \qquad M'=0\,, \qquad M''=0\,, \qquad (1)$$

trois équations du second degré en x, y, z, dont chacune exprime deux

Ici encore, comme nous l'avons déjà remarqué pour les lignes courbes, on pourra admettre que tous ou partie des points fixes donnés se confondent par groupes plus ou moins nombreux en un point unique, auquel cas les surfaces dont il s'agit auront, en ces points, des contacts d'ordres plus ou moins élevés.

On peut également ici, comme alors, remplacer chaque point donné de la surface cherchée, soit par l'un des coefficiens de son équation, soit par une équation linéaire entre tous ou partie de ces coefficiens. Nos deux théorèmes ses changeront ainsi dans les deux théorèmes plus généraux que voici :

THÉORÈME III. Etant donnés n *coefficiens de l'équation générale du* m.^{ieme} *degré, à trois indéterminées, ou encore, étant données* n *équations linéaires entre tous ou partie de ces coefficiens, toutes les surfaces représentées par l'équation générale ainsi modifiée, et passant par les* $\frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}\cdot\frac{m+3}{3}-(n+2)$ *mé-*

---

plans ; elles seront satisfaites toutes trois par les coordonnées des sommets de l'hexaèdre octogone qui aura ces couples de plans pour les plans de leurs faces opposées ; or, tout point qui satisfera à ces trois équations satisfera aussi à l'équation du second degré

$$\mu M+\mu' M'+M''=0\,, \qquad (2)$$

dans laquelle μ et μ' sont deux constantes indéterminées ; donc, cette dernière est l'équation commune à toutes les surfaces du second ordre circonscrites à l'hexaèdre octogone dont il s'agit ; et, comme d'ailleurs, cet hexaèdre se trouve visiblement déterminé par sept de ses huit sommets, il s'ensuit que, pourvu qu'une surface du second ordre passe par ces sept sommets, elle devra nécessairement passer par le huitième.

Au surplus, ce théorème se trouve aussi compris dans le *théorème V* de la pag. 246 de notre XVII.^{e} vol.

J. D. G.

mes points fixes, se couperont suivant une seule et même courbe à double courbure.

Donc, en particulier,

Corollaire. Etant donnés n coefficiens de l'équation générale du second degré, à trois indéterminées, ou encore, étant données n équations linéaires, entre tous ou partie de ces coefficiens ; toutes les surfaces représentées par l'équation générale ainsi modifiée, et passant par les $8-n$ mêmes points fixes, se couperont suivant une seule et même courbe à double courbure.

THÉORÈME IV. Etant donnés n *coefficiens de l'équation générale du* m.$^{\text{ieme}}$ *degré, à trois indéterminées, ou encore, étant données* n *équations linéaires entre tous ou partie de ces coefficiens, toutes les surfaces représentées par l'équation générale ainsi modifiée, et passant par les* $\frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}\cdot\frac{m+3}{3}-(n+3)$ *mêmes points fixes donnés, se couperont, en outre, aux* $m^3-\frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}\cdot\frac{m+3}{3}+(n+3)$, *autres mêmes points fixes.*

Donc, en particulier,

Corollaire. Etant donnés n coefficiens de l'équation générale du du second degré, à trois indéterminées, ou encore, étant données n équations linéaires, entre tous ou partie de ces coefficiens, toutes les surfaces représentées par l'équation générale ainsi modifiée, et passant par les $7-n$ mêmes points fixes donnés, se couperont, en outre, aux $n+1$, autres mêmes points fixes.

Il est essentiel d'observer que, dans tout ceci, on suppose que l'un des termes de l'équation générale est privé de son coefficient ; ou, ce qui revient au même, que le coefficient de l'un de ses termes est une quantité donnée.

On fera, de ces diverses propositions, un usage pareil à celui que nous avons fait, pag. 102, de leurs analogues relatives aux lignes courbes. On en déduira, par exemple, sans aucune sorte de calcul, les propositions suivantes :

I. Toutes les surfaces du second ordre passant par six points donnés, et assujéties, en outre, à cette condition que les plans diamétraux, conjugués à des diamètres parallèles à une droite fixe, se coupent tous en un point donné, passeront en outre par deux nouveaux points fixes.

II. Toutes les surfaces du second ordre passant par cinq points donnés, et assujéties en outre à une des conditions suivantes : 1° que les plans diamétraux conjugués à des diamètres parallèles à une droite fixe, se coupent tous suivant une même droite ou soient parallèles à un même plan ; 2.° que les diamètres conjugués à des plans diamétraux parallèles concourent en un point donné ou soient parallèles à une droite donnée, passeront en outre par trois nouveaux points fixes.

III. Toutes les surfaces du second ordre passant par six points donnés, et assujéties en outre à cette condition que les plans polaires d'un même point donné se coupent tous en un autre point donné, passeront par deux nouveaux points fixes.

IV. Toutes les surfaces du second ordre passant par cinq points donnés, et assujéties en outre à cette condition que les plans polaires d'un même point se coupent tous suivant la même droite, passeront en outre par trois nouveaux points fixes.

V. Dans toutes les surfaces du

III. Toutes les surfaces du second ordre touchant six plans donnés, et assujéties en outre à cette condition que les pôles d'un même plan donné soient tous dans un autre plan donné, toucheront deux nouveaux plans fixes.

IV. Toutes les surfaces du second ordre touchant cinq plans donnés, et assujéties en outre à cette condition que les pôles d'un même plan soient tous situés sur une même droite, toucheront en outre trois nouveaux plans fixes.

V. Dans toutes les surfaces du

second ordre passant par sept points donnés, les plans polaires d'un point quelconque se coupent tous en un autre point fixe.

second ordre touchant sept plans donnés, les pôles d'un plan quelconque sont tous situés dans un autre plan fixe.

VI. Dans toutes les surfaces du second ordre passant par huit points donnés, les plans polaires d'un point quelconque se coupent tous suivant une même droite fixe.

VI. Dans toutes les surfaces du second ordre touchant huit plans donnés, les pôles d'un plan quelconque sont tous situés sur une même droite fixe.

VII. Dans toutes les surfaces du second ordre passant par sept points donnés, les plans diamétraux conjugués aux diamètres parallèles à une même droite fixe, se coupent en un même point fixe.

VIII. Dans toutes les surfaces du second ordre passant par huit points donnés, les plans diamétraux conjugués aux diamètres parallèles à une même droite fixe, se coupent tous suivant une autre droite fixe.

IX. Toutes les surfaces du second ordre, assujéties à la condition que les plans polaires de quatre points donnés passent respectivement par quatre droites données, ont la même courbe d'intersection.

IX. Toutes les surfaces du second ordre, assujéties à la condition que les pôles de quatre plans donnés soient situés respectivement sur quatre droites données, sont inscrites à une même surface développable.

Etc., etc., etc.

Bonn, 8 juin 1828.

GÉOMÉTRIE DE SITUATION.

Recherches sur les lois générales qui régissent les surfaces algébriques ;

Par M. Bobillier, professeur à l'Ecole des arts et métiers de Châlons-sur-Marne.

Nous nous proposons, dans ce qui va suivre, de revenir de nouveau sur des propositions déjà démontrées, pour les établir d'une manière à la fois plus simple, plus directe et plus générale.

Soit une surface quelconque du m^{ieme} degré, rapportée à trois axes quelconques et exprimée par l'équation

$$M=0\,, \tag{1}$$

en x, y et z. L'équation du plan tangent à cette surface, en l'un quelconque (x',y',z') de ses points, sera, comme l'on sait,

$$\frac{\mathrm{d}M'}{\mathrm{d}x'}(x-x')+\frac{\mathrm{d}M'}{\mathrm{d}y'}(y-y'+)\,\frac{\mathrm{d}M'}{\mathrm{d}z'}(z-z')=0\,, \tag{2}$$

les coordonnées x', y', z' du point de contact étant liées par l'équation de relation

$$M'=0\,. \tag{3}$$

Si, laissant x', y', z' indéterminés, on veut profiter de leur indétermination pour assujétir le plan tangent à passer par un point

(a, b, c), donné dans l'espace, il faudra exprimer que l'équation (2) est satisfaite en y faisant simultanément $x=a, y=b, z=c$, ce qui la changera en celle-ci :

$$\frac{dM'}{dx'}(a-x')+\frac{dM'}{dy'}(b-y')+\frac{dM'}{dz'}(c-z')=0 ,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{dM'}{dx'}(x'-a)+\frac{dM'}{dy'}(y'-b)+\frac{dM'}{dz'}(z'-c)=0 ; \qquad (4)$$

de sorte que les points de contact des plans tangens à la surface (1), issus du point (a, b, c), seront donnés par le système des deux équations (3) et (4), ou, ce qui revient au même, par la combinaison de l'équation (1) avec l'équation

$$\frac{dM}{dx}(x-a)+\frac{dM}{dy}(y-b)+\frac{dM}{dz}(z-c)=0 ; \qquad (5)$$

ces points seront donc ceux où la surface proposée sera coupée par celle qu'exprime l'équation (5) ; c'est-à-dire, qu'ils seront ceux d'une certaine courbe à double courbure. Mais, d'un autre côté, il est visible que, si une surface conique ayant son sommet au point (a, b, c), est circonscrite à la surface (1), tout plan tangent à cette surface conique le sera aussi à la surface (1) et passera par le point (a, b, c) ; donc la courbe de contact de la surface (1), avec la surface conique circonscrite, ayant son sommet en (a, b, c) est le lieu des points de contact de cette surface (1) avec tous ses plans tangens issus du point (a, b, c) ; donc enfin la ligne de contact de cette surface (1), avec la surface conique circonscrite qui a son sommet en (a, b, c), est donnée par le système des équations (1) et (5) ; d'où l'on voit que cette courbe de contact est située dans la surface exprimée par l'équation (5) ; elle appartient donc au plus à une surface du $m.^{ieme}$ degré, comme la proposée; mais nous allons voir qu'elle appartient réellement à une surface d'un degré moindre.

Lorsqu'une courbe à double courbure est donnée dans l'espace par le système de deux équations en x, y, z, elle l'est également par le système de l'une d'elles et d'une combinaison quelconque de l'une et de l'autre. En conséquence, puisque la ligne de contact du cône circonscrit, qui a son sommet en (a, b, c), est donnée par le système des équations (1) et (5), elle le sera aussi par la première de ces équations combinée avec l'équation

$$\frac{dM}{dx}(x-a)+\frac{dM}{dy}(y-b)+\frac{dM}{dz}(z-c)=mM\,; \qquad (6)$$

laquelle sera ainsi, comme l'équation (5), celle d'une surface coupant la proposée suivant la courbe de contact cherchée. Or, en vertu du théorème connu sur les fonctions homogènes, tous les termes de m dimensions en x, y, z disparaissent de cette équation qui ne s'élève conséquemment qu'au $(m-1)^{ieme}$ degré; donc la courbe de contact se trouve sur une surface qui ne saurait excéder ce degré; de sorte qu'en recourant au principe des polaires réciproques on a ces deux théorèmes;

THÉORÈME I. La courbe de contact d'une surface du m.^{ieme} *degré avec une surface conique circonscrite, appartient à une autre surface du* $(\mathrm{m}-1)^{ieme}$ *degré au plus* (*).

THÉORÈME I. La surface développable circonscrite à une surface de m.^{ieme} *classe, suivant son intersection avec un plan, touche une autre surface de* $(\mathrm{m}-1)^{ieme}$ *classe au plus.*

(*) M. Poncelet observe, avec beaucoup de raison (*Bulletin des sciences mathématiques*, mai 1828, pag. 301), que c'est par erreur que M. Bobillier

Cette surface du $(m-1)^{ieme}$ degré est ce que nous avons appelé (*Annales*, tom. XVIII, pag 258) la *surface polaire* du sommet du cône, par rapport à la surface à laquelle il est circonscrit, considérée comme directrice.

Cette surface de $(m-1)^{ieme}$ classe est ce que nous avons appelé (*Annales*, tom. XVIII, pag. 258) la *surface polaire* du plan coupant, par rapport à la surface coupée par ce plan, considérée comme directrice.

Si le sommet (a, b, c) de la surface conique circonscrite est mobile sur une droite donnée par les équations $x=\alpha z$, $y=\beta z$, on devra avoir $a=\alpha c$, $b=\beta c$, ce qui changera l'équation (6) en celle-ci

$$\left(x\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}+y\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}y}+z\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}z}-mM\right)-c\left(\alpha\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}+\beta\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}y}+\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}z}\right)=0\,; \quad (7)$$

laquelle sera satisfaite, quel que soit c, en posant séparément

$$x\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}+y\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}y}+z\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}z}=mM\,. \qquad \alpha\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}+\beta\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}y}+\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}z}=0\,. \quad (8)$$

Or, en faisant ainsi courir le sommet de la surface conique circonscrite le long d'une droite, les plans tangens à la surface (1), conduits par cette droite, ne cesseront pas d'être tangens à cette surface conique et auront conséquemment, avec la surface (1), les mêmes points de contact qu'elle; donc on obtiendra ces points de contact en combinant l'équation (1) avec les deux équations (8); donc les équations (8) expriment une courbe à double courbure

---

et nous, avons attribué ce théorème à M. Vallès, attendu qu'il se trouve formellement énoncé, bien que sans démonstration, dans l'*Application de l'analyse à la géométrie* de MONGE (édit. de 1807, pag. 15). Cela prouve que nous ne devons, ni l'un ni l'autre, lutter de mémoire avec M. Poncelet.

J. D. G.

qui perce la surface (1) à ses points de contact avec les plans tangens issus de la droite donnée par les équations $x=\alpha z$, $y=\beta z$; et, attendu que ses équations sont l'une et l'autre du $(m-1)^{ieme}$ degré seulement, le nombre des points de contact, et par suite celui des plans tangens, ne pourra être supérieur à $m(m-1)^2$; on a donc ces deux théorèmes :

THÉORÈME II. Par une même droite on ne saurait conduire à une surface du $m.^{ieme}$ *degré plus de* $m(m-1)^2$ *plans tangens. Leurs points de contact avec elles sont tous situés sur une courbe à double courbure, intersection de deux surfaces du* $(m-1)^{ieme}$ *degré.*

Cette courbe à double courbure est ce que nous avons appelé (*Annales*, tom. XVIII, pag. 258) la *courbe polaire* de la droite par laquelle les plans tangens sont conduits, par rapport à la surface qu'ils touchent, considérée comme directrice.

THÉORÈME II. Une même droite ne saurait percer une surface de $m.^{ieme}$ *classe en plus de* $m(m-1)^2$ *points. Les plans tangens par ces points touchent tous une même surface développable, circonscrite à deux surfaces de* $(m-1)^{ieme}$ *classe* (*).

Cette surface développable est ce que nous avons appelé (*Annales*, tom. XVIII, pag. 258) la *surface développable polaire* de la droite qui perce la surface proposée, par rapport à cette surface considérée comme directrice.

Si, dans les équations (8), on suppose α et β variables, ce qui

(*) Cela ne veut pas dire que la surface polaire d'une surface du $m.^{ieme}$ degré soit jamais une surface du $[m(m-1)^2]^{ieme}$ degré ; mais uniquement qu'elle ne saurait jamais être d'un degré plus élevé. Ainsi le théorème de M. Poncelet sur le degré de la surface polaire d'une surface proposée, théorème qui pourrait fort bien d'ailleurs être vrai, est encore à démontrer, comme l'ont fort bien remarqué MM. les Commissaires de l'Académie royale des sciences (*Bulletin des sciences mathématiques*, avril 1828, pag. 227).

J. D. G.

revient à faire tourner notre droite autour de l'origine, d'une manière tout à fait arbitraire ; sa courbe polaire variera sans cesse de situation, mais elle ne quittera pas la surface exprimée par la première de ces deux équations, puisque cette équation est indépendante de α et β ; or, cette surface n'est autre (6) que la surface polaire de l'origine ; on a donc ces deux théorèmes :

THÉORÈME III. Si une droite tourne dans l'espace autour de l'un quelconque des points de sa direction, sa courbe polaire, relative à une surface quelconque du m.ieme *degré, décrira la surface polaire de ce point.*

THÉORÈME III. Si une droite se meut dans l'espace sur un plan fixe, sa surface développable polaire, relative à une surface quelconque de m.ieme *classe, sera constamment tangente à la surface polaire de ce plan.*

Si l'on pose $\beta=k\alpha$, ce qui revient à supposer que notre droite, située dans le plan des xy, a pour équation $y=kx$, la dernière des équations (8) deviendra

$$\alpha\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}+k\alpha\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}y}+\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}z}=0\,,$$

équation qui sera satisfaite, quel que soit k, en posant à la fois

$$\alpha\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}z}=0\,,\qquad \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}y}=0\,.$$

Ces équations, avec la première des équations (8), déterminant $(m-1)^3$ points fixes, il en résultera ces deux théorèmes :

THÉORÈME IV. Si une droite tourne autour de l'un des points de sa direction dans un plan quelconque passant par ce point, sa courbe polaire, relative à une surface quelconque du m.ieme *degré, variable avec elle,*

THÉORÈME IV. Si une droite se meut dans un plan de manière à passer constamment par un même point de ce plan ; sa surface développable polaire, relative à une surface quelconque de m.ieme *classe, variable avec elle,* *passera constamment par* $(m-1)^3$ *points fixes, situés sur la surface polaire de ce point.*

Ces points sont ce que nous avons appelé (*Annales*, tom. XVIII, pag. 258) les *points polaires* de ce plan, par rapport à la surface proposée, considérée comme directrice.

touchera constamment $(m-1)^3$ *plans fixes, tangens à la surface polaire de ce plan.*

Ces plans sont ce que nous avons appelé (*Annales*, tom. XVIII, pag. 258) les *plans polaires* de ce point, par rapport à la surface proposée, considérée comme directrice.

Soit λ une constante indéterminée, et soient deux surfaces du $m.^{ieme}$ degré données par les équations $M'=0$, $M''=0$; l'équation générale des courbes de ce degré, passant par leur commune section, sera comme l'on sait,

$$M'+\lambda M''=0\,; \qquad (9)$$

posant donc

$$M=M'+\lambda M''\,;$$

il viendra, en différentiant,

$$\frac{dM}{dx}=\frac{dM'}{dx}+\lambda\frac{dM''}{dx}\,;$$

$$\frac{dM}{dy}=\frac{dM'}{dy}+\lambda\frac{dM''}{dy}\,,$$

$$\frac{dM}{dz}=\frac{dM'}{dz}+\lambda\frac{dM''}{dz}\,;$$

substituant ensuite dans (6), en y faisant a, b, c nuls, on obtiendra, pour la surface polaire de l'origine, relativement à la surface directrice (9),

$$\left(\frac{dM'}{dx}+\lambda\frac{dM''}{dx}\right)x+\left(\frac{dM'}{dy}+\lambda\frac{dM''}{dy}\right)y+\left(\frac{dM'}{dz}+\lambda\frac{dM''}{dz}\right)z=m(M'+\lambda M'')\ ;$$

ou bien

$$x\frac{dM'}{dx}+y\frac{dM'}{dy}+z\frac{dM'}{dz}-mM'+\lambda\left(x\frac{dM''}{dx}+y\frac{dM''}{dy}+z\frac{dM''}{dz}-mM''\right)=0. \qquad (10)$$

Or, quelle que soit la valeur attribuée à la constante arbitraire λ, cette surface polaire passe évidemment par la courbe à double courbure donnée par les deux équations

$$x\frac{dM'}{dx}+y\frac{dM'}{dy}+z\frac{dM'}{dz}=mM'\ , \qquad x\frac{dM''}{dx}+y\frac{dM''}{dy}+z\frac{dM''}{dz}=mM''\ ,$$

lesquelles ne sont l'une et l'autre que du $(m-1)^{ieme}$ degré seulement; on a donc ces deux théorèmes :

THÉORÈME V. Si tant de surfaces du m.[ieme] *degré qu'on voudra se coupent toutes suivant la même courbe à double courbure ; les surfaces polaires d'un point quelconque de l'espace, relatives à toutes celles-là, se couperont toutes aussi suivant une même courbe à double courbure, intersection de deux surfaces du* (m—1)[ieme] *degré seulement.*

THÉORÈME V. Si tant de surfaces de m.[ieme] *classe qu'on voudra sont toutes inscrites à une même surface développable ; les surfaces polaires d'un plan quelconque, relatives à toutes celles-là, seront toutes aussi inscrites à une même surface développable, circonscrite à deux surfaces de* (m—1)[ieme] *classe seulement.*

C'est là, comme l'on voit, la première partie des deux théorèmes de la pag. 262 du précédent volume, et les quatre autres seraient tout aussi faciles à établir.

Si l'équation $M''=0$ est homogène en x, y, z, elle exprimera le système de m plans passant par l'origine ; et conséquemment les surfaces comprises dans l'équation (9) auront m plans cordes communs, issus d'un même point ; or, à cause de l'homogénéité de M'', on a identiquement

$$x\frac{\mathrm{d}M''}{\mathrm{d}x}+y\frac{\mathrm{d}M''}{\mathrm{d}y}+z\frac{\mathrm{d}M''}{\mathrm{d}z}=mM'' ;$$

au moyen de quoi l'équation (10), de la surface polaire de l'origine, se réduit simplement à

$$x\frac{\mathrm{d}M'}{\mathrm{d}x}+y\frac{\mathrm{d}M'}{\mathrm{d}y}+z\frac{\mathrm{d}M'}{\mathrm{d}z}=mM' ;$$

de sorte que cette surface polaire est alors indépendante de la constante arbitraire λ ; on a donc ces deux théorèmes :

THÉORÈME VI. Si tant de surfaces du m.ieme *degré qu'on voudra se coupent toutes suivant les* m *mêmes courbes planes du* m.ieme *degré, dont les plans passent tous par un même point ; ce point n'aura qu'une surface polaire unique par rapport à toutes les surfaces proposées ; laquelle surface polaire contiendra conséquemment les courbes de contact de toutes les surfaces coniques circonscrites, ayant leur sommet en ce même point.*

THÉORÈME VI. Si tant de surfaces de m.ieme *classe qu'on voudra sont toutes inscrites aux* m *mêmes surfaces coniques de* m.ieme *classe, ayant leurs sommets dans un même plan ; ce plan n'aura qu'une surface polaire unique, par rapport à toutes les surfaces proposeés ; laquelle surface polaire sera conséquemment inscrite à toutes les surfaces développables circonscrites à ces surfaces, suivant leurs intersections avec ce même plan.*

En supposant, en particulier, $m=2$, on déduira de là ces deux propositions connues :

Tant de surfaces du second ordre qu'on voudra se coupant

Tant de surfaces du second ordre qu'on voudra étant inscri-

suivant les deux mêmes coniques ; un point quelconque de la commune section des plans des deux courbes aura le même plan polaire relatif à toutes ces surfaces ; lequel contiendra leurs lignes de contact avec les surfaces coniques circonscrites qui auront leur sommet en ce point.

tes aux deux mêmes cônes ; un plan quelconque, passant par les sommets de ces deux cônes, aura le même pôle relatif à toutes ces surfaces ; et toutes les surfaces coniques circonscrites, suivant les intersections de ces surfaces par ce plan, auront leurs sommets en ce même point.

Soient présentement λ et μ deux constantes indéterminées, et soient trois surfaces du $m.^{ieme}$ degré, données par les équations $M'=0$, $M''=0$, $M'''=0$; l'équation générale des surfaces de ce degré passant par les m^3 intersections de celles-là sera, comme l'on sait,

$$M'+\lambda M''+\mu M'''=0\ ; \qquad (11)$$

posant donc

$$M=M'+\lambda M''+\mu M''' ,$$

il viendra, en différentiant,

$$\frac{dM}{dx}=\frac{dM'}{dx}+\lambda\frac{dM''}{dx}+\mu\frac{dM'''}{dx} ,$$

$$\frac{dM}{dy}=\frac{dM'}{dy}+\lambda\frac{dM''}{dy}+\mu\frac{dM'''}{dy} ,$$

$$\frac{dM}{dz}=\frac{dM'}{dz}+\lambda\frac{dM''}{dz}+\mu\frac{dM'''}{dz} ;$$

substituant ensuite dans (6), en y faisant a, b, c nuls, on obtiendra, pour la surface polaire de l'origine, relativement à la surface directrice (11)

$$\left.\begin{array}{l} x\dfrac{dM'}{dx}+y\dfrac{dM'}{dy}+z\dfrac{dM'}{dz}-mM' \\ +\lambda\left(x\dfrac{dM''}{dx}+y\dfrac{dM''}{dy}+z\dfrac{dM''}{dz}-mM''\right) \\ +\mu\left(x\dfrac{dM'''}{dx}+y\dfrac{dM'''}{dy}+z\dfrac{dM'''}{dz}-mM'''\right) \end{array}\right\}=0\,; \quad (12)$$

or, quelles que soient les valeurs attribuées aux deux constantes arbitraires λ et μ, cette surface polaire passe évidemment par les $(m-1)^3$ points donnés par les trois équations

$$x\frac{dM'}{dx}+y\frac{dM'}{dy}+z\frac{dM'}{dz}=mM',$$

$$x\frac{dM''}{dx}+y\frac{dM''}{dy}+z\frac{dM''}{dz}=mM'',$$

$$x\frac{dM'''}{dx}+y\frac{dM'''}{dy}+z\frac{dM'''}{dz}=mM''';$$

on a donc ces deux théorèmes :

THÉORÈME VII. Si tant de surfaces du m.$^{\text{ième}}$ *degré qu'on voudra passent toutes par les* m^3 *mêmes points fixes ; les surfaces polaires d'un point quelconque de l'espace, relatives à toutes celles-là, passeront toutes par le* (m—1)^3 *mêmes points, également fixes.*

THÉORÈME VII. Si tant de surfaces de m.$^{\text{ième}}$ *classe qu'on voudra touchent toutes les* m^3 *mêmes plans fixes ; les surfaces polaires d'un plan quelconque, relatives à toutes celles-là, toucheront toutes les* (m—1)^3 *mêmes plans, également fixes.*

C'est là, comme l'on voit, la première partie des deux théorèmes de la pag. 267 du précédent volume, et les quatre autres seraient tout aussi faciles à établir.

Si les deux équations $M''=0$, $M'''=0$ sont homogènes en x, y, z, chacune d'elles exprimera m plans passant par l'origine; de sorte que leur ensemble exprimera m^2 droites distribuées m à m sur m plans passant par un même point, et dont chacune percera en m points la surface donnée par l'équation $M'=0$; alors donc l'équation (11) exprimera toutes les surfaces de m.ième degré passant par les m^3 mêmes points, distribués m à m sur m^2 droites, situées elles-mêmes m à m dans m plans se coupant en un même point; or, à cause de l'homogénéité de M'' et M''', on a identiquement

$$x\frac{dM''}{dx}+y\frac{dM''}{dy}+z\frac{dM''}{dz}=mM'',$$

$$x\frac{dM'''}{dx}+y\frac{dM'''}{dy}+z\frac{dM'''}{dz}=mM''';$$

au moyen de quoi l'équation (12) de la surface polaire de l'origine, se réduit simplement à

$$x\frac{dM'}{dx}+y\frac{dM'}{dy}+z\frac{dM'}{dz}=mM';$$

de sorte que cette polaire est alors indépendante des constantes arbitraires λ et μ; on a donc ces deux théorèmes:

THÉORÈME VIII. Si tant de surfaces du m.ieme *degré qu'on voudra ont toutes les* m³ *mêmes points communs, distribués* m *à* m *sur* m² *droites, situées elles-mêmes* m *à* m *dans* m *plans, se coupant en un même point; ce*

THÉORÈME VIII. Si tant de surfaces de m.ieme *classe qu'on voudra ont toutes les* m³ *mêmes plans tangens communs, se coupant* m *à* m *suivant* m² *droites concourant elles-mêmes* m *à* m *en* m *points, situés dans un même* *point n'aura qu'une surface polaire unique, par rapport à toutes les surfaces proposées. Cette surface polaire contiendra conséquemment les courbes de contact de toutes les surfaces coniques circonscrites, ayant leur sommet en ce même point.*

plan; ce plan n'aura qu'une surface polaire unique, par rapport à toutes les surfaces proposées. Cette surface polaire sera conséquemment inscrite à toutes les surfaces développables circonscrites aux surfaces dont il s'agit, suivant leurs intersections avec ce même plan.

En supposant, en particulier, $m=2$, on déduira de là les deux propositions suivantes :

Soit un hexaèdre octogone dans lequel les douze arêtes concourent quatre à quatre en trois points; et soient tant de surfaces du second ordre qu'on voudra circonscrites à cet hexaèdre: l'un quelconque des trois points de concours des arêtes aura, par rapport à toutes ces surfaces, le même plan polaire, lequel contiendra conséquemment toutes les coniques suivant lesquelles elles seront touchées par les surfaces coniques circonscrites qui auront leur sommet commun en ce point.

Soit un octaèdre hexagone dans lequel les douze arêtes soient quatre à quatre dans trois plans; et soient tant de surfaces du second ordre qu'on voudra inscrites à cet octaèdre: l'un quelconque des trois plans qui contiendront les arêtes aura, par rapport à toutes ces surfaces, le même pôle, lequel sera conséquemment le sommet commun de toutes les surfaces coniques circonscrites suivant les intersections de ces surfaces par ce plan.

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Mesure du volume du tétraèdre ;

Par M. GERGONNE.

SOIT un triangle isocèle ACB dont la base AB soit quelconque et la hauteur égale à une longueur donnée H. Soit construite une suite indéfinie d'autres triangles isocèles $A_1C_1B_1$, $A_2C_2B_2$, $A_3C_3B_3$, ... tels que les sommets du premier soient les milieux des côtés du triangle ACB, et que les sommets de chacun des autres soient les milieux des côtés de celui qui le précède immédiatement. Il a déjà été remarqué (*Annales*, tom. XVII, pag. 151), et il est d'ailleurs facile de voir que ces triangles, tous semblables et continuellement décroissans, tendront sans cesse à se réduire à un point unique P, tellement situé sur CC_1 ou H qu'on aura $C_1P=\frac{CC_1}{3}=\frac{H}{3}$.

Dans la série des longueurs

$$CC_1\,,\ C_1C_2\,,\ C_2C_3\,,\ C_3C_4\,,\ C_4C_5\,,\ \ldots\ldots$$

chaque longueur sera moitié de celle qui la précède immédiatement, et, comme la première est égale à H, on aura

$$C_1C_2=\frac{H}{2}\,,\quad C_2C_3=\frac{H}{4}\,,\quad C_3C_4=\frac{H}{8}\,,\quad C_4C_5=\frac{H}{16}\,,\ \ldots\ldots\,;$$

on aura donc, d'après cela,

$$C_1C_3=C_1C_2-C_2C_3=\frac{H}{4}\,,$$

$$C_3C_5 = C_3C_4 - C_4C_5 = \frac{H}{16},$$

$$C_5C_7 = C_5C_6 - C_6C_7 = \frac{H}{64},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

or

$$C_1P = \frac{H}{3} = C_1C_3 + C_3C_5 + C_5C_7 + C_7C_9 + \ldots\ldots;$$

donc, en subtituant

$$\frac{H}{3} = \frac{H}{4} + \frac{H}{16} + \frac{H}{64} + \frac{H}{256} + \frac{H}{1024} + \ldots\ldots \qquad (1)$$

Cela posé, soit T un tétraèdre quelconque dont la base soit B et la hauteur H; on sait (voy. *Euclide* ou *M. Legendre*) qu'il peut être décomposé en deux prismes triangulaires équivalens et en deux tétraèdres égaux; que chacun de ces prismes triangulaires a pour mesure $\frac{B}{4} \times \frac{H}{2} = \frac{BH}{8}$, de sorte que le volume total des deux est $B \times \frac{H}{4}$. Si donc on représente par T_1 chacun des tétraèdres qui, avec eux, forment le tétraèdre donné, on aura

$$T = B \times \frac{H}{4} + 2T_1.$$

Si l'on désigne respectivement par B_1 et H_1 la base et la hauteur de chacun des tétraèdres T_1, et qu'on les décompose de la même manière, en désignant par T chacun des deux tétraèdres qui résultent de la décomposition de chacun d'eux, on aura de même

$$T_1 = B_1 \times \frac{H_1}{4} + 2T_2;$$

et ainsi de suite; de sorte qu'on pourra écrire indéfiniment

$$T=B\times\frac{H}{4}+2T_1,$$

$$T_1=B_1\times\frac{H_1}{4}+2T_2;$$

$$T_2=B_2\times\frac{H_2}{4}+2T_3,$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

En prenant la somme des produits respectifs de ces équations par 1, 2, 4, 8, ... et réduisant, il viendra

$$T=B\times\frac{H}{4}+2B_1\times\frac{H_1}{4}+4B_2\times\frac{H_2}{4}+8B_3\times\frac{H_3}{4}+\dots,$$

ou bien

$$T=B\times\frac{H}{4}+4B_1\times\frac{H_1}{8}+16B_2\times\frac{H_2}{16}+64B_3\times\frac{H_3}{32}+\dots;$$

mais on a

$$B=4B_1=16B_2=64B_3=\dots\dots;$$

donc

$$T=B.\left(\frac{H}{4}+\frac{H_1}{8}+\frac{H_2}{16}+\frac{H_3}{32}+\frac{H_4}{64}+\dots\dots\right);$$

et comme on a d'ailleurs

$$H_1=\frac{H}{2}\ ,\quad H_2=\frac{H}{4}\ ,\quad H_3=\frac{H}{8}\ ,\quad H_4=\frac{H}{16}\ ,\dots\dots$$

il viendra, en substituant,

$$T=B\left(\frac{H}{4}+\frac{H}{16}+\frac{H}{64}+\frac{H}{256}+\frac{H}{1024}+\dots\dots\right),$$

c'est-à-dire (1)

$$T=B\times\frac{H}{3};$$

on obtiendra donc le volume d'un tétraèdre en multipliant l'aire de sa base par le tiers de sa hauteur.

De la même manière qu'au moyen du triangle nous venons de démontrer que

$$\frac{H}{3}=\frac{H}{4}+\frac{H}{16}+\frac{H}{64}+\frac{H}{256}+\ldots\ldots;$$

on démontrera, à l'aide du tétraèdre, que

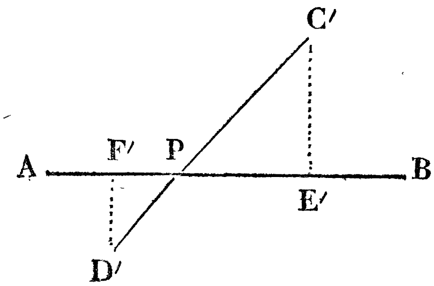
$$\frac{H}{8}=\frac{H}{9}+\frac{H}{81}+\frac{H}{729}+\frac{H}{6561}+\ldots\ldots$$

Il a été démontré, à la pag. 250 du précédent volume, que *le volume d'un tétraèdre est le sixième du produit de deux arêtes opposées, du sinus tabulaire de l'angle qu'elles forment entre elles et de leur perpendiculaire commune.*

M. Martinelli, cadet au corps-royal des Pontonniers à Modène, qui ne connaît pas sans doute la démonstration que nous rappelons ici, nous en a récemment adressé une qui, pour le fond, revient à celle-là; mais il nous en a en même temps communiqué une autre qui lui a été suggérée par M. le professeur Tramontini, et qui, à raison de son élégante simplicité, nous a paru ne devoir pas être passée sous silence. La voici :

On sait que deux arêtes opposées d'un tétraèdre sont toujours comprises dans deux plans parallèles, dont la distance est égale à la perpendiculaire commune entre ces deux droites.

Soit donc ABCD le tétraèdre dont il s'agit. Par les arêtes opposées AB et CD conduisons deux plans parallèles, et supposons que le premier de ces plans soit le plan même de la figure. Soit C'D' la projection de CD sur ce plan, si PQ est la perpendiculaire commune



aux arêtes opposées AB et CD, ses deux extrémités se projéteront en P à l'intersection de AB et C′D′.

Par AB et PQ soit conduit un plan; ce plan, perpendiculaire à celui de la figure, coupera le tétraèdre suivant un triangle AQB, que l'on pourra considérer comme base commune de deux autres tétraèdres, CAQB et DAQB, dont celui-là sera la somme. Leurs hauteurs CE et DF se projéteront suivant $C'E'=CE$ et $D'F'=DF$, toutes deux perpendiculaires à AB. L'aire de leur base commune AQB aura pour expression $\frac{1}{2}AB\times PQ$; de sorte qu'en représentant par T le volume du tétraèdre, on aura

$$T=\tfrac{1}{2}AB\times PQ\times\tfrac{1}{3}C'E'+\tfrac{1}{2}AB\times PQ\times\tfrac{1}{3}D'F'=\tfrac{1}{6}AB\times PQ\times(C'E'+D'F')\ ;$$

mais on a

$$C'E'=PC'Sin.(AB,CD)\ ,\qquad D'F'=PD'Sin.(AB,CD)\ ;$$

d'où

$$C'E'+D'F'=(PC'+PD')Sin.(AB,CD)=C'D'Sin.(AB,CD)=CDSin.(AB,CD)\ ;$$

donc, en substituant

$$T=\tfrac{1}{6}AB\times CD\times PQ\times Sin.(AB,CD)\ .$$

Il pourrait arriver que le point P, au lieu de se trouver sur C′D′, se trouvât sur son prolongement. Pour plier la démonstration à ce cas, il ne s'agirait que de remplacer les sommes par des différences.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Théorèmes de géométrie proposés à démontrer;

Par M. BOBILLIER.

Si un tétraèdre et une surface conique du second ordre existent ensemble dans l'espace ; les sections de la surface conique par les plans des quatre faces du tétraèdre détermineront, deux à deux, six nouvelles surfaces coniques du second ordre, dont les sommets, situés dans un même plan, seront trois à trois aux intersections de quatre droites, tracées dans ce plan.

Le plan des sommets des six nouvelles surfaces coniques sera le plan polaire du sommet de la première, relativement à la surface du second ordre inscrite à cette même surface conique et touchant à la fois les plans des quatre faces du tétraèdre.

Si un tétraèdre et une ligne du second ordre existent ensemble dans l'espace ; les surfaces coniques qui auront pour base commune cette ligne du second ordre et leurs sommets aux quatre sommets du tétraèdre détermineront, deux à deux, six nouvelles lignes du second ordre, dont les plans, concourant en un même point, se couperont trois à trois, suivant quatre droites, passant par ce point.

Le point de concours des plans des six nouvelles lignes du second ordre sera le pôle du plan de la première, relativement à la surface du second ordre circonscrite à cette même ligne du second ordre et passant à la fois par les quatre sommets du tétraèdre.

GÉOMÉTRIE DE SITUATION.

Recherches sur les projections stéréographiques, et sur diverses propriétés générales des surfaces du second ordre;

Par M. Chasles, ancien élève de l'Ecole polytechnique.

A la pag. 153 du IV.^{me} volume de la *Correspondance mathématique* de M. Quetelet, M. Bobillier a donné, sur les projections stéréographiques, quelques théorèmes que j'avais déjà rencontrés de mon côté et que j'annonçais même à M. le Rédacteur des *Annales*, par une lettre de Nice, en date du 15 janvier dernier, n'être que des cas particuliers de théorèmes plus généraux sur le même sujet. J'aurais même publié, dès cette époque, les résultats auxquels j'étais parvenu; mais, pour être intelligible, sans avoir besoin d'entrer dans des détails de définitions, il était nécessaire que j'expliquasse d'abord ce que j'entendais par axes de symptôse et par centres d'homologie des coniques, et c'est là ce qui m'a déterminé à publier d'abord ce qu'on a vu sur ce sujet dans les *Annales*. Je vais présentement exposer les résultats que j'avais antérieurement obtenus sur les projections stéréographiques.

§. I.

1. Les deux parties du théorème que j'ai déjà publié sur les projections stéréographiques (*Traité des surfaces du second ordre*,

par M. Hachette, 1817; *Annales de mathématiques*, tom. XVIII, pag. 307) peuvent être généralisées comme il suit :

Plusieurs surfaces du second ordre étant inscrites à une même surface de cet ordre, l'œil étant placé en un quelconque des points de cette dernière, et le plan du tableau étant parallèle à son plan tangent en ce point ;

1.° *Tous les contours apparens des surfaces inscrites seront, en perspective, des coniques homothétiques ;*

2.° *Les centres de ces coniques seront les projections des pôles des plans des lignes de contact de ces surfaces avec celle à laquelle elles sont inscrites, pris par rapport à cette surface, ou respectivement par rapport à chacune des autres.*

Soit en effet s, s', s''..... une suite de surfaces du second ordre inscrites à une surface S du même ordre; le cône C qui détermine le contour apparent de s et la surface S sont deux surfaces du second ordre circonscrites à cette surface s, et qui, par conséquent, se coupent suivant deux courbes planes, dont les plans passent tous deux par la droite d'intersection des plans des courbes suivant lesquelles elles touchent cette surface s (*Correspondance sur l'Ecole polytechnique*, tom. III, pag. 339). Mais le cône C ayant son sommet sur la surface S, une de ses intersections avec cette surface se réduit à un point, et le plan de cette intersection n'est autre que le plan tangent à S par son sommet ; ce cône C coupera donc la surface S suivant une deuxième courbe plane, dont le plan, ainsi que le plan tangent, passera par la droite suivant laquelle se coupent les plans des deux lignes de contact de s avec les surfaces S et C.

Le cône C coupant la surface S suivant une courbe plane, sa section par le plan du tableau sera, suivant le théorème cité (*Annales*, tom. XVIII, pag. 307), une conique homothétique à la section de la surface S par ce même plan ; mais cette section sera évidemment la perspective du contour apparent de la surface s ; donc la perspective du contour apparent de la surface s, et par suite les perspectives des contours apparens des surfaces s, s', s'',.... seront toutes homothétiques avec la section de la surface S par le plan du tableau ; elles seront donc aussi homothétiques entre elles ; la première partie du théorème se trouve donc ainsi démontrée.

Le plan de l'intersection du cône C avec la surface S, le plan de la ligne de contact des deux surfaces S et s et le plan tangent à S conduit par l'œil, se coupent tous trois, comme on vient de le voir, suivant la même droite, d'où il suit que les pôles des deux premiers, relatifs à la surface S, seront sur une droite passant par l'œil; or, le centre de la section du cône C par le plan du tableau est (deuxième partie du théorème cité) sur la droite qui va de l'œil au pôle du premier de ces plans; nous pouvons donc dire également qu'il est sur la droite qui va de l'œil au pôle du deuxième plan; c'est-à-dire, au pôle du plan de la ligne de contact des deux surfaces S et s, lequel pôle est évidemment le même, soit qu'on le prenne par rapport à la surface S ou qu'on le prenne par rapport à la surface s. La seconde partie du théorème se trouve donc également démontrée.

Remarquons que la surface s pourrait n'avoir qu'un contact imaginaire avec la surface S; mais le théorème et sa démonstration auraient toujours lieu, parce que le plan de la ligne de contact serait toujours réel.

Cette ligne de contact pourrait se réduire à un point, auquel cas les deux surfaces auraient un contact du troisième ordre en ce point.

Les surfaces s, s', s'', ... peuvent se réduire à des courbes planes tracées sur la surface S; alors on retombe sur le théorème ordinaire des projections stéréographiques.

Si la surface s se réduit à une ligne droite, le milieu de sa perspective se trouvera sur la perspective de sa polaire réciproque, par rapport à la surface S. On peut énoncer ainsi la proposition à laquelle donne naissance la considération de ce cas particulier :

2. *Deux droites, polaires réciproques l'une de l'autre, par rap-*

port à une surface du second ordre, ont pour perspectives, par rapport à un œil situé en un point de cette surface, et à un tableau parallèle au plan tangent en ce point, des parallèles à deux diamètres conjugués de la section de la surface du second ordre par le plan du tableau.

Ces deux droites se coupent à leurs milieux.

Si la surface S est un ellipsoïde ou un hyperboloïde à deux nappes, il n'y a qu'une de ces droites qui ait ses deux extrémités réelles, et les extrémités de l'autre sont imaginaires. Mais si la surface S est un hyperboloïde à une nappe, les deux droites ont, l'une et l'autre, leurs extrémités réelles; de sorte qu'elles sont alors les deux diagonales d'un parallélogramme.

En effet, deux droites D, D′, polaires réciproques l'une de l'autre, par rapport à une telle surface, rencontrent son plan tangent, conduit par l'œil, en deux points tels que, si l'on considère ces points comme les sommets de deux cônes circonscrits à cette surface, les plans des lignes de contact passeront par ces deux droites D′ et D, respectivement, et couperont conséquemment le plan tangent suivant deux droites qui passeront respectivement par les sommets des deux cônes, et seront deux tangentes conjuguées; ces deux droites seront donc parallèles à deux diamètres conjugués de la section faite dans l'hyperboloïde par un plan parallèle au plan tangent. Or, les plans qui détermineront les perspectives des deux droites D, D′ passeront par ces deux tangentes conjuguées, et couperont le plan du tableau suivant deux droites qui leur seront respectivement parallèles; ces deux droites, perspectives de D et D′, seront donc parallèles à deux diamètres conjugués de la section de l'hyperboloïde par le plan du tableau.

Il résulte d'ailleurs de la deuxième partie du théorème général (1), et en considérant la corde comme surface inscrite, que le point d'intersection de ces deux droites en sera le milieu commun.

Le théorème suivant est compris dans la démonstration précédente :

3. *Le plan tangent mené à une surface du second ordre par l'une des extrémités de l'un des deux diamètres, lieux des centres des sections circulaires de cette surface, est percé par deux droites polaires réciproques l'une de l'autre en deux points, tels que les droites menées du point de contact du plan tangent à ces deux-là sont perpendiculaires l'une à l'autre.*

On peut généraliser davantage les théorèmes ci-dessus en faisant la perspective sur un plan quelconque qui ne soit pas parallèle au plan tangent conduit par l'œil.

On a alors le théorème suivant :

4. *Si plusieurs surfaces du second ordre sont inscrites à une même surface de cet ordre, et qu'on en fasse la perspective sur un plan quelconque pour un œil situé en un quelconque des points de la surface enveloppante ;*

1.° *Les perspectives des contours apparens des surfaces enveloppées seront des coniques qui auront toutes un même axe de symptose, intersection du plan du tableau avec le plan tangent conduit par l'œil à la surface enveloppante.*

2.° *Les pôles de cet axe de symptose, par rapport à ces coniques, seront les perspectives des pôles relatifs à la surface enveloppante, des plans de ses lignes de contact respectives avec les surfaces enveloppées.*

3.° *Deux droites polaires réciproques l'une de l'autre, par rapport à la surface enveloppante, auront pour perspectives deux autres droites qui couperont la commune section du plan du tableau avec le plan tangent par l'œil, en deux points tels que le plan polaire de chacun, relatif à la surface enveloppante, passera par l'autre; et chacune de ces droites sera divisée harmoniquement aux deux points où elle rencontrera l'autre et l'intersection des deux plans.*

On pourrait démontrer directement ce théorème, mais on le déduit du précédent par la seule observation que deux coniques homothétiques, situées dans un même plan, ont pour perspective sur un plan quelconque deux coniques dont un des axes de symptose est l'intersection du plan du tableau avec le plan conduit par l'œil, parallélement à celui des deux coniques homothétiques ; et en observant, en outre, que quatre points en ligne droite, et en proportion harmonique, ont pour perspective (CARNOT ; *Théorie des transversales*, pag. 80) quatre points également en proportion harmonique. Ces considérations suffisent pour conclure le théorème (4) du théorème (1).

Si les surfaces inscrites se réduisent à des courbes planes, on obtiendra ce théorème qu'il nous sera utile d'énoncer :

5. *Pour un tableau plan quelconque et pour une situation quelconque de l'œil, sur une surface du second ordre ;*

1.° *Les perspectives des sections planes de cette surface ont un axe de symptose commun, intersection du plan du tableau avec le plan tangent conduit par l'œil.*

2.° *Les pôles de cet axe, par rapport à ces coniques, sont les perspectives des sommets des cônes circonscrits à la surface du second ordre, suivant les sections planes respectives.*

Nous pouvons dire, d'après ce qui précède, que, réciproquement,

6. *Si plusieurs coniques ont un axe de symptose commun, elles pourront être considérées comme la perspective d'autant de sections planes, faites dans une surface du second ordre.*

Ce principe conduit immédiatement aux propriétés générales de deux coniques quelconques, et à celles de trois coniques qui ont un même axe de symptose, avec autant de facilité et de promptitude que le théorème analogue sur les coniques homothétiques nous a conduit aux propriétés de ces courbes (*Annales*, tom. XVIII, pag. 305). Ce moyen ne nécessite pas l'emploi des transformations polaires, mais si nous avons préféré à ce moyen, et à plusieurs autres que nous aurions pu également employer, la marche que nous avons suivie (*Annales*, tom. XVIII, pag. 277) pour la recherche des propriétés générales des systèmes de coniques ; c'est que certaines questions relatives à ces courbes présenteraient des difficultés si on voulait déduire leur solution de la solution des questions analogues relatives aux sections planes d'une surface du second ordre, tandis que d'autres procédés appliqués aux coniques homothétiques, l'analyse algébrique, par exemple, leurs conviennent parfaitement. On pourra donc traiter ces questions, relativement aux coniques homothétiques, par les moyens les plus faciles, et on les appliquera ensuite, par les transformations polaires, aux coniques quelconques.

Si, dans le théorème (5), on suppose que les courbes tracées sur la surface du second ordre sont dans des plans passant par une même droite, la perspective de cette droite sera un axe de symptose commun aux coniques perspectives de ces courbes. Donc,

8. *Les perspectives, pour un tableau quelconque et un œil situé d'une manière quelconque sur une surface du second ordre, de tant de sections planes qu'on voudra faites dans cette surface, par des plans se coupant suivant une même droite, sont des coniques qui ont deux axes de symptose communs.*

Ainsi dans la construction des cartes de géographie, si la projection se faisait sur un plan non parallèle au plan tangent à la sphère, conduit par l'œil, les projections des cercles de la sphère ne seraient plus des cercles, mais des coniques ayant toutes un même axe de symptose, et les projections des méridiens ou des parallèles seraient des coniques ayant leurs centres sur une même conique, et jouissant de toutes les autres propriétés d'une série de coniques circonscrites à un même quadrilatère.

Il est facile de voir que, quand deux surfaces du second ordre se coupent suivant deux courbes planes, on peut leur inscrire une infinité d'autres surfaces du même ordre; le théorème (4) donne donc celui-ci, plus général que le précédent :

9. *Si tant de surfaces du second ordre qu'on voudra, sont inscrites à la fois à deux autres surfaces de cet ordre, et que l'on*

considère un quelconque des points de l'intersection de ces deux-ci comme le sommet commun d'une série de cônes circonscrits aux premières, les sections de ces cônes, par un plan transversal quelconque, seront des coniques ayant pour axes de symptose communs les droites suivant lesquelles ce plan sera coupé par les plans tangens aux deux surfaces enveloppantes, conduits par le sommet commun de tous ces cônes.

§. II.

Par une transformation polaire, l'un ou l'autre des théorèmes (1) et (4) donne le suivant :

10. *Plusieurs surfaces du second ordre étant circonscrites à une même surface de cet ordre, et un plan tangent étant mené à cette dernière, par un quelconque de ses points ;*

1.° *Ce point sera un centre d'homologie de toutes les coniques, prises deux à deux, suivant lesquelles les surfaces enveloppantes seront coupées par le plan tangent ;*

2.° *Les polaires respectives de ce point, par rapport à ces coniques, seront les droites suivant lesquelles ce même plan sera coupé par les plans des lignes de contact de la surface enveloppée avec ses enveloppantes.*

Il est bien entendu, d'après ce que nous avons dit (1), que les contacts des enveloppantes avec l'enveloppée peuvent être imaginaires, et que ces contacts, supposés réels, peuvent n'avoir lieu qu'en un point pour chaque surface circonscrite qui a alors un contact du troisième ordre, en ce point, avec la surface enveloppée.

En supposant que les surfaces circonscrites sont des cônes, on obtiendra le théorème suivant :

11. *Plusieurs cônes étant circonscrits à une même surface du second ordre, et un plan tangent étant mené à cette surface par un quelconque de ses points ;*

1.° *Ce point sera un centre d'homologie des intersections, prises deux à deux, des cônes avec le plan tangent ;*

2.° *Les polaires respectives de ce point, par rapport à ces mêmes intersections, seront les intersections de ce même plan avec les plans des lignes de contact.*

Il est clair que, réciproquement,

12. *Si plusieurs coniques, prises deux à deux, ont un centre commun d'homologie, on pourra les considérer comme les sections d'autant de cônes circonscrits à une même surface du second ordre, tangente au plan des coniques à leur centre commun d'homologie.*

Considérons deux cônes circonscrits à une même surface du second ordre, le plan tangent à cette surface, en l'un quelconque de ses points, les coupera suivant deux coniques qui auront le point de contact pour un de leurs centres d'homologie, d'après ce qui précède. Il est aisé de voir qu'un deuxième centre d'homologie de ces deux coniques sera celui où le plan tangent sera percé par la droite qui joindra les sommets des deux cônes; car, par cette droite, on peut mener deux plans tangens communs à ces deux cônes ; d'où il suit que, par le point où elle perce le plan des deux coniques, on pourra leur mener des tangentes communes; ce qui prouve que ce point est un centre d'homologie.

On conclut de là ce théorème assez remarquable :

13. *Si l'on circonscrit à une même surface du second ordre plusieurs cônes dont les sommets soient situés sur une même droite quelconque, tout plan tangent à cette surface coupera ces cônes suivant des coniques qui auront deux centres d'homologie communs, et qui jouiront conséquemment de toutes les propriétés d'une série de coniques inscrites à un même quadrilatère.*

14. Ce qui précède offre un nouveau moyen de démontrer les propriétés générales de deux coniques quelconques, et celles de trois coniques qui ont un même centre d'homologie. Par exemple, on voit, sur-le-champ, que ces trois coniques, prises deux à deux,

ont leurs trois centres d'homologie conjugués à celui-là, situés en ligne droite.

Car, si l'on considère ces coniques comme les sections faites dans trois cônes circonscrits à une surface du second ordre, par un plan tangent à cette surface, leur centre d'homologie commun sera le point de contact de ce plan tangent, et leurs trois centres d'homologie conjugués à celui-là seront les points où ce même plan sera percé par les droites qui joindront deux à deux les sommets des trois cônes; or, ces droites sont toutes trois dans le plan que déterminent les sommets des trois cônes; donc ces trois centres seront dans l'intersection de ce dernier plan avec le plan tangent, c'est-à-dire qu'ils appartiendront à une même droite.

Cette méthode n'exige pas l'application de la théorie des polaires réciproques; mais alors il faut démontrer directement les précédens théorèmes, ce qui n'est pas difficile, et non pas les déduire, comme nous l'avons fait, de ceux que nous avons établis sur la projection stéréographique.

15. *Si tant de surfaces du second ordre qu'on voudra sont circonscrites à la fois à deux surfaces données de cet ordre, tout plan tangent, commun à ces deux dernières, coupera les surfaces enveloppantes suivant des coniques qui auront pour centres d'homologie communs les points de contact de ce plan avec les deux surfaces enveloppées.*

Toutes ces coniques auront conséquemment leurs centres en ligne droite, et jouiront de toutes les propriétés connues d'une série de coniques inscrites à un même quadrilatère.

Tout cela résulte du théorème (10).

Dans le cas particulier où le plan tangent à la surface enveloppée du théorème (10) la touche en l'une des quatre extrémités des deux diamètres, lieux des centres de ses sections circulaires, un cône circonscrit, dont le sommet se trouvera situé sur la direction de ce diamètre, sera coupé par le plan tangent suivant un cercle dont le centre sera le point de contact du plan tangent; ce point sera, d'après le théorème (10), le centre d'homologie de ce cercle et de la section faite par ce même plan tangent dans toute autre surface quelconque du second ordre circonscrite à la surface proposée ; ce centre sera donc le foyer de cette section (PONCELET, *Propriétés projectives*, pag. 261) ; mais la polaire du foyer d'une conique est la directrice relative à ce foyer ; donc,

16. *Quand plusieurs surfaces du second ordre sont circonscrites à une surface unique de cet ordre, le plan tangent à cette dernière, à l'une des extrémités d'un des diamètres, lieux des centres des sections circulaires, coupe toutes les autres suivant des coniques qui ont pour foyer commun le point de contact du plan tangent, et dont les directrices respectives sont les droites suivant lesquelles ce plan tangent est coupé par les plans des lignes de contact de la surface enveloppée avec les surfaces enveloppantes.*

En remarquant que les sections planes parallèles faites dans un cône ont leurs foyers sur deux droites passant par son sommet, on pourra, du théorème qui vient d'être démontré, conclure le suivant :

17. *Si, du sommet d'un cône circonscrit à une surface du second ordre, on mène des droites aux deux extrémités de l'un des diamètres de cette surface, lieux des centres de ses sections circulaires ; tout plan parallèle au plan diamétral conjugué de ce diamètre coupera le cône suivant une conique dont les foyers seront les points où ce même plan sera percé par ces deux droites.*

Il résulte de là que :

18. *Si plusieurs cônes ont leurs sommets sur une droite passant par une des extrémités de l'un des diamètres, lieux des centres des sections circulaires d'une surface du second ordre ; le plan tangent à cette surface, à l'autre extrémité du même diamètre, coupera tous ces cônes suivant des coniques ayant leurs deux foyers communs, et qui, par conséquent, formeront deux séries d'ellipses et d'hyperboles telles que les courbes de chaque série couperont orthogonalement les courbes de l'autre série.*

Le théorème (17) fait voir que,

19. *Si, du sommet d'un cône circonscrit à une sphère, on mène des droites aux deux extrémités de l'un quelconque de ses diamètres, tout plan perpendiculaire à ce diamètre coupera le cône suivant une conique dont les foyers seront les points où le plan coupant sera percé par ces deux droites.*

Le théorème (16) comprend celui-ci :

20. *Si, à une même surface de révolution du second ordre, on inscrit deux sphères, tout plan tangent commun à ces deux sphères coupera la surface enveloppante suivant une conique dont les foyers seront en ses points de contact avec les deux sphères.*

Ce dernier théorème avait déjà été démontré pour le cône, par M. Quetelet, et pour l'hyperboloïde à une nappe, par M. Dandelin. (Voy. *Annales*, tom. XV, pag. 387).

§. III.

21. La propriété la plus importante des cônes circonscrits à une même surface du second ordre est, sans contredit, celle que MONGE a donnée dans sa *Géométrie descriptive*, car elle est la base de la théorie des pôles, dont on n'a cessé de s'occuper depuis lors, et qui a déjà rendu les plus grands services à la géométrie.

Les cônes circonscrits à une surface du second ordre, et qui ont leurs sommets en ligne droite, jouissent de quelques autres propriétés dont il ne paraît pas qu'on ait songé encore à s'occuper; elles sont, il est vrai, d'une bien moindre importance que celle que nous venons de rappeler, mais elles ne sont pas néanmoins dépourvues d'un certain intérêt.

Nous avons déjà démontré (11) le théorème suivant que nous rappelons, parce qu'il fait partie des propriétés générales des cônes circonscrits à une même surface du second ordre.

22. *Si plusieurs cônes, circonscrits à une même surface du second ordre, ont leurs sommets sur une même droite, tout plan tangent à cette surface coupera les cônes circonscrits suivant des*

coniques qui auront deux centres d'homologie communs; savoir : le point de contact de ce plan tangent et le point où il sera percé par la droite sur laquelle les sommets de ces cônes seront situés.

Si la droite, lieu des sommets des cônes, perce la surface du second ordre en deux points, les plans tangens en ces deux points couperont le plan des coniques suivant des droites qui feront partie de cette série de courbes.

23. *Si plusieurs cônes, circonscrits à une même surface du second ordre, ont leurs sommets sur une même droite, les plans polaires d'un point quelconque de l'espace, relatifs à tous ces cônes, envelopperont un nouveau cône dont le sommet sera le pôle, pris par rapport à la surface donnée du second ordre, du plan conduit par le point donné et par la droite, lieu des sommets des cônes.*

Soient en effet p le point donné, s le sommet de l'un des cônes circonscrits à la surface donnée du second ordre et P le plan de la ligne de contact de cette surface avec le cône dont le point s est le sommet.

La droite ps perce le plan P en un point dont les plans polaires, par rapport à la surface du second ordre et au cône circonscrit, passent par la polaire de ce point, prise par rapport à la ligne de contact, située dans le plan P. Or, cette droite est la polaire de la droite ps, par rapport à la surface du second ordre; elle passe donc par le pôle de tout plan conduit par la droite ps; d'où il suit qu'elle passe par le pôle du plan conduit par le point p et par la droite lieu des sommets des cônes. Or, le plan polaire, par rapport au cône, est le même que le plan polaire de tout autre point de la droite ps; donc, le plan polaire du point p passe par un point fixe qui est le pôle du plan conduit par le point p et par la droite, lieu des sommets des cônes; d'où il suit que ce plan roule sur un cône.

Par le point p menons un plan tangent à la surface du second ordre; ce plan coupera le cône suivant une conique et le plan polaire suivant une droite qui sera la polaire du point p, par rapport à cette conique; or, ce plan tangent coupe tous les cônes suivant des coniques qui ont deux centres d'homologie communs, toutes les polaires du point p, relatives à ces coniques enveloppent donc une autre conique (*Annales*, tom. XVIII, pag. 296); d'où il suit que la surface conique enveloppée par les plans polaires de ce point, relatifs aux cônes circonscrits, est une surface conique de second ordre, comme nous l'avions annoncé.

24. *Si des cônes circonscrits à une surface du second ordre ont leurs sommets sur une même droite, les polaires d'une transversale quelconque, relatives à ces cônes, forment un hyperboloïde qui passe par la polaire de cette transversale prise par rapport à la surface du second ordre.*

En effet, la polaire d'une droite, par rapport à un cône, n'est autre chose que la droite diamétrale conjuguée au plan mené par cette droite et par le sommet du cône, et passe aussi par ce sommet. Mais si, par la droite donnée, on conduit un plan tangent à la surface du second ordre, il coupera tous les cônes suivant des coniques qui auront deux centres d'homologie communs (22); les pôles de cette droite, par rapport à ces coniques, seront donc sur une même droite D (*Annales*, tom. XVIII, pag. 296, 3.°); or, ces pôles appartiennent évidemment aux polaires de la droite, par rapport aux cônes respectivement; d'où il suit que ces plans s'appuyent sur la droite D.

Si, par la droite donnée, on conduit un deuxième plan tangent à la surface du second ordre, on obtiendra une deuxième droite sur laquelle s'appuyeront également les polaires; or, elles passent aussi par la droite, lieu des sommets des cônes; elles s'appuyent donc sur trois droites fixes, ce qui prouve qu'elles appartiennent à un hyperboloïde à une nappe.

Il est facile de voir que les polaires d'une droite, par rapport à deux surfaces du second ordre circonscrites l'une à l'autre, se rencontrent en un point du plan de la ligne de contact de ces surfaces; donc les polaires de la transversale, par rapport aux cônes, rencontrent toutes sa polaire par rapport à la surface du second ordre, laquelle se trouve ainsi sur l'hyperboloïde.

Le théorème est donc complétement démontré.

Si, par la transversale, on mène un plan quelconque, il coupera les cônes suivant des coniques; et il est clair que les pôles de la transversale, par rapport à ces coniques, seront sur l'hyperboloïde, lieu des polaires de la droite; *ils seront par conséquent sur une conique;* et, *si le plan mené par la transversale tourne sur cette droite, la conique engendrera l'hyperboloïde.*

25. *Si des cônes circonscrits à une surface du second ordre ont leurs sommets sur une même droite, les plans diamétraux conjugués à une même droite, relatifs à tous ces cônes, envelopperont un nouveau cône.*

En effet, le plan diamétral conjugué à une droite, par rapport à un cône, est le plan diamétral conjugué à la parallèle à cette droite conduite par le sommet du cône; le théorème énoncé résulte donc du théorème (23) dans lequel on supposerait que le point donné passe à l'infini.

26. *Si des cônes circonscrits à une surface du second ordre ont leurs sommets sur une même droite, 1.° tous les diamètres conjugués à un même plan, relatifs à ces cônes, appartiendront à un hyperboloïde passant par la droite diamétrale de la surface du second ordre, conjuguée à ce plan; 2.° les centres des coniques suivant lesquelles ce plan transversal coupera les cônes circonscrits seront sur une autre conique.*

Pour obtenir la démonstration de ce théorème, il suffit de supposer, dans le théorème (24), que la transversale passe à l'infini.

Si le plan transversal est parallèle à la droite qui contient les sommets des cônes circonscrits, l'hyperboloïde se réduira à un plan; car, dans ce cas, les deux plans tangens à la surface du second ordre, parallèles à celui-là, couperont les cônes suivant des coniques dont les centres seront sur deux droites parallèles au lieu des sommets des cônes.

§. IV.

27. Des courbes planes, tracées sur une surface du second ordre, correspondent, au moyen de la doctrine des polaires réciproques, à des cônes circonscrits à une autre surface du même ordre; d'où il suit que leurs propriétés générales correspondent aux propriétés générales de ces cônes. Ainsi les théorèmes du précédent paragraphe donnent naissance à de nouveaux théorèmes qu'il doit nous suffire d'énoncer. Au surplus, leur démonstration directe ne présenterait aucune difficulté, on la déduirait des principes exposés dans le §. I, comme nous avons déduit celle des théorèmes relatifs aux cônes circonscrits des principes exposés dans le §. II.

Rappelons d'abord le théorème (8) qui peut être énoncé ainsi :

28. *Si des courbes planes, tracées sur une surface du second ordre, sont dans des plans passant par une même droite, les cônes qui auront ces courbes pour bases et pour sommet commun un quelconque des points de la surface du second ordre, seront coupés par tout plan transversal suivant des coniques qui, prises deux à deux, auront mêmes axes de symptose.*

Ces coniques jouiront, conséquemment, de toutes les propriétés d'une série de coniques circonscrites à un même quadrilatère.

Si, par la droite suivant laquelle se coupent les plans des courbes tracées sur la surface du second ordre, on peut conduire deux plans tangens à cette surface; aux deux points de contact, considérés comme deux courbes infiniment petites, correspondront, sur le plan transversal, deux points qui feront partie de la série de coniques; ou bien, si chaque plan tangent touche la surface du second ordre suivant deux droites, à ces droites correspondront, sur le plan transversal, deux systèmes de droites faisant partie de la série de coniques.

Par les polaires réciproques, le théorème (23) donne le suivant :

29. *Si les plans de plusieurs courbes planes, tracées sur une sur-*

face du second ordre, se coupent suivant une même droite, tout plan transversal coupera ceux de ces courbes suivant des droites dont les pôles respectifs, relatifs à ces mêmes courbes, seront sur une conique, contenue dans le plan polaire du point où le plan transversal coupera la droite, section commune des plans de ces courbes.

Au théorème (24) correspond pareillement celui-ci :

30. *Si les plans de plusieurs coniques, tracées sur une surface du second ordre, se coupent suivant une même droite ; toute droite transversale percera ces plans en des points dont les polaires respectives, relatives à ces coniques, appartiendront à un hyperboloïde qui contiendra la polaire de la transversale, prise par rapport à la surface du second ordre.*

Si, par les coniques, on fait passer des cônes ayant pour sommet commun un quelconque des points de la transversale, il est clair que les plans diamétraux respectifs de ces cônes, conjugués à la transversale, passeront par les polaires des points où cette droite percera les plans des coniques ; ces polaires étant prises respectivement par rapport à ces mêmes coniques. Ces plans seront donc tangens à l'hyperboloïde, lieu de ces polaires, et envelopperont conséquemment un cône ; de sorte qu'on a ce théorème :

31. *Si les plans de tant de coniques qu'on voudra, tracées sur une surface du second ordre, se coupent tous suivant une même droite, et si des cônes, ayant leur sommet commun en un quelconque des points de l'espace, ont ces coniques pour bases, les plans polaires respectifs d'un autre point quelconque de l'espace, relatifs à ces cônes, envelopperont un nouveau cône.*

Et, si le sommet commun de tous ces cônes se meut sur une droite passant par ce point, le cône, enveloppe des plans polaires de ce même point, enveloppera lui-même un hyperboloïde.

Si, dans le théorème (29), on suppose le plan transversal situé à l'infini, on aura ce théorème :

32. *Si les plans de tant de coniques qu'on voudra, tracées sur*

une surface du second ordre, se coupent tous suivant une même droite, les centres de ces coniques seront tous sur une nouvelle conique, contenue dans le plan diamétral de la surface du second ordre conjuguée à cette droite.

Le théorème (30), quand la droite passe à l'infini, devient celui-ci :

33. *Si les plans de tant de coniques qu'on voudra, tracées sur une surface du second ordre, se coupent tous suivant une même droite, les diamètres de ces coniques conjugués aux droites suivant lesquelles leurs plans seront coupés par un plan transversal quelconque, appartiendront à un hyperboloïde qui passera par le diamètre de la surface du second ordre conjugué à ce plan.*

34. Les théorèmes des §. III et IV donnent, comme cas particuliers, plusieurs propriétés des cordes d'une conique issues d'un même point, ainsi que des angles circonscrits ayant leurs sommets sur une même droite. Comme nous nous proposons de les reproduire dans une autre occasion, nous nous dispenserons de les énoncer ici.

On peut faire d'autres applications des précédens théorèmes : par exemple, on s'en sert utilement pour démontrer les deux parties de celui-ci :

Par des coniques tracées sur une surface du second ordre, de telle sorte que les plans de ces coniques se coupent tous suivant une même droite, soient décrites d'autres surfaces du second ordre, toutes inscrites ou circonscrites à celle-là;

1.° *Une infinité de ces surfaces pourront toucher un même plan donné, et le lieu géométrique de leurs points de contact avec lui sera une conique ;*

2.° *Une infinité de ces surfaces pourront passer par un point donné, et leurs plans tangens en ce point envelopperont un cône.*

Si, dans le premier cas, le plan donné passe par la commune section des plans des coniques, la conique, lieu des points de contact, se réduira à un point.

Si, dans le second cas, le point donné est sur la droite, lieu des pôles des plans des coniques, toutes les surfaces du second ordre circonscrites auront un même plan tangent en ce point.

La surface du second ordre à laquelle sont inscrites les autres surfaces pourrait être un cône.

Les théorèmes des deux §. III et IV ne sont eux-mêmes que des cas particuliers des propriétés générales des systèmes de surfaces du second ordre inscrites ou circonscrites à la fois à deux autres surfaces du même ordre; propriétés dont la recherche fera le sujet d'un autre article.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution de deux des six problèmes de géométrie énoncés à la pag. 155 *du précédent volume*;

Par un Abonné.

PROBLÈME I. *Sur le plan d'un triangle donné décrire un cercle qui intercepte, sur les directions des trois côtés de ce triangle, des cordes égales à trois droites données?*

Solution. Comme il faut trois conditions pour déterminer un cercle sur un plan, on voit d'abord que le problème est déterminé, c'est-à-dire qu'il ne peut être résolu que par un nombre de cercles limité.

Si l'on exigeait seulement que les cordes interceptées par le cercle cherché, sur les directions des deux côtés d'un même angle du triangle donné, fussent égales à deux droites données, le problème deviendrait indéterminé, c'est-à-dire qu'il pourrait être résolu par une infinité de cercles se succédant les uns aux autres sans interruption; les centres de tous ces cercles seraient donc sur une certaine courbe. A chaque sommet du triangle répondrait une semblable courbe, et les courbes, répondant aux trois sommets, se couperaient aux centres des cercles qui résoudraient le problème. Voyons donc quelle est la nature de ces courbes.

Soient a, b deux des côtés du triangle donné et γ l'angle compris; prenons ces deux côtés pour axes des x et des y, et cherchons sur quelle courbe se trouvent situés les centres de tous les cercles qui interceptent, sur ces mêmes côtés, des longueurs données $2a'$ et $2b'$.

Soit (t, u) l'un de ces centres; les perpendiculaires abaissées de ce point sur les deux côtés a, b seront respectivement $u\text{Sin.}\gamma$ et $t\text{Sin.}\gamma$; leurs pieds tomberont sur les milieux des cordes $2a'$ et $2b'$; de sorte qu'en ajoutant respectivement a'^2 et b'^2 aux carrés des longueurs de ces perpendiculaires, on aura deux expressions du carré du rayon du cercle qu'on pourra égaler entre elles; ce qui donnera

$$u^2\text{Sin.}^2\gamma+a'^2=t^2\text{Sin.}^2\gamma+b'^2 ,$$

c'est-a-dire,

$$t^2-u^2=\frac{a'^2-b'^2}{\text{Sin.}^2\gamma} ;$$

telle est donc l'équation du lieu des centres de tous les cercles qui interceptent sur les deux côtés a, b de l'angle γ du triangle donné, des longueurs respectivement égales à $2a'$ et $2b'$.

On reconnaît cette équation pour celle d'une hyperbole dont les asymptotes divisent en deux parties égales les quatre angles que forment les directions des côtés a et b; ces asymptotes sont donc rectangulaires, et conséquemment l'hyperbole est équilatère; elle passe d'ailleurs par les quatre points donnés par les deux doubles équations

$$t=\pm\frac{a'}{\text{Sin}.\gamma}\ ,\qquad u=\pm\frac{b'}{\text{Sin}.\gamma}\ ,$$

dont les distances aux deux côtés a et b sont respectivement $\pm a'$ et $\pm b'$; la solution du problème proposé est donc renfermée dans le théorème suivant :

THÉORÈME I. Aux trois côtés a , b , c *d'un triangle donné soient menées , de part et d'autre , des parallèles qui en soient respectivement distantes des quantités données* a′, b′ , c′ ; *ces trois couples de parallèles formeront , par leur rencontre , trois parallélogrammes ayant leurs centres aux trois sommets du triangle. A chacun de ces parallélogrammes soit circonscrite une hyperbole équilatère , ayant pour asymptotes les deux droites , perpendiculaires l'une à l'autre , divisant en deux parties égales , tant l'angle du triangle donné qui a son sommet au centre du parallélogramme , que le supplément de cet angle. Les trois hyperboles ainsi décrites se couperont en quatre points , centres d'autant de cercles qui intercepteront , sur les directions des trois côtés* a , b , c *du triangle donné , des longueurs respectivement égales à* 2a′, 2b′, 2c′.

Les centres des cercles cherchés ainsi déterminés , rien ne sera plus aisé que d'en trouver les rayons respectifs ; car , pour chacun d'eux, en abaissant de son centre des perpendiculaires sur les directions des trois côtés a , b , c, et prenant , sur ces mêmes directions , de part et d'autre , des pieds de ces perpendiculaires , des longueurs respectivement égales à a' , b' , c' , on obtiendra six points de la circonférence à décrire.

Si deux des trois longueurs données a' , b' , c' étaient égales entre elles , l'une des trois hyperboles se réduirait à ses asymptotes, et il serait facile de ramener les intersections de chacune de ces asymptotes , avec l'une des deux autres hyperboles, à celle de cette même asymptote avec un cercle ; de sorte qu'alors le problème serait rigoureusement résoluble avec la règle et le compas.

Si les longueurs données a', b', c' étaient toutes trois égales entre elles, les hyperboles se réduiraient toutes trois à leurs asymptotes, et les centres des quatre cercles cherchés ne seraient autres alors que les centres des cercles inscrits et ex-inscrits au triangle proposé ; ce qui est d'ailleurs évident.

PROBLÈME II. Sur le plan d'un triangle donné décrire un cercle tel que les angles circonscrits qui auront mêmes sommets que ce triangle soient égaux à trois angles donnés ?

Solution. Comme il faut trois conditions pour déterminer un cercle sur un plan, on voit d'abord que le problème est déterminé, c'est-à-dire qu'il ne peut être résolu que par un nombre de cercles limité.

Si l'on exigeait seulement que les angles circonscrits au cercle cherché, ayant pour sommets deux des sommets du triangle donné, fussent égaux à deux angles donnés, le problème deviendrait indéterminé, c'est-à-dire qu'il pourrait être résolu par une infinité de cercles, se succédant les uns aux autres sans interruption ; les centres de tous ces cercles seraient donc sur une certaine courbe. A chaque côté du triangle répondrait une semblable courbe, et les courbes répondant aux trois côtés se couperaient aux centres des cercles qui résoudraient le problème. Voyons donc quelle est la nature de ces courbes.

Soient c un des côtés du triangle donné et α, β les deux angles adjacens ; prenons ce côté pour axe des x, le sommet de l'angle α pour origine et la direction de l'autre côté de cet angle pour axe des y, et cherchons sur quelle courbe se trouvent situés les centres de tous les cercles tels que les angles circonscrits qui ont mêmes sommets que les deux angles α et β soient égaux à deux angles donnés $2\alpha'$ et $2\beta'$.

Soit (t, u) le centre de l'un de ces cercles ; les droites qui le joindront aux deux sommets de α et β auront respectivement pour longueurs

$$\sqrt{t^2+2tu\text{Cos}\,\alpha+u^2}\ ,\qquad \sqrt{u^2+2u(t-c)\text{Cos}.\alpha+(t-c)^2}\ ;$$

lesquelles multipliées respectivement par $\text{Sin}.\alpha'$ et $\text{Sin}.\beta'$ donneront deux expressions du rayon du cercle cherché que l'on pourra égaler entre elles ; on aura donc en quarrant

$$(t^2+2tu\text{Cos}.\alpha+u^2)\text{Sin}.^2\alpha'=\{u^2+2u(t-c)\text{Cos}.\alpha+(t-c)^2\}\text{Sin}.^2\beta'\ ;$$

telle est donc l'équation du lieu des centres de tous les cercles tels que les angles circonscrits qui ont mêmes sommets que les angles α et β, adjacens au côté c du triangle donné, sont respectivement égaux aux angles donnés $2\alpha'$ et $2\beta'$.

On reconnaît aisément que cette équation est celle d'un cercle qui a son centre sur l'axe des x, c'est-à-dire, sur la direction du côté c du triangle donné; de sorte qu'il suffira, pour pouvoir le décrire, de connaître les deux extrémités de celui de ses diamètres qui est dirigé suivant cette droite; c'est ce à quoi on parviendra en faisant dans cette équation $u=0$, et en déterminant les deux valeurs de t qui en résultent. On obtient ainsi

$$t^2\text{Sin}.^2\alpha'=(t-c)^2\text{Sin}.^2\beta'.$$

d'où

$$\pm t\text{Sin}.\alpha'=(t-c)\text{Sin}.\beta'$$

et par conséquent

$$t=\frac{c\text{Sin}.\beta'}{\text{Sin}.\beta'\pm\text{Sin}.\alpha'}$$

On reconnaît aisément que ces valeurs répondent à deux points, l'un sur le côté c lui-même et l'autre sur son prolongement, dont les distances à ses deux extrémités sont en raison inverse des sinus des angles α' et β' qui leur correspondent ou en raion directe de leurs cosécantes ; de sorte que la solution du problème proposé est renfermé dans le théorème suivant :

THÉORÈME II. Des sommets des trois angles α, β, γ d'un triangle donné, pris tour à tour pour centres, soient décrits trois cercles dont les rayons, d'ailleurs de grandeur arbitraire, soient respectivement proportionnels aux cosécantes de trois angles donnés α', β', γ', et soient déterminés les centres d'homologie ou de similitude de ces trois cercles, pris successivement deux à deux. Si, sur les distances entre les deux centres d'homologie relatifs à chaque couple de cercles, prises tour à tour pour diamètres, on décrit trois nouveaux cercles, ces derniers passeront tous trois par deux points, centres de deux cercles tels que les angles circonscrits qui auront mêmes sommets que les trois angles α, β, γ du triangle donné seront respectivement égaux à $2\alpha'$, $2\beta'$, $2\gamma'$ (*).

(*) C'est exactement à cela que revient, pour le fond, une solution qui nous a été adressée par M. Pagliani, cadet au corps royal des Pionniers à Modène ; mais l'auteur se borne à *démontrer* une construction que sa sagacité lui a suggérée, tandis qu'ici l'analyse fait *découvrir* cette construction.

On sait que tous les points du plan de deux cercles, desquels ces cercles sont vus sous des angles égaux sont ceux de la circonférence décrite sur la distance entre leurs centres d'homologie, prise pour diamètre ; d'où il suit que les deux points du plan de trois cercles d'où ces cercles sont vus sous des angles égaux sont ceux où se coupent les trois cercles décrits de la même manière, par rapport à ces trois-là, pris tour à tour deux à deux. D'après cette remarque le théorème pourra être très-brièvement énoncé comme il suit :

Le centre du cercle qui est vu des sommets d'un triangle donné sous trois angles donnés, est le point d'où l'on verrait, sous des angles égaux, trois

Les centres des deux cercles qui résolvent le problème ainsi déterminés, rien ne sera plus facile que d'en trouver les rayons respectifs; car, pour chacun, en joignant son centre aux sommets des trois angles α, β, γ par des droites, et menant, par les mêmes sommets, de nouvelles droites faisant respectivement avec celles-là des angles α', β', γ''; les perpendiculaires abaissées du centre sur ces dernières seront des rayons du cercle à décrire.

Si deux des trois angles donnés α', β', γ' étaient égaux entre eux, l'un des cercles, lieux des centres des cercles cherchés, se réduirait à une perpendiculaire sur le milieu de l'un des côtés du triangle donné, axe de symptose ou axe radical des deux autres; et, si ces trois angles étaient égaux, les trois cercles se réduisant tous alors à des perpendiculaires sur les milieux des côtés du triangle donné, le centre du cercle cherché ne serait donc autre que le centre du cercle circonscrit à ce triangle; ce qui est d'ailleurs évident.

A cause de la parfaite analogie qui existe entre ces deux problèmes, on était fondé à soupçonner que, puisque le premier se résout par des intersections d'hyperboles équilatères, l'autre se résoudrait par des intersections de cercles.

Les quatre autres problèmes de l'endroit cité ne seraient pas plus difficiles à traiter que ces deux-là, si les formules de la géométrie analytique à trois dimensions, relatives aux axes de coordonnées obliques, nous étaient plus familières.

Lyon, le 28 juillet 1828.

---

cercles qui auraient pour centres les sommets du triangle, et dont les rayons seraient respectivement proportionnels aux cosécantes des moitiés des trois angles donnés.

J. D. G.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Théorèmes de géométrie proposés à démontrer ;

Par M. F. Sarrus.

I. Les milieux des cordes interceptées par une conique, sur des droites issues d'un même point, sont sur une autre conique qui lui est homothétique et qui passe par le point dont il s'agit.

II. Les milieux des cordes interceptées par une surface du second ordre, sur des droites issues d'un même point de l'espace, sont sur une autre surface du second ordre qui lui est homothétique et qui passe par le point dont il s'agit.

Problèmes à résoudre.

I. Quel est le lieu des droites qui divisent en deux parties égales les angles suivant lesquels une surface conique du second ordre est coupée par les plans conduits par une même droite menée par son sommet ?

II. Quel est le lieu des centres de toutes les sections faites dans une surface du second ordre par des plans qui se coupent suivant une même droite ?

III. A quelle courbe sont tangentes les droites qui divisent en deux parties égales les angles circonscrits à une conique, qui ont leurs sommets sur une même droite ?

IV. A quelle surface sont tangens les plans qui divisent en deux parties égales les angles dièdres circonscrits à une même surface conique du second ordre, qui ont leurs arêtes sur un même plan conduit par son sommet ?

V. Les diamètres principaux des surfaces coniques circonscrites à une même surface du second ordre, qui ont leurs sommets sur une même droite, sont-ils tangens à une même courbe, et quelle est cette courbe ?

VI. A quelle surface sont tangens les plans qui divisent en deux parties égales les angles dièdres circonscrits à une même surface du second ordre, qui ont leurs arêtes dans un même plan ?

VII. A quelle surface sont tangens les plans qui divisent en deux parties égales les angle dièdres circonscrits à une même surface du second ordre, dont les arêtes passent par un même point. ?

VIII. A quelle surface sont tangens les diamètres principaux des surfaces coniques circonscrites à une surface du second ordre, qui ont leurs sommets dans un même plan ?

Problème proposé par M. W. H. T.

Quelles doivent être les dimensions d'un cylindre droit, inscrit à une sphère, pour que sa surface ou son volume soit un *maximum ?*

Problèmes proposés par M. L. P. E. R.

I. Lorsqu'on donne les trois côtés d'un triangle, le triangle est donné, et, par suite, sont aussi donnés les rayons des quatre cercles inscrits et ex-inscrits, entre lesquels il doit conséquemment exister une certaine relation. (*Annales*, tom. XIX, pag. 86).

Mais, parce que la ligne droite n'est qu'un cas particulier du cercle, un triangle n'est qu'un cas particulier du système de trois cercles auxquels huit autres cercles peuvent être tangens.

Or, trois cercles sont déterminés sur un plan par six élémens; savoir : leurs rayons et les distances entre leurs centres; d'où l'on voit que les rayons des huit cercles qui les touchent tous trois sont des fonctions de ces six élémens, et qu'en conséquence il doit exister deux relations distinctes entre ces huit rayons.

On propose d'assigner ces deux relations ?

II. Des considérations analogues prouvent qu'il doit aussi exister deux relations distinctes entre les angles générateurs des huit cônes de révolution qui touchent, à la fois, trois cônes donnés de révolution de même sommet.

On propose également d'assigner ces deux relations ?

III. Des considérations analogues prouvent encore que, de même qu'il existe deux relations distinctes (*Annales*, tom. XIX, pag. 94) entre les rayons des huit sphères qui touchent à la fois les quatre faces d'un tétraèdre donné, il en doit exister six entre les rayons des seize sphères qui touchent, à la fois, quatre sphères données.

On propose aussi d'assigner ces six relations ?

HYDRO-DYNAMIQUE.

Mémoire sur les oscillations des corps flottans ;

Par M. F. Sarrus, docteur agrégé ès sciences, professeur de mathématiques et de physique à Perpignan.

Le problème qui fait le sujet de cet essai, traité avec toute la généralité dont il est susceptible, consisterait à déterminer les divers mouvemens d'oscillation que peut prendre un corps solide libre, pesant, plongé en tout ou en partie dans un fluide également soumis à l'action de la pesanteur, mais qui peut être indifféremment compressible ou incompressible, homogène ou composé de couches de nature différente.

Dans l'état actuel de la science, la solution rigoureuse de ce problème est, pour ainsi dire, impossible ; aussi les divers géomètres qui ont essayé d'en résoudre quelques cas particuliers, n'ont-ils pu y parvenir qu'au moyen des hypothèses suivantes, savoir :

1.° Que la pression qu'éprouve chacun des points du corps flottant peut être calculée comme si le fluide n'avait aucun mouvement ;

2.° Que les divers mouvemens du corps flottant sont assez petits pour qu'il soit permis de négliger, sans erreur sensible, les quantités de l'ordre des carrés ou produits de ces mouvemens ;

3.° Que les dimensions du corps flottant sont assez petites pour qu'on puisse regarder la pesanteur comme une force de grandeur constante, agissant suivant des directions parallèles.

Comme dans les cas réellement utiles, ces diverses suppositions ne s'écartent que bien peu de la vérité, les résultats auxquels elles conduisent peuvent être considérés comme suffisamment approchés ; nous les adopterons donc dans ce qui va suivre ; mais, à cela près, nous présenterons une solution purement analytique du problème général, tel que nous l'avons posé ci-dessus.

Représentons, suivant l'usage, par g la gravité, la masse d'une molécule quelconque du corps flottant par $\mathrm{D}m$, la pression normale qu'éprouve chaque point d'un élément ω de la surface de ce corps par p, la normale correspondante, mesurée depuis un point de cette droite pris dans l'intérieur du corps, par r, prenant l'axe des z vertical et dirigé de haut en bas, et observant que la pression p tend à diminuer la longueur r de la normale, nous aurons, pour déterminer le mouvement du corps flottant, l'équation

$$\mathrm{S}\left(\frac{\mathrm{d}^2x\delta x+\mathrm{d}^2y\delta y+\mathrm{d}^2z\delta z}{\mathrm{d}t^2}\right)\mathrm{D}m=\mathrm{S}g\delta z\mathrm{D}m-\int p\omega\delta r\ , \qquad (1)$$

dans laquelle les intégrales indiquées par la caractéristique S sont relatives à la molécule $\mathrm{D}m$, et doivent s'étendre à toute la masse du corps flottant, tandis que l'intégrale indiquée par la caractéristique $\int$ est relative à l'élément ω, et doit s'étendre seulement à toute la partie de la surface de ce même corps qui est baignée par le fluide. On doit observer, en outre, que les variations δx, δy, δz ne sont pas entièrement arbitraires, parce qu'elles doivent satisfaire à la condition d'invariabilité de distance entre deux molécules quelconques. Cette condition va nous conduire à la forme la plus générale de ces variations.

En désignant par x, y, z; X, Y, Z les coordonnées de deux molécules quelconques du corps flottant, le carré de leur distance sera exprimé par

$$(x-X)^2+(y-Y)^2+(z-Z)^2,$$

dont la variation doit être identiquement nulle; ce qui donne

$$o=(x-X)(\delta x-\delta X)+(y-Y)(\delta y-\delta Y)+(z-Z)(\delta z-\delta Z),$$

laquelle doit être satisfaite, quelles que soient les valeurs particulières des coordonnées x, y, z, X, Y, Z.

En prenant successivement pour (X, Y, Z) trois points fixés invariablement avec la masse du corps flottant, l'on arriverait à trois équations semblables à la précédente, et au moyen desquelles on parviendrait à déterminer δx, δy, δz, en fonction de x, y, z, des coordonnées des trois points auxiliaires et des variations de ces coordonnées; c'est-à-dire en fonction de x, y, z et d'autres quantités qui ont la même valeur pour toute autre molécule. Cela posé, si l'on différentie l'équation ci-dessus, successivement par rapport à x, y, z, et que l'on observe que X, Y, Z doivent être traités comme des constantes, l'on trouvera

$$o=\delta x-\delta X+(x-X)\frac{d\delta x}{dx}+(y-Y)\frac{d\delta y}{dx}+(z-Z)\frac{d\delta z}{dx},$$

$$o=\delta y-\delta Y+(x-X)\frac{d\delta x}{dy}+(y-Y)\frac{d\delta y}{dy}+(z-Z)\frac{d\delta z}{dy},$$

$$o=\delta z-\delta Z+(x-X)\frac{d\delta x}{dz}+(y-Y)\frac{d\delta y}{dz}+(z-Z)\frac{d\delta z}{dz}.$$

En différentiant celles-ci, à leur tour, successivement par rapport à X, Y, Z, et observant que, dans ce cas, ces quantités et leurs variations sont les seules que l'on doive traiter comme variables, on trouvera

$$o=\frac{d\delta x}{dx}+\frac{d\delta X}{dX}\ ,\quad o=\frac{d\delta x}{dy}+\frac{d\delta Y}{dX}\ ,\quad o=\frac{d\delta x}{dz}+\frac{d\delta Z}{dX}\ ,$$

$$o=\frac{d\delta y}{dx}+\frac{d\delta X}{dY}\ ,\quad o=\frac{d\delta y}{dy}+\frac{d\delta Y}{dY}\ ,\quad o=\frac{d\delta y}{dz}+\frac{d\delta Z}{dY}\ ,$$

$$o=\frac{d\delta z}{dx}+\frac{d\delta X}{dZ}\ ;\quad o=\frac{d\delta z}{dy}+\frac{d\delta Y}{dZ}\ ;\quad o=\frac{d\delta z}{dz}+\frac{d\delta Z}{dZ}\ .$$

Comme les différens termes qui entrent dans ces équations sont indépendans les uns des x, y, z et les autres de X, Y, Z, on en conclura sans peine qu'ils sont tous indépendans tant de x, y, z que de X, Y, Z, et que, par conséquent, on doit avoir identiquement

$$\frac{d\delta x}{dx}=\frac{d\delta X}{dX}\ ,\quad \frac{d\delta x}{dy}=\frac{d\delta X}{dY}\ ,\quad \frac{d\delta x}{dz}=\frac{d\delta X}{dZ}\ ,$$

$$\frac{d\delta y}{dx}=\frac{d\delta Y}{dX}\ ,\quad \frac{d\delta y}{dy}=\frac{d\delta Y}{dY}\ ,\quad \frac{d\delta y}{dz}=\frac{d\delta Y}{dZ}\ ,$$

$$\frac{d\delta z}{dx}=\frac{d\delta Z}{dX}\ ;\quad \frac{d\delta z}{dy}=\frac{d\delta Z}{dY}\ ;\quad \frac{d\delta z}{dz}=\frac{d\delta Z}{dZ}\ ;$$

dont la comparaison avec celles qui précédent nous conduit à faire

$$\frac{d\delta x}{dx}=o\ ,\quad \frac{d\delta y}{dz}=-\frac{d\delta z}{dy}=\lambda\ ,$$

$$\frac{d\delta y}{dy}=o\ ,\quad \frac{d\delta z}{dx}=-\frac{d\delta x}{dz}=\mu\ ,$$

$$\frac{d\delta z}{dz}=o\ ,\quad \frac{d\delta x}{dy}=-\frac{d\delta y}{dx}=\nu\ ;$$

en désignant par λ, μ, ν des quantités quelconques indépendantes de x, y, z, et qui doivent conserver leurs valeurs pour toutes les molécules.

Présentement les différentielles totales de δx, δy, δz, prises en regardant le temps comme constant, donnent identiquement

$$\mathrm{d}\delta x=\frac{\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+\frac{\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z\ ,$$

$$\mathrm{d}\delta y=\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z\ ,$$

$$\mathrm{d}\delta z=\frac{\mathrm{d}\delta z}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{d}\delta z}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+\frac{\mathrm{d}\delta z}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z\ ;$$

lesquelles, au moyen des résultats que nous venons d'obtenir, se réduiront à

$$\mathrm{d}\delta x=\nu\mathrm{d}y-\mu\mathrm{d}z\ ,$$

$$\mathrm{d}\delta y=\lambda\mathrm{d}z-\nu\mathrm{d}x\ ,$$

$$\mathrm{d}\delta z=\mu\mathrm{d}x-\lambda\mathrm{d}y\ ;$$

qui, par leur intégration, nous donneront pour δx, δy, δz les valeurs suivantes:

$$\left.\begin{array}{l}\delta x=\alpha+\nu y-\mu z\ ;\\ \delta y=\beta+\lambda z-\nu x\ ,\\ \delta z=\gamma+\mu x-\lambda y\ ;\end{array}\right\}\qquad(2)$$

dans lesquelles α, β, γ sont des quantités indépendantes de x, y, z, mais d'ailleurs arbitraires.

Avant de substituer ces valeurs de δx, δy, δz dans l'équation (1), il convient de mettre le terme $\int p\omega\delta r$ de cette équation sous une forme qui se prête plus facilement aux calculs que nous aurons à effectuer par la suite.

Lorsque le corps flottant est entièrement plongé dans le fluide, cette intégrale $\int p\omega\delta r$ doit être prise dans toute l'étendue de la surface de ce corps. Or, on pourra toujours admettre qu'il en est ainsi, pourvu qu'on regarde, s'il le faut, la densité du fluide comme étant nulle dans une étendue plus ou moins considérable. Au moyen de ce petit artifice, nous n'aurons plus besoin de distinguer le cas où le corps flottant est entièrement plongé dans le fluide de celui où il ne l'est qu'en partie seulement.

Cela posé, soient a, b, c les coordonnées de l'origine de la normale; nous aurons

$$r^2=(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2$$

et par suite

$$\delta r=-\frac{a-x}{r}\delta x-\frac{b-y}{r}\delta y-\frac{c-z}{r}\delta z,$$

d'où on conclura

$$-\int p\omega\delta r=\int p\omega.\frac{a-x}{r}\delta x+\int p\omega.\frac{b-y}{r}\delta y+\int p\omega.\frac{c-z}{r}\delta z:$$

Présentement nous observerons que l'expression $\frac{a-x}{r}$ est celle du cosinus de l'angle que ferait cette normale avec une parallèle menée par son pied, à l'axe des x; et que, par suite, cette expression est aussi celle du cosinus de l'inclinaison de l'élément ω sur le plan des yz; de sorte que la projection de cet élément sur le plan des yz est, abstraction faite de son signe, égale à $\omega.\frac{a-x}{r}$. Appelant donc $dydz$ cette projection, nous aurons

$$\omega.\frac{a-x}{r}=\pm\mathrm{d}y\mathrm{d}z\,;$$

le signe + ou — devant être convenablement déterminé. Pour reconnaître quel est celui de ces deux signes qu'il faut prendre, dans chaque cas particulier, considérons une droite indéfinie parallèle à l'axe des x; les valeurs de y et de z, relatives aux différens points de cette droite, seront toujours les mêmes; il n'y aura que celle de x qui changera. Nommant donc x_1, x_2, x_3, ... les valeurs de x qui sont relatives aux points où la droite perce la surface du corps flottant, et supposant ces valeurs rangées dans un ordre tel que l'on ait

$$x_2-x_1>0\,,\qquad x_3-x_2>0\,,\qquad x_4-x_3>0\,,\ \ldots\ldots,$$

ce qui est toujours possible, on verra sans peine que les différens points de cette droite, pour lesquels x se trouve compris entre x_1 et x_2, x_3 et x_4, x_5 et x_6, ... sont situés dans l'intérieur du corps flottant, et les autres, c'est-à-dire, ceux pour lesquels x se trouve compris entre x_2 et x_3, x_4 et x_5, ... en dehors de ce corps ; ce qui exige que les points d'intersection de la droite avec la surface du corps flottant soient en nombre pair, et, de plus, que, par cela seul que la normale r doit être tout entière dans l'intérieur du corps flottant, on ait

$$a_1-x_1>0\,,\qquad a_2-x_2<0\,,\qquad a_3-x_3>0\,,\ \ldots\ldots$$

a_1, a_2, a_3, ... représentant les valeurs de a qui correspondent aux normales r_1, r_2, r_3, ... relatives à x_1, x_2, x_3, ... Si donc on représente par ω_1, ω_2, ω_3, ... les élémens de la surface du corps flottant qui se trouvent situés aux différens points où cette surface est percée par la parallèle à l'axe des x dont il vient d'être question, nous pourrons faire

$$\omega_1 . \frac{a_1 - x_1}{r_1} = + \mathrm{d}y \mathrm{d}z \quad ,$$

$$\omega_2 . \frac{a_2 - x_2}{r_2} = - \mathrm{d}y \mathrm{d}z \quad ,$$

$$\omega_3 . \frac{a_3 - x_3}{r_3} = + \mathrm{d}y \mathrm{d}z \quad ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

En observant que ces élémens peuvent toujours être pris de telle grandeur que leurs projections soient égales entre elles, nous conclurons de là

$$p_1 \omega_1 . \frac{a_1 - x_1}{r_1} \delta x_1 + p_2 \omega_2 . \frac{a_2 - x_2}{r_2} \delta x_2 + p_3 \omega_3 . \frac{a_3 - x_3}{r_3} \delta x_3 + \ldots\ldots$$
$$= - \mathrm{d}y \mathrm{d}z (p_2 \delta x_2 - p_1 \delta x_1 + p_4 \delta x_4 - p_3 \delta x_3 + \ldots\ldots) \ ,$$

en désignant par $p_1, p_2, p_3, \ldots\ldots$ les valeurs de p qui sont relatives aux élémens $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots\ldots$

Maintenant nous observerons que les valeurs de $\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3, \ldots\ldots$ doivent être données par la première des équations (2), et que, par conséquent, elles ne sont fonctions que des coordonnées y, z, lesquelles conservent leurs valeurs dans toute l'étendue de la transversale, et qu'ainsi l'on a

$$\delta x_1 = \delta x_2 = \delta x_3 = \ldots\ldots = \delta x \ ;$$

ce qui change le résultat obtenu ci-dessus en celui qui suit :

$$p_1 \omega_1 . \frac{a_1 - x_1}{r_1} \delta x_1 + p_2 \omega_2 \frac{a_2 - x_2}{r_2} \delta x_2 + p_3 \omega_3 . \frac{a_3 - x_3}{r_3} \delta x_3 + \ldots\ldots$$
$$= - \mathrm{d}y \mathrm{d}z \delta x (p_2 - p_1 + p_4 - p_3 + \ldots\ldots) \ .$$

Présentement, si l'on regarde p comme une fonction purement analytique dont l'existence a lieu dans tous les points de l'espace, on pourra faire

$$p_2 - p_1 + p_3 - p_4 + \ldots\ldots = \int \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\ ,$$

pourvu seulement que l'on ne prenne l'intégrale du second membre que pour les points situés dans l'intérieur du corps flottant ; par suite nous aurons

$$p_1\omega_1.\ \frac{a_1 - x_1}{r_1}\,\delta x_1 + p_2\omega_2.\ \frac{a_2 - x_2}{r_2}\,\delta x_2 + p_3\omega_3.\ \frac{a_3 - x_3}{r_3} + \ldots = -\mathrm{d}y\mathrm{d}z\delta x \int \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\ .$$

Pour obtenir l'intégrale $\int p\omega.\frac{a-x}{r}\delta x$, nous n'aurons qu'à prendre la somme de toutes les expressions analogues à celle qui forme le second membre de cette équation, ce qui nous donnera

$$\int p\omega.\ \frac{a-x}{r}\,\delta x = -\iint \mathrm{d}y\mathrm{d}z\delta x \int \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = -\iiint \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.\ \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\,\delta x\ ,$$

on aura semblablement

$$\int p\omega.\ \frac{b-y}{r}\,\delta y = -\iiint \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.\ \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\,\delta y\ , \qquad \int p\omega.\ \frac{c-z}{r}\,\delta z = -\iiint \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.\ \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\,\delta z\ ,$$

et par suite

$$\int p\omega\delta r = +\iiint \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\,\delta x + \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\,\delta y + \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\,\delta z \right)\ ;$$

ou enfin

$$\int p\omega\delta r = +\iiint \delta p.\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\ ;$$

l'intégrale du second membre devant être prise dans toute l'étendue de l'espace occupé par le corps flottant. En substituant cette valeur dans l'équation (1) elle deviendra

$$\mathrm{S}\left(\frac{\mathrm{d}^2x\delta x+\mathrm{d}^2y\delta y+\mathrm{d}^2z\delta z}{\mathrm{d}t^2}\right)\mathrm{D}m=g\mathrm{S}\delta z\mathrm{D}m-\int\!\!\int\!\!\int\delta p.\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\ . \quad (3)$$

Il nous reste à mettre dans cette équation la valeur de δp, valeur que nous ne pouvons trouver qu'en supposant l'équilibre du fluide; ce qui donne, comme l'on sait,

$$\delta p=g\Delta\delta z\ , \qquad (4)$$

en désignant par Δ la densité de ce fluide. Au moyen de cette valeur, l'équation (3) deviendra

$$\mathrm{S}\left(\frac{\mathrm{d}^2x\delta x+\mathrm{d}^2y\delta y+\mathrm{d}^2z\delta z}{\mathrm{d}t^2}\right)\mathrm{D}m=g\mathrm{S}\delta z\mathrm{D}m-g\int\!\!\int\!\!\int\Delta\delta z.\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\ ; \quad (5)$$

dans laquelle il faudra substituer les valeurs de δx, δy, δz, données par les équations (2) ; mais il convient auparavant de lui faire subir encore une transformation.

Désignons par X, Y, Z les coordonnées du centre de gravité du corps flottant, et faisant

$$x=X+x'\ , \qquad y=Y+y'\ , \qquad z=Z+z'\ ,$$

nous aurons identiquement

$$\mathrm{S}x\mathrm{D}m=\mathrm{S}X\mathrm{D}m+\mathrm{S}x'\mathrm{D}m=mX+\mathrm{S}x'\mathrm{D}m\ ,$$

$$\mathrm{S}y\mathrm{D}m=\mathrm{S}Y\mathrm{D}m+\mathrm{S}y'\mathrm{D}m=mY+\mathrm{S}y'\mathrm{D}m\ ,$$

$$\mathrm{S}z\mathrm{D}m=\mathrm{S}Z\mathrm{D}m+\mathrm{S}z'\mathrm{D}m=mZ+\mathrm{S}z'\mathrm{D}m\ ;$$

mais d'un autre côté, par la propriété du centre de gravité, on doit avoir

$$mX = \mathrm{S}x\mathrm{D}m\,, \qquad mY = \mathrm{S}y\mathrm{D}m\,, \qquad mZ = \mathrm{S}z\mathrm{D}m\,;$$

d'où on conclura

$$\mathrm{S}x'\mathrm{D}m = 0\,, \qquad \mathrm{S}y'\mathrm{D}m = 0\,, \qquad \mathrm{S}z'\mathrm{D}m = 0\,.$$

Au moyen de ces valeurs, le premier membre de l'équation (5) deviendra

$$\mathrm{S}\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d^2X\delta X + d^2Y\delta Y + d^2Z\delta Z + d^2X\delta x' + d^2Y\delta y' + d^2Z\delta z'}{dt^2} \\ + \dfrac{d^2x'\delta X + d^2y'\delta Y + d^2z'\delta Z + d^2x'\delta x' + d^2y'\delta y' + d^2z'\delta z'}{dt^2} \end{array}\right\}\mathrm{D}m\,.$$

Maintenant les valeurs de X, Y, Z étant les mêmes pour toutes les molécules $\mathrm{D}m$, ces quantités et leurs différentielles pourront se mettre hors du signe S, ce qui nous donnera

$$\mathrm{S}\left(\frac{d^2X\delta X + d^2Y\delta Y + d^2Z\delta Z}{dt^2}\right)\mathrm{D}m = m\left(\frac{d^2X\delta X + d^2Y\delta Y + d^2Z\delta Z}{dt^2}\right)$$

$$\mathrm{S}\,\frac{d^2X}{dt^2}\,\delta x'\mathrm{D}m = \frac{d^2X}{dt^2}\,\mathrm{S}\delta x'\mathrm{D}m\,,$$

$$\mathrm{S}\,\frac{d^2Y}{dt^2}\,\delta y'\mathrm{D}m = \frac{d^2Y}{dt^2}\,\mathrm{S}\delta y'\mathrm{D}m\,,$$

$$\mathrm{S}\,\frac{d^2Z}{dt^2}\,\delta z'\mathrm{D}m = \frac{d^2Z}{dt^2}\,\mathrm{S}\delta z'\mathrm{D}m\,,$$

$$\mathrm{S}\,\frac{d^2x'}{dt^2}\,\delta X\mathrm{D}m = \delta X\mathrm{S}\,\frac{d^2x'}{dt^2}\,\mathrm{D}m\,;$$

$$\mathrm{S}\,\frac{d^2y'}{dt^2}\,\delta Y\mathrm{D}m = \delta Y\mathrm{S}\,\frac{d^2y'}{dt^2}\,\mathrm{D}m\,,$$

$$S\frac{d^2z'}{dt^2}\delta Z Dm = \delta Z T\frac{d^2z'}{dt^2}Dm\ .$$

Au moyen de ces valeurs, le premier membre de l'équation (5) deviendra

$$m\left(\frac{d^2X\delta X + d^2Y\delta Y + d^2Z\delta Z}{dt^2}\right) + S\left(\frac{d^2x'\delta x' + d^2y'\delta y' + d^2z'\delta z'}{dt^2}\right)Dm$$

tandis que le second sera

$$gS(\delta Z + \delta z')Dm - g\int\int\int(\delta Z + \delta z')\Delta dx'dy'dz'\ ,$$

ou encore

$$gm\delta Z - g\delta Z\int\int\int\Delta dx'dy'dz' - g\int\int\int\delta z'\Delta dx'dy'dz'\ ,$$

en observant que $S\delta z'Dm = 0$. Cette équation (5) pourra donc se mettre sous la forme

$$\left.\begin{array}{l} m\left(\frac{d^2X\delta X + d^2Y\delta Y + d^2Z\delta Z}{dt^2}\right) + S\left(\frac{d^2x'\delta x' + d^2y'\delta y' + d^2z'\delta z'}{dt^2}\right)Dm \\ = gm\delta Z - g\delta Z\int\int\int\Delta dx'dy'dz' - g\int\int\int\delta z'\Delta dx'dy'dz'\ . \end{array}\right\}\ (6)$$

Lorsque le corps flottant est entièrement libre, les valeurs de δX, δY, δZ sont arbitraires et indépendantes de $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$; d'où il résulte que leurs coefficiens doivent être identiquement égaux dans les deux membres de cette équation, ce qui donne les équations

$$\frac{d^2X}{dt^2} = 0\ , \quad \frac{d^2Y}{dt^2} = 0\ , \quad m.\frac{d^2Z}{dt^2} = gm - g\int\int\int\Delta dx'dy'dz'\ , \quad (7)$$

lesquelles serviront à déterminer le mouvement du centre de gravité du corps flottant et réduiront l'équation (6) à la suivante:

$$S\left(\frac{d^2x'\delta x'+d^2y'\delta y'+d^2z'\delta z'}{dt^2}\right)Dm=-g\iiint\delta z'\Delta dx'dy'dz' \;. \quad (8)$$

Présentement, les équations (2) nous donneront, comme cas particulier,

$$\delta X=\alpha+\nu Y-\mu Z \;,$$
$$\delta Y=\beta+\lambda Z-\nu X \;,$$
$$\delta Z=\gamma+\mu X-\lambda Y \;,$$

lesquelles retranchées des équations (2) donnent

$$\nu(y-Y)-\mu(z-Z)=\delta x-\delta X \;,$$
$$\lambda(z-Z)-\nu(x-X)=\delta y-\delta Y \;,$$
$$\mu(x-X)-\lambda(y-Y)=\delta z-\delta Z \;;$$

ou, ce qui revient au même,

$$\delta x'=\nu y'-\mu z' \;,$$
$$\delta y'=\lambda z'-\nu x' \;,$$
$$\delta z'=\mu x'-\lambda y' \;,$$

d'après les valeurs $x=X+x'$, $y=Y+y'$, $z=Z+z'$, posées ci-dessus.

Au moyen de ces valeurs, l'équation (8) deviendra, en mettant λ, μ, ν hors du signe d'intégration,

$$\left.\begin{array}{l}\lambda S\left(\dfrac{z'd^2y'-y'd^2z'}{dt^2}\right)Dm \\ +\mu S\left(\dfrac{x'd^2z'-z'd^2x'}{dt^2}\right)Dm \\ +\nu S\left(\dfrac{y'd^2x'-x'd^2y'}{dt^2}\right)Dm\end{array}\right\}=-g\mu\iiint\Delta x'dx'dy'dz'+g\lambda\iiint\Delta y'dx'dy'dz' \;;$$

laquelle devant avoir lieu quelles que soient les valeurs de λ, μ, ν, donnera identiquement

$$\left.\begin{aligned} S\left(\frac{y'd^2x'-x'd^2y'}{dt^2}\right)Dm&=0\ ,\\ S\left(\frac{x'd^2z'-z'd^2x'}{dt^2}\right)Dm&=-g\iiint\Delta x'dx'dy'dz'\ ,\\ S\left(\frac{y'd^2z'-z'd^2y'}{dt^2}\right)Dm&=-g\iiint\Delta y'dx'dy'dz'\ ;\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

équations qui serviront à déterminer le mouvement du corps flottant autour de son centre de gravité.

Pour déduire les conditions d'équilibre du corps flottant de celles qui précèdent, il suffit évidemment de supposer les vitesses

$$\frac{dX}{dt}\ ,\quad \frac{dY}{dt}\ ,\quad \frac{dZ}{dt}\ ,\quad \frac{dx'}{dt}\ ,\quad \frac{dy'}{dt}\ ,\quad \frac{dz'}{dt}$$

constantes et nulles ; ce qui réduit les équations (7) et (9) aux suivantes

$$\left.\begin{aligned} m&=\iiint\Delta dx'dy'dz'\ ,\\ 0&=\iiint\Delta x'dx'dy'dz'\ ,\\ 0&=\iiint\Delta y'dx'dy'dz'\ ;\end{aligned}\right\}\quad(10)$$

dont la première indique que, dans l'état d'équilibre, la masse du corps flottant doit être égale à celle du fluide qu'il déplace, tandis que les deux autres indiquent que les centres de gravité de ces deux masses doivent être situés dans une même verticale. Telles sont en effet les conditions nécessaires et suffisantes pour assurer l'équilibre. Nous nous occuperons plus loin de la recherche de celles qui peuvent en garantir la stabilité.

Présentement, concevons, par le centre de gravité du corps flottant, trois axes rectangulaires fixes par rapport à ce corps, mais mobiles avec lui dans l'espace. Si l'on représente par a, b, c les coordonnées d'un point quelconque relatives à ces axes, nous aurons

$$dx'dy'dz'=dadbdc\ ,$$

puisque les deux membres de cette équation représentent également le volume Dm d'une molécule quelconque du corps flottant. Par suite, on aura, en général

$$\int\int\int Pdx'dy'dz'=\int Pdadbdc\ . \qquad (11)$$

On parviendrait au surplus à la même conclusion par l'application des procédés connus pour la transformation des intégrales. C'est ainsi que nous transformerons les seconds membres des équations (7) et (9).

Ce qui précède aura toujours lieu, quelles que soient les directions des axes a, b, c ; de sorte que rien ne nous empêche de supposer que, si le corps flottant était en équilibre, ont eût $x'=a$, $y'=b$, $z'=c$. Si l'on fait, dans ce cas,

$$x'=a+x''\ , \qquad y'=b+y''\ , \qquad z'=c+z''\ ;$$

les quantités x'', y'', z'' seront très-petites et de même ordre que les vitesses que peuvent prendre les molécules Dm ; on pourra donc, sans erreur sensible, négliger les quantités de l'ordre de leurs carrés et produits. De plus, les quantités x'', y'', z'' devront être telles que la distance de deux molécules ne soit pas altérée par leur présence et conserve la même valeur que si ces quantités étaient absolument nulles. On peut donc employer, pour les déterminer, les considérations qui nous ont conduit aux équations (2), et poser par conséquent

$$x''=\nu b-\mu c\ ,$$
$$y''=\lambda c-\nu a\ ,$$
$$z''=\mu a-\lambda b\ ,$$

ou λ, μ, ν sont des fonctions inconnues, autres que celles des équations (2), du temps et de constantes indépendantes de a, b, c, qu'il s'agit de déterminer, et où nous supprimons les constantes α, β, γ, attendu que x'', y'', z'' doivent être nuls en même temps que a, b, c. Nous aurons ainsi

$$x'=a+\nu b-\mu c\ ,$$
$$y'=b+\lambda c-\nu a\ ,$$
$$z'=c+\mu a-\lambda b\ ,$$

et par suite, en négligeant les carrés et produits de λ, μ, ν,

$$\frac{y'\mathrm{d}^2x'-x'\mathrm{d}^2y'}{\mathrm{d}t^2}=+(a^2+b^2)\frac{\mathrm{d}^2\nu}{\mathrm{d}t^2}-ca\frac{\mathrm{d}^2\lambda}{\mathrm{d}t^2}-bc\frac{\mathrm{d}^2\mu}{\mathrm{d}t^2}\ ,$$

$$\frac{x'\mathrm{d}^2z'-z'\mathrm{d}^2x'}{\mathrm{d}t^2}=+(c^2+a^2)\frac{\mathrm{d}^2\mu}{\mathrm{d}t^2}-bc\frac{\mathrm{d}^2\nu}{\mathrm{d}t^2}-ab\frac{\mathrm{d}^2\lambda}{\mathrm{d}t^2}\ ,$$

$$\frac{y'\mathrm{d}^2z'-z'\mathrm{d}^2y'}{\mathrm{d}t^2}=-(b^2+c^2)\frac{\mathrm{d}^2\lambda}{\mathrm{d}t^2}+ab\frac{\mathrm{d}^2\mu}{\mathrm{d}t^2}+ca\frac{\mathrm{d}^2\nu}{\mathrm{d}t^2}\ ,$$

multipliant les deux membres de ces équations par Dm, intégrant par rapport à la caractéristique S et posant, pour abréger,

$$\mathrm{S}(b^2+c^2)\mathrm{D}m=A\ ,\qquad \mathrm{S}bc\mathrm{D}m=G\ ,$$
$$\mathrm{S}(c^2+a^2)\mathrm{D}m=B\ ,\qquad \mathrm{S}ca\mathrm{D}m=H\ ,$$
$$\mathrm{S}(a^2+b^2)\mathrm{D}m=C\ ,\qquad \mathrm{S}ab\mathrm{D}m=K\ ,$$

on trouvera

$$\left.\begin{aligned}
S\left(\frac{y'd^2x'-x'd^2y'}{dt^2}\right)Dm &= +C\,\frac{d^2\nu}{dt^2}-H\,\frac{d^2\lambda}{dt^2}-G\,\frac{d^2\mu}{dt^2}\,,\\
S\left(\frac{x'd^2z'-z'd^2x'}{dt^2}\right)Dm &= +B\,\frac{d^2\mu}{dt^2}-G\,\frac{d^2\nu}{dt^2}-K\,\frac{d^2\lambda}{dt^2}\,,\\
S\left(\frac{y'd^2z'-z'd^2y'}{dt^2}\right)Dm &= -A\,\frac{d^2\lambda}{dt^2}+K\,\frac{d^2\mu}{dt^2}+H\,\frac{d^2\nu}{dt^2}\,;
\end{aligned}\right\}\quad(12)$$

valeurs qu'il convient de mettre à la place des premiers membres des équations (9), et c'est ce que nous ferons dès que nous aurons mis en évidence les quantités λ, μ, ν, Z qui doivent entrer dans leurs seconds membres.

L'équation (4), relative à l'équilibre du fluide, ne peut avoir lieu qu'autant que la densité Δ est fonction de z seulement; mais nous avons fait

$$z=Z+z'=c+\mu a-\lambda b+Z\;;$$

par suite Δ doit être supposé fonction de cette quantité $c+\mu a-\lambda b+Z$, et d'autres quantités constantes, mais indépendantes de a, b, c. Supposant donc que l'origine des coordonnées primitives x, y, z ait été prise de telle sorte que, dans l'état d'équilibre, l'on eût $Z=0$, ce qui est toujours possible, nous pourrons regarder Z comme étant de même ordre que λ, μ, ν, et par conséquent négliger son carré et les autres termes de même ordre, ce qui nous permettra de faire

$$\Delta=\Delta_0+\frac{d\Delta_0}{dc}\,(\mu a-\lambda b+Z)\,,$$

en désignant par Δ_0 la valeur de Δ qui aurait lieu dans le cas d'équilibre. Nous trouverons ainsi, en négligeant toujours les quantités de l'ordre des carrés et produits de λ, μ, ν, Z,

$$\Delta x'=a\Delta_0+\nu b\Delta_0-\mu\left(c\Delta_0-a^2\,\frac{d\Delta_0}{dc}\right)-\lambda ab\,\frac{d\Delta_0}{dc}+a\,\frac{d\Delta_0}{dc}+Z\,,$$

$$\Delta y' = b\Delta_0 - \nu a\Delta_0 + \lambda\left(c\Delta_0 - b^2 \frac{\mathrm{d}\Delta_0}{\mathrm{d}c}\right) - \mu ab \frac{\mathrm{d}\Delta_0}{\mathrm{d}c} + b \frac{\mathrm{d}\Delta_0}{\mathrm{d}c} Z .$$

Au moyen de ces valeurs, nous trouverons, en employant la transformation indiquée par l'équation (11),

$$\int\!\!\int\!\!\int \Delta \mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}z' = \int\!\!\int\!\!\int \Delta \mathrm{d}a\mathrm{d}b\mathrm{d}c = \int\!\!\int\!\!\int \Delta_0 \mathrm{d}a\mathrm{d}b\mathrm{d}c + Z\int\!\!\int\!\!\int \frac{\mathrm{d}\Delta_0}{\mathrm{d}c}\, \mathrm{d}a\mathrm{d}b\mathrm{d}c$$

$$+\mu\int\!\!\int\!\!\int a \frac{\mathrm{d}\Delta_0}{\mathrm{d}c}\, \mathrm{d}a\mathrm{d}b\mathrm{d}c - \lambda\int\!\!\int\!\!\int b \frac{\mathrm{d}\Delta_0}{\mathrm{d}c}\, \mathrm{d}a\mathrm{d}b\mathrm{d}c \ ;$$

$$\int\!\!\int\!\!\int \Delta x'\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}z' = \int\!\!\int\!\!\int \Delta x'\mathrm{d}a\mathrm{d}b\mathrm{d}c = \int\!\!\int\!\!\int a\Delta_0 \mathrm{d}a\mathrm{d}b\mathrm{d}c + Z\int\!\!\int\!\!\int a \frac{\mathrm{d}\Delta_0}{\mathrm{d}c}\, \mathrm{d}a\mathrm{d}b\mathrm{d}c$$

$$+\nu\int\!\!\int\!\!\int b\Delta_0 \mathrm{d}a\mathrm{d}b\mathrm{d}c - \mu\int\!\!\int\!\!\int\left(c\Delta_0 - a^2 \frac{\mathrm{d}\Delta_0}{\mathrm{d}c}\right)\mathrm{d}a\mathrm{d}b\mathrm{d}c - \lambda\int\!\!\int\!\!\int ab \frac{\mathrm{d}\Delta_0}{\mathrm{d}c}\, \mathrm{d}a\mathrm{d}b\mathrm{d}c \ ;$$

$$\int\!\!\int\!\!\int \Delta y'\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}z' = \int\!\!\int\!\!\int \Delta y'\mathrm{d}a\mathrm{d}b\mathrm{d}c = \int\!\!\int\!\!\int b\Delta_0 \mathrm{d}a\mathrm{d}b\mathrm{d}c + Z\int\!\!\int\!\!\int b \frac{\mathrm{d}\Delta_0}{\mathrm{d}c}\, \mathrm{d}a\mathrm{d}b\mathrm{d}c$$

$$-\nu\int\!\!\int\!\!\int a\Delta_0 \mathrm{d}a\mathrm{d}b\mathrm{d}c + \lambda\int\!\!\int\!\!\int\left(c\Delta_0 - b^2 \frac{\mathrm{d}\Delta_0}{\mathrm{d}c}\right)\mathrm{d}a\mathrm{d}b\mathrm{d}c + \mu\int\!\!\int\!\!\int ab \frac{\mathrm{d}\Delta_0}{\mathrm{d}c}\mathrm{d}a\mathrm{d}b\mathrm{d}c \ .$$

Maintenant on doit observer que a, b, c, Δ_0 sont les valeurs de x', y', z', Δ qui auraient lieu dans le cas d'équilibre, et que, conséquemment, on doit avoir identiquement (10)

$$\int\!\!\int\!\!\int \Delta_0 \mathrm{d}a\mathrm{d}b\mathrm{d}c = m \ ,$$

$$\int\!\!\int\!\!\int a\Delta_0 \mathrm{d}a\mathrm{d}b\mathrm{d}c = 0 \ ;$$

$$\int\int\int b\Delta_{\circ}\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}c=0\ ;$$

ayant donc égard à ces conditions et posant, pour abréger,

$$\int\int\int \frac{\mathrm{d}\Delta_{\circ}}{\mathrm{d}c}\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}c=\int\int(\Delta''-\Delta')\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b=L\ ,$$

$$\int\int\int a\,\frac{\mathrm{d}\Delta_{\circ}}{\mathrm{d}c}\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}c=\int\int(\Delta''-\Delta')a\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b=M\ ,$$

$$\int\int\int b\,\frac{\mathrm{d}\Delta_{\circ}}{\mathrm{d}c}\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}c=\int\int\int(\Delta''-\Delta')b\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b=N\ ,$$

$$\int\int\int a^2\,\frac{\mathrm{d}\Delta_{\circ}}{\mathrm{d}c}\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}c=\int\int(\Delta''-\Delta')a^2\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b=P\ ,$$

$$\int\int\int b^2\,\frac{\mathrm{d}\Delta_{\circ}}{\mathrm{d}c}\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}c=\int\int\int(\Delta''-\Delta')b^2\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b=Q\ ,$$

$$\int\int\int ab\,\frac{\mathrm{d}\Delta_{\circ}}{\mathrm{d}c}\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}c=\int\int(\Delta''-\Delta')ab\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b=R\ ,$$

$$\int\int\int c\Delta_{\circ}\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}c=MV\ ;$$

nous trouverons

$$\int\int\int\Delta\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y'\,\mathrm{d}z'=m+LZ+\mu M-\lambda N\ ,$$

$$\int\int\int\Delta x'\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y'\,\mathrm{d}z'=MZ-\mu(mV-P)-\lambda R\ ,$$

$$\int\int\int\Delta y'\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y'\,\mathrm{d}z'=NZ+\lambda(mV-Q)+\mu R\ ;$$

équations dans lesquelles L, M, N, P, Q, R, V expriment des constantes qui dépendent de la nature du fluide, de celle du corps flottant et de la figure de ce corps.

En comparant ces résultats et ceux que donnent les équations (12) avec les équations (7) et (9), nous trouverons enfin

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{d^2X}{dt^2}=0\ , \qquad \frac{d^2Y}{dt^2}=0\ , \\
m\frac{d^2Z}{dt^2}+gLZ+gM\mu-gN\lambda=0\ , \\
C\frac{d^2\nu}{dt^2}-G\frac{d^2\mu}{dt^2}-H\frac{d^2\lambda}{dt^2}=0\ , \\
B\frac{d^2\mu}{dt^2}-K\frac{d^2\lambda}{dt^2}-G\frac{d^2\nu}{dt^2}+gMZ-g(mV-P)\mu-gR\lambda=0\ , \\
A\frac{d^2\lambda}{dt^2}-H\frac{d^2\nu}{dt^2}-K\frac{d^2\mu}{dt^2}-gNZ+g(mV-Q)\lambda-gR\mu=0\ ;
\end{array}\right\}(13)$$

et telles sont les équations finales qu'il nous reste à intégrer pour avoir résolu le problème que nous nous étions proposé.

Les deux premières donnent, par une première intégration, $\frac{dX}{dt}$ et $\frac{dY}{dt}$ constantes, et conséquemment nulles lorsque le corps flottant est parti du repos, ou même, lorsqu'ayant reçu une impulsion primitive, les composantes transversales sont nulles. Dans ce cas, les valeurs de X et Y sont constantes et par conséquent *si, à l'origine des petites oscillations, le centre de gravité du corps flottant se meut sur une verticale, il ne sortira pas de cette droite pendant toute leur durée.*

Pour intégrer les quatre équations restantes, nous les réduirons d'abord à trois, en éliminant ν entre elles; les équations à intégrer seront ainsi

$$\left.\begin{aligned}
&m\,\frac{d^2Z}{dt^2}+g(LZ+M\mu-N\lambda)=0\,,\\
&(BC-G^2)\frac{d^2\mu}{dt^2}-(CK+GH)\frac{d^2\lambda}{dt^2}+Cg\{MZ-(mV-P)\mu-R\lambda\}=0\,,\\
&(CK+GH)\frac{d^2\mu}{dt^2}-(AC-H^2)\frac{d^2\lambda}{dt^2}+Cg\{NZ-(mV-Q)\lambda+R\mu\}=0\;;
\end{aligned}\right\}\quad(14)$$

auxquelles nous appliquerons le procédé indiqué dans la section VI de la *Mécanique analytique*. Nous poserons donc

$$\lambda=pZ\;,\qquad \mu=qZ\;,$$

et chacune de ces équations prendra la forme

$$\frac{d^2Z}{dt^2}+rZ=0\;;\qquad(15)$$

p, q, r désignant des constantes qui doivent satisfaire aux équations de condition que l'on trouvera en mettant ces valeurs dans les équations (14) ; équations de condition qui seront

$$g(L+Mq-Np)-mr=0\;,$$

$$Cg\{M-(mV-P)q-Rp\}=r\{(BC-G^2)q-(CK+GH)p\}\;,$$

$$Cg\{N-(mV-Q)p+Rq\}=r\{(CK+GH)q-(AC-H^2)p\}\;,$$

et qui serviront à déterminer ces constantes. En effet, les deux dernières, résolues par rapport à p et q, donnent

$$\left.\begin{aligned}
p&=-gC.\frac{M[(CK+GH)r-gCR]-N[(BC-G^2)r-gC(mV-P)]}{[(CK+GH)r-gCR]^2-[(AC-H^2)r-gC(mV-Q)][(BC-G^2)r-gC(mV-P)]}\,,\\
q&=+gC.\frac{N[(CK+GH)r-gCR]-M[AC-H^2)r-gC(mV-Q)]}{[(CK+GH)r-gCR]^2-[(AC-H^2)r-gC(mV-Q)][(BC-G^2)r-gC(mV-P)]}\,.
\end{aligned}\right\}\quad(16)$$

Mettant ces valeurs dans la première, nous trouverons, en chassant le dénominateur,

$$\left.\begin{array}{l}(mr-gL)\{[(CK+GH)r-gCR]^2-[(AC-H^2)r-gC(mV-Q)][(BC-G^2)r-gC(mV-P)]\} \\ +gC\{M^2[(AC-H^2)r-gC(mV-Q)]-2MN[(CK+GH)r-gCR)+N^2[(BC-G^2)r-gC(mV-P)]\}=0\ ;\end{array}\right\} \quad (17)$$

équation du troisième degré qui fera connaître toutes les valeurs de r, d'où on conclura ensuite celles de p et q au moyen des formules (16); de sorte qu'en général il y aura trois systèmes de valeurs pour les constantes p, q, r, correspondant aux trois racines de l'équation (17).

Maintenant en intégrant l'équation (15) on trouve

$$Z = T\operatorname{Cos}.t\sqrt{r} + U\operatorname{Sin}.t\sqrt{r}\ ,$$

T et U étant deux constantes; il en résulte

$$\lambda = p(T\operatorname{Cos}.t\sqrt{r} + U\operatorname{Sin}.t\sqrt{r})\ ,$$

$$\mu = q(T\operatorname{Cos}.t\sqrt{r} + U\operatorname{Sin}.t\sqrt{r}\ ;$$

cette solution n'est que particulière, mais en même temps elle est triple, puisqu'il y a trois systèmes de valeurs de p, q, r; donc, d'après la théorie de l'intégration des équations linéaires à coefficiens constans, on aura l'intégrale complète en prenant la somme des trois intégrales particulières qui répondent à ces systèmes; de sorte qu'en désignant par r', r'', r''' les trois racines de l'équation (17), et par p', p'', p''', q', q'', q''' les valeurs de p et q qui leur correspondent respectivement, on aura

$$Z = \left\{\begin{array}{l} T'\operatorname{Cos}.t\sqrt{r'} + U'\operatorname{Sin}.t\sqrt{r'} \\ + T''\operatorname{Cos}.t\sqrt{r''} + U''\operatorname{Sin}.t\sqrt{r''} \\ + T'''\operatorname{Cos}.t\sqrt{r'''} + U'''\operatorname{Sin}.t\sqrt{r'''} \end{array}\right\} \quad (18)$$

et ensuite

$$\lambda=\left\{\begin{array}{l} p'(T'\mathrm{Cos}\,t\sqrt{r'}+U'\mathrm{Sin}.t\sqrt{r'}) \\ +p''(T''\mathrm{Cos}.t\sqrt{r''}+U''\mathrm{Sin}.t\sqrt{r''}) \\ +p'''(T'''\mathrm{Cos}.t\sqrt{r'''}+U'''\mathrm{Sin}.t\sqrt{r'''}) \end{array}\right\},\quad \mu=\left\{\begin{array}{l} q'(T'\mathrm{Cos}.t\sqrt{r'}+U'\mathrm{Sin}.t\sqrt{r'}) \\ +q''(T''\mathrm{Cos}.t\sqrt{r''}+U''\mathrm{Sin}.t\sqrt{r''}) \\ +q'''(T'''\mathrm{Cos}.t\sqrt{r'''}+U'''\mathrm{Sin}.t\sqrt{r'''}) \end{array}\right\}. \quad (19)$$

en désignant par T', T'', T''', U', U'', U''' six constantes tout à fait arbitraires, dont les valeurs ne dépendent que de l'état initial du corps flottant.

Maintenant l'équation

$$C\frac{d^2\nu}{dt^2}-G\frac{d^2\mu}{dt^2}-H\frac{d^2\lambda}{dt^2}=0\,;$$

qui fait partie des équations (13) donne, en intégrant,

$$C\nu-G\mu-H\lambda=O+O'i\,, \qquad (20)$$

dans laquelle O et O' sont deux nouvelles constantes qu'il faudra déterminer d'après l'état initial du fluide.

Cette équation servant à déterminer ν, en fonction de λ et μ déjà donnés par les équations (19), la solution générale du problème que nous nous étions proposé se trouve ainsi tout à fait complète, du moins dans le cas où l'équation (17) a ses trois racines inégales. Dans le cas contraire, les expressions (18) et (19) ne sont plus complètes, la précédente solution est alors en défaut, et il en serait de même si une des racines de l'équation (17) était nulle ; mais il est heureusement facile d'obtenir, dans ces cas mêmes, la solution générale du problème.

Supposons, en effet, que l'on ait $\sqrt{r''}=\sqrt{r'}+i$, i étant une quantité très-petite, nous aurons

$$\mathrm{Cos}.t\sqrt{r''}=\mathrm{Cos}.t\sqrt{r'}-\frac{it}{1}\mathrm{Sin}.t\sqrt{r'}+\frac{i^2t^2}{1.2}\mathrm{Cos}.t\sqrt{r'}-\ldots\ldots$$

$$\text{Sin}\, t\sqrt{r''} = \text{Sin.}t\sqrt{r'} + \frac{it}{1}\,\text{Cos.}t\sqrt{r'} - \frac{i^2t^2}{1.2}\,\text{Sin.}t\sqrt{r'} + \ldots\ldots$$

et par suite

$$T''\text{Cos.}t\sqrt{r''} + U''\text{Sin.}t\sqrt{r''}$$

$$= T''\text{Cos.}t\sqrt{r'} + U''\text{Sin.}t\sqrt{r'} + t(iT''\text{Cos.}t\sqrt{r'} - iU)$$

$$T''\text{Cos.}t\sqrt{r'} + U''\text{Sin.}t\sqrt{a''} = \left\{\begin{array}{l} T''\text{Cos.}t\sqrt{r'} + U''\text{Sin.}t\sqrt{r'} \\ + \frac{it}{1}(U''\text{Cos.}t\sqrt{r'} - T''\text{Sin}\, t\sqrt{r'}) \\ + \frac{i^2t^2}{1.2}(T''\text{Cos.}t\sqrt{r'} - U''\text{Sin.}t\sqrt{r'}) \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\};$$

de sorte que si l'on fait, pour abréger,

$$U'' = \frac{U_1}{i}\ , \quad T'' = \frac{T_1}{i}\ , \quad U' + U'' = U_2\ , \quad T' + T'' = T_2\ ,$$

les équations (18) et (19) deviendront

$$Z = T_2\text{Cos.}t\sqrt{r'} + U_2\text{Sin.}t\sqrt{r'} + tU_1\text{Cos.}t\sqrt{r'} + tT_1\text{Sin.}t\sqrt{r'}$$

$$+ T'''\text{Cos.}t\sqrt{r'''} + U'''\text{Sin.}\sqrt{r'''} + \frac{it^2}{1.2}\Lambda\ ,$$

$$\lambda = p'(T_2 + tU_1)\text{Cos.}t\sqrt{r'} + p'(U_2 + tT_1)\text{Sin.}t\sqrt{r'}$$

$$+ p'''T'''\text{Cos.}t\sqrt{r'''} + p'''U'''\text{Sin.}t\sqrt{r'''} + p'.\frac{it^2}{1.2}\Gamma\ ,$$

$$\mu = q'(T_2+tU_1)\mathrm{Cos}.t\sqrt{r'}+q'(U_2+tT_1)\mathrm{Sin}.t\sqrt{r'}$$

$$+q'''T'''\mathrm{Cos}.t\sqrt{r'''}+q'''U'''\mathrm{Sin}.t\sqrt{r'''}+q'.\frac{it^2}{1.2}\Pi\ ;$$

Λ, Γ, Π désignant, par abréviation, tout ce que nous n'avons pas écrit. Or, lorsqu'on aura $r'=r''$ ou $i=0$, ces équations se réduiront simplement à

$$\left.\begin{array}{l} Z=(T_2+tU_1)\mathrm{Cos}.t\sqrt{r'}+(U_2+tT_1)\mathrm{Sin}.t\sqrt{r'}+T'''\mathrm{Cos}.t\sqrt{r'''}+U'''\mathrm{Sin}.t\sqrt{r'''}\ , \\ \lambda=p'(T_2+tU_1)\mathrm{Cos}.t\sqrt{r'}+p'(U_2+tT_1)\mathrm{Sin}.t\sqrt{r'}+p'''(T'''\mathrm{Cos}.t\sqrt{r'''}+U'''\mathrm{Sin}.t\sqrt{r'''})\ , \\ \mu=q'(T_2+tU_1)\mathrm{Cos}.t\sqrt{r'}+q'(U_2+tT_1)\mathrm{Sin}.t\sqrt{r'}+q'''(T'''\mathrm{Cos}.t\sqrt{r'''}+U'''\mathrm{Sin}.t\sqrt{r'''})\ . \end{array}\right\}(21)$$

Il faudrait agir à peu près de même si les trois racines étaient égales entre elles ou encore si l'une d'elles était nulle. Soit, par exemple, dans ce dernier cas, r'' la racine nulle; alors le terme $T''\mathrm{Cos}.t\sqrt{r''}$ se réduira à T'', et le terme $U''\mathrm{Sin}.t\sqrt{r''}$ que l'on peut mettre sous la forme $U''\sqrt{r''}.\frac{\mathrm{Sin}.t\sqrt{r''}}{\sqrt{r''}}$, ou encore sous celle-ci $U_1.\frac{\mathrm{Sin}.t\sqrt{r''}}{\sqrt{r''}}$, devra être remplacé par la limite de cette expression qui est égale à tU_1.

Telles sont les modifications que doivent subir les formules (18) et (19) dans les cas particuliers, pour qu'elles puissent donner la solution complète du problème.

Nous pouvons maintenant connaître quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour assurer la stabilité de l'équilibre du corps flottant.

1.° Si les trois racines de l'équation (17) sont réelles, inégales, positives et différentes de zéro, les expressions (18) et (19) seront entièrement périodiques, et alors le corps flottant se trouvera dans une situation d'équilibre stable.

2.° Si l'une des trois racines de cette équation est nulle, les deux autres étant réelles, positives et inégales, les formules (18) et (19), outre les termes périodiques, contiendront un terme de la forme tU_1; mais ce terme sera identiquement nul lorsque le corps flottant n'aura point reçu d'impulsion primitive; c'est le cas d'équilibre indifférent.

3.° Si l'équation (17) n'avait point de racines positives, chacun des termes des formules (18) et (19) contiendrait des exponentiels, et l'équilibre serait complètement instable.

Dans tous les autres cas, les formules (18), (19) ou (21) contiendront des termes périodiques et des termes croissant indéfiniment avec le temps. On conçoit que ces derniers peuvent alors être rendus nuls par une impulsion primitive, et c'est dans ce cas qu'on dit du corps flottant que son équilibre est de nature mixte.

Dans un autre article nous ferons quelques applications de la théorie que nous venons d'exposer, et nous considérerons en outre, sous un autre aspect, les conditions de stabilité des corps flottans.

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Sur les quatre cercles qui touchent les trois côtés d'un même triangle, et sur les huit sphères qui touchent les quatre faces d'un même tétraèdre;

Par M. L. P. F. R.

Nous nous proposons, dans ce qui va suivre, d'ajouter quelques résultats nouveaux à ceux qui ont été donnés par MM. Steiner et Bobillier, à la pag. 85 du présent volume, en conservant leurs notations pour la commodité du lecteur.

En désignant par a', b', c' les perpendiculaires abaissées sur les directions des côtés a, b, c du triangle T, des sommets respectivement opposés, on a cette triple équation

$$aa'=bb'=cc'=2T\,,$$

de laquelle tirant les valeurs de a, b, c pour les substituer dans les formules (1), il viendra, en divisant par $2T$,

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{r}&=\frac{1}{a'}+\frac{1}{b'}+\frac{1}{c'}\,,\\
\frac{1}{\alpha}&=\frac{1}{b'}+\frac{1}{c'}-\frac{1}{a'}\,,\\
\frac{1}{\beta}&=\frac{1}{c'}+\frac{1}{a'}-\frac{1}{b'}\,,\\
\frac{1}{\gamma}&=\frac{1}{a'}+\frac{1}{b'}-\frac{1}{c'}\,;
\end{aligned}\right\}\quad(14)$$

c'est-à-dire, *l'inverse du rayon du cercle inscrit à un triangle est égal à la somme des inverses des trois hauteurs de ce triangle;*

L'inverse du rayon de l'un quelconque des trois cercles ex-inscrit, est égal à la somme des inverses des hauteurs qui répondent aux deux autres, moins l'inverse de la hauteur qui répond à celui-là.

En rapprochant la première des équations (14) de l'équation (2), on peut dire encore que *la somme des inverses des rayons des trois cercles ex-inscrits, est égale à la somme des inverses des trois hauteurs du triangle.*

Les équations (5) donnent

$$bc=\frac{\alpha(\beta-r)(\gamma-r)}{r}\,,$$

$$ca=\frac{\beta(\gamma-r)(\alpha-r)}{r}\,,$$

$$ab=\frac{\gamma(\alpha-r)(\beta-r)}{r}\,;$$

d'où, en ajoutant,

$$bc+ca+ab=\frac{3\alpha\beta\gamma-2(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)r+(\alpha+\beta+\gamma)r^2}{r}\,;$$

mais l'équation (2) donne

$$\alpha\beta\gamma=r(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta) \; ; \qquad (15)$$

en substituant donc, on aura

$$bc+ca+ab=\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta+\alpha r+\beta r+\gamma r \; , \qquad (16)$$

c'est-à-dire, *la somme des produits, deux à deux, des rayons des quatre cercles qui touchent à la fois les trois côtés d'un triangle, est égale à la somme des produits, deux à deux, de ces trois côtés.*

Les mêmes équations (5) donnent

$$a+b+c=\frac{3\alpha\beta\gamma-(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)r}{\alpha\beta\gamma r}T \; ;$$

ou, en vertu des équations (3) et (15)

$$a+b+c=\frac{r(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)+\alpha\beta\gamma}{T} \; ;$$

et par conséquent

$$\alpha\beta\gamma+\beta\gamma r+\gamma\alpha r+\alpha\beta r=T(a+b+c) \; ; \qquad (17)$$

c'est-à-dire, *la somme des produits, trois à trois, des rayons des quatre cercles qui touchent les trois côtés d'un triangle, est égale à l'aire du triangle, multipliée par son périmètre.*

L'équation (8) donne, en développant,

$$R=\frac{\alpha\beta\gamma-(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)r+(\alpha+\beta+\gamma)r^2-r^3}{4r^2} \; ;$$

ou, en réduisant, au moyen de l'équation (15),

$$R=\tfrac{1}{4}(\alpha+\beta+\gamma-r) \; ; \qquad (18)$$

c'est l'élégant théorème de M. Bobillier.

Si l'on pose $a+b+c=2s$, en quarrant les équations (1) et ayant égard à l'équation (3), on aura

$$s^2=\frac{\alpha\beta\gamma}{r}\,,\quad (s-a)^2=\frac{\beta\gamma r}{\alpha}\,,\quad (s-b)^2=\frac{\gamma\alpha r}{\beta}\,,\quad (s-c)^2=\frac{\alpha\beta r}{\gamma}\,,\qquad (19)$$

ou, en vertu de l'équation (15),

$$\left.\begin{aligned} s^2&=\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta\,,\\ (s-a)^2&=\beta\gamma-r(\beta+\gamma)\,,\\ (s-b)^2&=\gamma\alpha-r(\gamma+\alpha)\,,\\ (s-c)^2&=\alpha\beta-r(\alpha+\beta)\,. \end{aligned}\right\}\quad (20)$$

au moyen de quoi les équations (4) deviennent

$$T=\frac{\alpha\beta\gamma}{s}=r\,\frac{\beta\gamma}{s-a}=r\,\frac{\gamma\alpha}{s-b}=r\,\frac{\alpha\beta}{s-c}\,.\qquad (21)$$

Si, au moyen de la première des équations (19), on élimine r des trois autres, elles deviendront

$$s-a=\frac{\beta\gamma}{s}\,,\qquad s-b=\frac{\gamma\alpha}{s}\,,\qquad s-c=\frac{\alpha\beta}{s}\,,$$

d'où on tirera

$$a=\frac{s^2-\beta\gamma}{s}\,,\qquad b=\frac{s^2-\gamma\alpha}{s}\,,\qquad c=\frac{s^2-\alpha\beta}{s}\,;$$

ou, en y mettant pour s sa valeur donnée par la première des équations (20),

$$a=\frac{\alpha(\beta+\gamma)}{\sqrt{\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta}}\,,\quad b=\frac{\beta(\gamma+\alpha)}{\sqrt{\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta}}\,,\quad c=\frac{\gamma(\alpha+\beta)}{\sqrt{\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta}}\,;\quad (22)$$

formules qui feront connaître les trois côtés d'un triangle lorsque l'on connaîtra les rayons des trois cercles qui lui sont ex-inscrits; on en tire

$$\frac{\alpha(\beta+\gamma)}{a}=\frac{\beta(\gamma+\alpha)}{b}=\frac{\gamma(\alpha+\beta)}{c} . \qquad (23)$$

Si le triangle est rectangle et que c en soit l'hypothénuse, on aura $a^2+b^2=c^2$, c'est-à-dire (22),

$$\alpha^2(\beta+\gamma)^2+\beta^2(\gamma+\alpha)^2=\gamma^2(\alpha+\beta)^2$$

ou bien, en développant et réduisant

$$\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=\gamma^2 , \qquad (24)$$

équation qui, comparée à (15), donne, comme l'a trouvé M. Steiner,

$$\alpha\beta=\gamma r ; \qquad (25)$$

mettant cette valeur pour $\alpha\beta$ dans (24) et divisant par γ, on aura encore

$$r+\alpha+\beta=\gamma . \qquad (26)$$

A l'aide de ces deux dernières équations on peut faire disparaître des divers résultats obtenus deux des quatre rayons; on trouve ainsi, pour le triangle rectangle,

$$\left.\begin{array}{l} s=\gamma , \\ a=\alpha+r=\gamma-\beta , \\ b=\beta+r=\gamma-\alpha , \\ c=\alpha+\beta=\gamma-r , \\ T=\alpha\beta=\gamma r , \\ R=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}(\gamma-r) . \end{array}\right\} \qquad (27)$$

Soient D_r, D_α, D_β, D_γ les distances du centre du cercle circonscrit aux centres des cercles inscrits et ex-inscrits, on aura, comme l'on sait (*Annales*, tom. XIV, pag. 56),

$$\left.\begin{array}{l} D^2_r=R^2-2Rr\ , \\ D^2_\alpha=R^2+2R\alpha\ , \\ D^2_\beta=R^2+2R\beta\ , \\ D^2_\gamma=R^2+2R\gamma\ . \end{array}\right\} \quad (28)$$

En prenant la somme de ces quatre équations, et ayant égard à l'équation (18), il viendra

$$D^2_r+D^2_\alpha+D^2_\beta+D^2_\gamma=12R^2\ ; \qquad (29)$$

c'est-à-dire, *la somme des carrés des distances du centre du cercle circonscrit à un triangle aux centres des cercles inscrit et ex-inscrit à ce triangle, est égale à douze fois le carré du rayon de ce cercle circonscrit.*

Des mêmes équations (28) on tire encore

$$D^2_\gamma+D^2_r=2R+2R(\gamma-r)\ , \qquad D^2_\alpha+D^2_\beta=2R^2+2R(\alpha+\beta)\ ;$$

mais, si le triangle est rectangle, l'équation (26) donne

$$\gamma-r=\alpha+\beta\ ;$$

donc alors

$$D^2_r+D^2_\gamma=D^2_\alpha+D^2_\beta\ ; \qquad (30)$$

c'est-à-dire, *la somme des carrés des distances du centre du cercle circonscrit à un triangle rectangle aux centres des cercles ex-inscrits qui répondent aux deux côtés de l'angle droit, est égale à la somme des carrés des distances de ce même centre, au centre* *du cerle ex-inscrit qui répond à l'hypothénuse et au centre du cercle inscrit.*

Tous ces divers résultats doivent avoir leurs analogues relatifs aux huits sphères qui touchent à la fois les quatre faces d'un tétraèdre ; bornons-nous au cas le plus simple.

Soient a', b', c', d' les perpendiculaires abaissées sur les plans des faces a, b, c, d du tétraèdre T des sommets respectivement opposés ; on aura cette quadruple équation

$$aa'=bb'=cc'=dd'=3T\ ,$$

de laquelle, tirant les valeurs de a, b, c, d pour les substituer dans les huit équations de la pag. 93, il viendra, en divisant par $3T$,

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{a'}+\frac{1}{b'}+\frac{1}{c'}+\frac{1}{d'}\ , \qquad (31)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\alpha}&=\frac{1}{b'}+\frac{1}{c'}+\frac{1}{d'}-\frac{1}{a'}\ ,\\ \frac{1}{\beta}&=\frac{1}{c'}+\frac{1}{d'}+\frac{1}{a'}-\frac{1}{b'}\ ,\\ \frac{1}{\gamma}&=\frac{1}{d'}+\frac{1}{a'}+\frac{1}{b'}-\frac{1}{c'}\ ,\\ \frac{1}{\delta}&=\frac{1}{a'}+\frac{1}{b'}+\frac{1}{c'}-\frac{1}{d'}\ ;\end{aligned}\right\} \qquad (32)$$

$$\left.\begin{aligned}\pm\frac{1}{\alpha'}&=\frac{1}{b'}+\frac{1}{c'}-\frac{1}{a'}-\frac{1}{d'}\ ,\\ \pm\frac{1}{\beta'}&=\frac{1}{c'}+\frac{1}{a'}-\frac{1}{b'}-\frac{1}{d'}\ ,\\ \pm\frac{1}{\gamma'}&=\frac{1}{a'}+\frac{1}{b'}-\frac{1}{c'}-\frac{1}{d'}\ ;\end{aligned}\right\} \qquad (33)$$

c'est-à-dire, 1.° *l'inverse du rayon de la sphère inscrite à un tétraèdre, est égale à la somme des inverses de ses quatre hauteurs ;*

2.° *L'inverse du rayon de la sphère ex-inscrite sur une des faces d'un tétraèdre, est égale à la somme des inverses des hauteurs qui répondent aux trois autres faces, moins l'inverse de la hauteur qui répond à celle-là ;*

3.° *Enfin, l'inverse du rayon de la sphère ex-inscrite sur l'une ou l'autre de deux arêtes opposées d'un tétraèdre, est égale à la différence entre la somme des inverses des hauteurs qui répondent aux deux faces qui se coupent suivant l'une de ces deux arêtes et la somme des inverses des hauteurs qui répondent aux deux faces qui se coupent suivant son opposée.*

GÉOMÉTRIE DE SITUATION.

Sur le degré de la polaire réciproque d'une courbe proposée.

Par M. GERGONNE.

J'AI remarqué, à la pag. 108 du présent volume, que M. Poncelet avait fort bien prouvé que la polaire réciproque d'une courbe du $m.^{ieme}$ degré ne pouvait être d'un degré supérieur au $[m(m-1)]^{ieme}$, mais non qu'elle pouvait s'élever jusqu'à ce degré ; et que, loin de nous avoir donné des exemples de courbes du troisième degré, dont les polaires réciproques s'élevassent jusqu'au sixième degré, il nous avait précisément donné des exemples du contraire.

Pour suppléer, à cet égard, au silence de M. Poncelet, sans m'engager dans des calculs trop prolixes, j'ai choisi la courbe du troisième degré donnée par l'équation fort simple.

$$\left(\frac{x}{a}\right)^3+\left(\frac{y}{b}\right)^3=1 \;;$$

et, en prenant pour directrice la circonférence donnée par l'équation

$$x^2+y^2=r^2 \;,$$

j'ai trouvé pour l'équation de sa polaire réciproque

$$(a^3x^3-b^3y^3)^2=r^6(a^3x^3+b^3y^3) \;,$$

équation qui est bien en effet du sixième degré; ce qui donne quelque probabilité au théorème général de M. Poncelet, sans toutefois en constituer une démonstration.

J'avais dit aussi, en l'endroit cité, que M. Poncelet aurait pu, tout au moins, nous montrer une courbe de laquelle on vit à la fois clairement, 1.° qu'une même droite ne saurait la couper en plus de trois points; 2.° que néanmoins on peut lui mener six tangentes de certains points de son plan. M. le docteur Plucker m'indique deux exemples de ces sortes de courbes; le premier est celui de la courbe donnée par l'équation

$$xy^2=(x-a)(x-b)(x-c)$$

(Newton *Opusc.*, tom. I, pag. 185, plan. IV, fig. 22); le second est la courbe de la figure 44, dans l'*Introduction au calcul différentiel* d'EULER (tom. II, chap. X, n.° 241).

On pourrait objecter au théorème de M. Poncelet que, si la polaire réciproque d'une courbe du m.ième degré est, en général, une courbe du $[m(m-1)]$ième degré, la polaire réciproque de celle-ci, prise par rapport à la même directrice, devrait être, par la même raison, du $\{[m(m-1)][m(m-1)-1]\}^{ieme}$ degré, tandis qu'au contraire cette polaire réciproque, n'étant autre chose que la proposée elle-même, ne doit être que du $m.^{ieme}$ degré seulement; mais on doit remarquer que la polaire réciproque d'une courbe proposée n'est par la courbe la plus générale de son degré, et qu'elle est de la classe de celles dont les polaires réciproques n'atteignent pas le maximum du degré auquel pourraient s'élever, en général, les polaires réciproques des courbes d'un degré pareil au sien.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

Note sur un article de la Revue encyclopédique;

Par M. GERGONNE.

DANS le numéro de juillet 1828 de la *Revue encyclopédique*, pag. 233, M. Ferry, l'un des rédacteurs de cet intéressant recueil, a bien voulu ramener l'attention de ses lecteurs sur les *Annales de Mathématiques*, en rendant compte du numéro de mai 1828 de cette collection. Mais la manière dont s'explique M. Ferry sur un mémoire de M. Bobillier, contenu dans cette livraison, mémoire qu'il signale d'ailleurs comme fort remarquable, nous semble prouver que les idées mêmes les plus saines et les plus lumineuses ont besoin d'être souvent reproduites avant d'obtenir l'accueil auquel elles ont droit.

D'après les conventions admises dans la géométrie analytique, une équation de la forme

$$\varphi(x,y)=0$$

exprime tous les points d'un plan dont les coordonnées peuvent la résoudre ; et on sait que, généralement parlant, ces points sont ceux d'une certaine ligne continue, droite ou courbe. De là il résulte évidemment que le système de deux équations, telles que

$$\varphi(x,y)=0\ , \qquad \psi(x,y)=0\ ,$$

exprime des points isolés les uns des autres, lesquels sont ceux où se coupent les lignes que représentent ces deux équations prises séparément. Ces points sont en effet les seuls dont les coordonnées puissent satisfaire à ces deux équations à la fois.

Présentement, qu'exprimera l'équation

$$\varphi(x,y)\,\varphi'(x,y).\varphi''(x,y)........=0\ ?$$

Évidemment elle exprimera la totalité des points du plan des axes dont les coordonnées réduiront son premier membre à zéro; or, comme ce premier membre est un produit de facteurs, il pourra devenir nul d'autant de manières qu'il a de facteurs; de sorte que les points dont il s'agit seront ceux des courbes données par les équations

$$\varphi(x,y)=0\ , \quad \varphi'(x,y)=0\ , \quad \varphi''(x,y)=0\ , \ \ldots\ldots$$

Si ces principes doivent être admis, et nous ne voyons pas trop par quel côté ils pourraient être vulnérables, il faudra nécessairement admettre que l'équation

$$(ax+by+c)(a'x+b'y+c')=0 \qquad (1)$$

exprime le système de deux droites, tout comme l'équation

$$(ax+by+c)(a'x+b'y+c')(a''x+b''y+c'')=0 \qquad (2)$$

exprime le système de trois droites.

Or, comme un angle est complétement déterminé par ses deux côtés, et un triangle par les trois droites qui le terminent, il s'ensuit que l'on pourra fort bien dire que l'équation (1) exprime un angle et l'équation (2) un triangle, tout comme on dit que l'équation

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

exprime un cercle, bien qu'elle n'en exprime que la circonférence.

Si présentement on pose, pour abréger,

$$ax+by+c=A\ , \quad a'x+b'y+c'=A'\ , \quad a''x+b''y+c''=A''\ ;$$

on pourra dire alors que l'équation $A=0$ exprime une droite, que l'équation $AA'=0$ exprime un angle et qu'enfin l'équation $AA'A''=0$ exprime un triangle.

Or, il ressort manifestement de la contexture du mémoire cité de M. Bobillier que c'est là tout ce qu'il a prétendu dire, et nous ne pouvons comprendre comment M. Ferry a pu se demander si la métaphysique de l'auteur ne pourrait pas *être contestée*, et dire que l'entrée de la nouvelle route que s'est frayée M. Bobillier aurait besoin d'être *plus éclairée*.

Sans doute, la combinaison des équations de trois droites ne donne pas et ne saurait donner tous les points, ni même aucun des points de l'intérieur du triangle qu'elles terminent, pas plus que l'équation d'un cercle ne donne des points de l'intérieur de ce cercle; mais tout prouve, dans l'écrit de M. Bobillier, que ce n'est point non plus de la sorte qu'il l'a entendu. Ce n'est pas, au surplus, que l'analyse se refuse à exprimer des espaces limités, mais c'est alors à des inégalités qu'elle a recours, et c'est ainsi, par exemple, que l'inégalité

$$(x-a)^2+(y-b)^2<r^2$$

exprime tous les points et les seuls points de l'intérieur d'un cercle dont le centre est en (a, b) et dont le rayon est r; et c'est même là le fondement de cette nouvelle branche d'analyse que M. Fourier a désignée sous le nom de *Calcul des inégalités.*

Si M. Ferry est curieux de ces sortes de spéculations, il pourra consulter un article de la pag. 134 de notre XVII.^{me} volume, qui le renverra à plusieurs autres où on prouve que toute ligne, toute surface ou tout volume d'une étendue limitée peut être exprimée par un plus ou moins grand nombre d'équations et d'inégalités, dont l'ensemble exprime non seulement les limites de ces lignes, de ces surfaces et de ces volumes, mais encore tous les points et les seuls points compris entre elles, et cela sans qu'on soit le moins du monde fondé à en prendre texte pour dire que la métaphysique, que nous n'aimons pas plus d'ailleurs que M. Ferry, *porte son obscurité jusque dans les mathématiques, où il semble qu'elle ait entrepris d'éteindre le flambeau de l'évidence, lors même qu'elle n'égare pas.* Mais, encore un coup, ce n'est point du tout de cela qu'il est question dans le mémoire de M. Bobillier.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problèmes de géométrie.

I. A quelle courbe sont tangentes les droites sur lesquelles abaissant des perpendiculaires des sommets d'un polygone, la somme algébrique de ces perpendiculaires est égale à une longueur donnée ?

II. A quelle surface sont tangens les plans sur lesquels abaissant des perpendiculaires des sommets d'un polyèdre, la somme algébrique de ces perpendiculaires est égale à une longueur donnée ?

Autre.

Si, dans l'équation d'une courbe, on change respectivement x et y en $\frac{a^2}{x}$ et $\frac{b^2}{y}$, ou si, dans l'équation d'une surface, on change respectivement x, y, z en $\frac{a^2}{x}$, $\frac{b^2}{y}$, $\frac{c^2}{z}$, on obtiendra l'équation d'une nouvelle courbe ou d'une nouvelle surface, qui pourra être dite la *réciproque* de la première, attendu qu'on pourra repasser de celle-ci à l'autre par la même transformation qui aura servi à passer de l'autre à celle-ci.

Cela posé, on propose d'examiner quelles sont les relations générales les plus remarquables entre deux courbes ou deux surfaces réciproques l'une de l'autre ?

HYDRODYNAMIQUE.

Mémoire sur les petites oscillations de l'eau contenue dans un cylindre ;

Par M. Poisson.

(Lu à l'Académie des sciences, le 27 octobre 1828).

(1) Soient x, y, z, les coordonnées rectangulaires d'un point quelconque du fluide, au bout du temps t, compté de l'origine du mouvement. Les vîtesses du même point, suivant les axes des coordonnées, seront exprimées, comme on sait, par les différences partielles, relatives à x, y, z, d'une fonction de ces trois variables et de t; et, si l'on représente cette fonction par φ, il faudra qu'on ait

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}=0 . \qquad (1)$$

Prenons pour le plan des x, y, celui du niveau du fluide dans l'état d'équilibre, l'axe des z étant vertical et dirigé dans le sens de la pesanteur. Représentons cette force par g. Au bout du temps t, soit z' l'ordonnée d'un point quelconque de la surface du fluide ; nous aurons

$$gz'=\frac{d\varphi}{dt} ; \qquad (2)$$

équation dans laquelle on fera $z=0$. Afin que les mêmes points restent constamment à cette surface, il faudra qu'on ait aussi

$$g\,\frac{d\varphi}{dz}=\frac{d^2\varphi}{dt^2}\,, \qquad (3)$$

pour $z=0$. Si l'on suppose que le fond du vase soit un plan horizontal, et si l'on désigne par h la profondeur de l'eau, on aura encore

$$\frac{d\varphi}{dz}=0\,, \qquad (4)$$

pour $z=h$; ce qui exprime que les mêmes molécules du fluide restent constamment en contact avec le fond du vase.

(2) L'eau étant contenue dans un cylindre vertical, il conviendra de transformer les coordonnées horizontales x et y, en deux autres plus appropriées à la question. Plaçons leur origine sur l'axe de ce cylindre ; soit r la perpendiculaire abaissée du point qui leur correspond sur cet axe, et ψ l'angle compris entre le plan de ces deux droites et celui des x, y ; on aura

$$x=r\,\mathrm{Cos}.\psi\,, \qquad y=r\,\mathrm{Sin}.\psi\,,$$

et l'équation (1) deviendra

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2}+\frac{d^2\varphi}{dr^2}+\frac{1}{r}\,\frac{d\varphi}{dr}+\frac{1}{r^2}\,\frac{d^2\varphi}{d\psi^2}=0\,. \qquad (5)$$

La vîtesse, suivant le prolongement de r, sera exprimée par $\frac{d\varphi}{dr}$; si donc on appelle a le rayon du cylindre, il faudra qu'on ait

$$\frac{d\varphi}{dr}=0\,, \qquad (6)$$

pour $r=a$; condition nécessaire pour que les mêmes molécules restent constamment adjacentes à la surface latérale du cylindre, et analogues aux équations (3) et (4) relatives à la surface du fluide et au fond du vase. On doit observer que, si les conditions exprimées par ces trois équations n'étaient pas constamment remplies, pendant le mouvement du fluide, ce mouvement serait très-compliqué et peu susceptible d'être déterminé par le calcul. C'est pour cela que Lagrange a mis ces équations, dans la *Mécanique analytique*, au nombre de celles qui doivent concourir à la détermination du mouvement.

Cela posé, la question que nous aurons à résoudre se divisera en deux parties : la première consistera à satisfaire, par la valeur la plus générale de φ, aux équations (3), (4), (5), (6) ; dans la seconde, il s'agira de déterminer, d'après l'état initial du fluide, les quantités arbitraires que cette valeur générale pourra renfermer.

(3) Les valeurs de φ et de ses différences partielles sont égales pour $\psi=0$ et $\psi=2\varpi$, puisqu'elles appartiennent à un même point du fluide, ϖ étant le rapport de la circonférence au diamètre. Cela étant, quelle que soit cette fonction φ, on pourra la représenter par la formule connue

$$\varphi=\frac{1}{2\varpi}\int_0^{2\varpi}\varphi' d\psi'+\frac{1}{\varpi}\Sigma\left(\int_0^{2\varpi}\varphi' \operatorname{Cos}.n(\psi-\psi')d\psi'\right); \qquad (7)$$

et les différences partielles de φ, ou les vîtesses du fluide, seront aussi exprimées par les différences partielles de cette même formule dans laquelle φ' est ce que devient φ quand on y met ψ' à la place de ψ; n représente un nombre entier et positif, et la somme Σ s'étend à toutes les valeurs de n, depuis $n=1$ jusqu'à $n=\infty$.

En intégrant par parties, on a

$$\int \frac{d^2\varphi'}{d\psi'^2}\,\text{Cos}.n(\psi-\psi')d\psi'$$

$$=\frac{d\varphi'}{d\psi'}\,\text{Cos}.n(\psi-\psi')-n\varphi'\text{Sin}.n(\psi-\psi')-n^2\int\varphi'\text{Cos}.n(\psi-\psi')d\psi'\;;$$

aux deux limites $\psi'=0$ et $\psi'=2\varpi$, les termes compris hors du signe $\int$ ont la même valeur et disparaissent, en conséquence, dans l'intégrale définie ; on aura donc simplement

$$\int_0^{2\varpi}\frac{d^2\varphi'}{d\psi'^2}\,\text{Cos}\,n(\psi-\psi')d\psi'=-n^2\int_0^{2\varpi}\varphi'\text{Cos}.n(\psi-\psi')d\psi'\;.$$

D'après cela si l'on met ψ' et φ' au lieu de ψ et φ dans l'équation (5), que l'on intègre tous les termes depuis $\psi'=0$ jusqu'à $\psi'=2\varpi$, après les avoir multipliés par $\frac{1}{\varpi}\,\text{Cos}.n(\psi-\psi')d\psi'$ et que l'on fasse, pour abréger,

$$\frac{1}{\varpi}\int_0^{2\varpi}\varphi'\text{Cos}.n(\psi-\psi')d\psi'=\rho\;, \qquad (8)$$

il en résultera

$$\frac{d^2\rho}{dz^2}+\frac{d^2\rho}{dr^2}+\frac{1}{r}\;\frac{d\rho}{dr}-\frac{n^2\rho}{r^2}=0\;. \qquad (9)$$

En même temps les équations (3), (4), (6) donneront celles-ci :

$$g\frac{d\rho}{dz}-\frac{d^2\rho}{dt^2}=0\;,\qquad \frac{d\rho}{dz}=0\;,\qquad \frac{d\rho}{dr}=0\;,\qquad (10)$$

dont la première aura lieu pour $z=0$, la seconde pour $z=h$ et la troisième pour $r=a$. En faisant usage de ces équations (9) et (10) on n'aura plus à s'occuper de la variable ψ, qu'elles ne contiennent pas explicitement.

(4) Dans un autre mémoire (*) j'ai donné, sous forme finie, l'intégrale complète de l'équation (9) ; mais, pour résoudre le problème proposé, il sera plus commode, ainsi que je l'ai fait dans d'autres cas, d'employer la valeur de φ sous la forme équivalente

$$\varphi=\Sigma(Ue^{mz}+Ve^{-mz}) \ ;$$

m étant une constante arbitraire, e la base des logarithmes népériens, U et V des fonctions de r et t indépendantes de z, et Σ une somme qui s'étend à toutes les valeurs possibles, réelles ou imaginaires de m, U et V.

Pour satisfaire à la seconde équation (10), il faudra prendre

$$U=Re^{-mh} \ , \qquad V=Re^{mh} \ ,$$

R étant une nouvelle fonction de r et t. On aura alors

$$\varphi=\Sigma(e^{m(h-z)}+e^{-m(h-z)})R \ ;$$

et, si l'on substitue cette valeur de φ dans l'équation (9) qui doit avoir lieu pour toutes les valeurs de z, on en conclura

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\ \frac{dR}{dr}-\frac{n^2R}{r^2}+m^2R=0 \ . \qquad (11)$$

On a vu, dans le mémoire que je viens de citer, qu'on satisfait à cette équation différentielle du second ordre, en prenant

(*) *Journal de l'Ecole polytechnique*, XIX.e cahier, pag. 215 et 475

$$R=r^n\int_0^{\varpi}\text{Cos.}(mr\text{Cos.}\omega)\text{Sin.}^{2n}\omega d\omega\ ; \qquad (12)$$

et que son intégrale complète se réduit à cette valeur particulière de R, multipliée par une constante arbitraire, lorsqu'on y supprime la partie qui deviendrait infinie pour $r=0$, ce qui fait disparaître la seconde constante arbitraire. En observant que celle qui subsiste peut être une fonction de t, nous la représenterons par T.

La troisième équation (10) ayant aussi lieu pour toutes les valeurs de r, on en conclut

$$\frac{dR}{dr}=0,$$

pour $r=a$, ou, ce qui est la même chose,

$$\int_0^{\varpi}[n\text{Cos.}(ma\text{Cos.}\omega-ma\text{Cos.}\omega\text{Sin.}(ma\text{Cos.}\omega)]\text{Sin.}^{2n}\omega d\omega=0\ ; \qquad (13)$$

équation transcendante qui servira à déterminer m pour chaque valeur du nombre n et pour $n=0$.

Comme la première équation (10), relative à la surface ou à $z=0$, doit subsister pour toutes les valeurs de r, en y mettant pour φ sa valeur, on en conclura

$$gm\left(e^{mh}-e^{-mh}\right)T+\left(e^{mh}+e^{-mh}\right)\frac{d^2T}{dt^2}=0\ ;$$

et, si l'on fait, pour abréger

$$\frac{gm(e^{mh}-e^{-mh})}{e^{mh}+e^{-mh}}=k^2,$$

l'intégrale complète de cette équation sera

$$T = P\,\mathrm{Cos}.kt + Q\,\mathrm{Sin}\,kt\ ,$$

P et Q étant deux constantes arbitraires.

Maintenant la valeur de ν, qui satisfait aux équations (9) et (10), sera

$$\nu = \Sigma(P\,\mathrm{Cos}.kt + Q\,\mathrm{Sin}.kt)R(e^{m(h-z)} + e^{-m(h-z)})\ ; \qquad (14)$$

la fonction R étant donnée par la formule (12), et la somme Σ s'étendant à toutes les valeurs possibles de P et Q, mais seulement aux valeurs de m tirées des équations (13). Ses racines sont deux à deux égales et de signes contraires ; mais on peut réunir en un seul les deux termes de la somme Σ qui répondent à chaque couple de racines, et n'étendre ensuite cette somme qu'aux valeurs de m dont les carrés sont différens.

(5) Pour déterminer les coefficiens P et Q en fonctions de m, d'après l'état initial du fluide, je ferai usage de la méthode que j'ai déjà employée dans beaucoup d'autres cas, et dont cette détermination fournira un exemple digne de remarque.

Soit m' une racine quelconque de l'équation (3); multiplions l'équation (9) par $(e^{m'(h-z)} + e^{-m'(h-z)})dz$, puis intégrons tous ses termes, depuis $z = o$ jusqu'à $z = h$; en faisant pour abréger

$$\int_o^h (e^{m'(h-z)} + e^{-m'(h-z)})\nu dz = u\ ,$$

nous aurons

$$\int_o^h \left(e^{m'(h-z)} + e^{-m'(h-z)}\right)\frac{d^2\nu}{dz^2}dz + \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{du}{dr} - \frac{n^2u}{r} = o\ .$$

En intégrant par parties, on a

$$\int\left(e^{m'(h-z)}+e^{-m'(h-z)}\right)\frac{d^2\varphi}{dz^2}dz$$

$$=\left(e^{m'(h-z)}+e^{-m'(h-z)}\right)\frac{d\varphi}{dz}+\left(e^{m'(h-z)}-e^{-m'(h-z)}\right)m'\varphi+m'^2\int\left(e^{m'(h-z)}+e^{-m'(h-z)}\right)\varphi dz\;;$$

à la limite $z=h$, les termes compris hors du signe $\int$ disparaissent en vertu de la seconde équation (10); à l'autre limite $z=0$, il se réduisent à

$$\frac{1}{g}\left(e^{m'h}+e^{-m'h}\right)\left(\frac{d^2\varphi'}{dt^2}+k'^2\varphi'\right),$$

en ayant égard à la troisième équation (10), appelant k' ce que devient k lorsqu'on change m en m', et désignant par φ' la valeur de φ qui répond à $z=0$. Nous aurons donc

$$\int_0^h\left(e^{m'(h-z)}+e^{-m'(h-z)}\right)\frac{d^2\varphi}{dz^2}dz$$

$$=m'^2u-\frac{1}{g}\left(e^{m'h}+e^{-m'h}\right)\left(\frac{d^2\varphi'}{dt^2}+k'^2\varphi'\right),$$

et, par conséquent,

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}-\frac{n^2u}{r^2}+m'^2u=\frac{1}{g}\left(e^{m'h}+e^{-m'h}\right)\left(\frac{d^2\varphi'}{dt^2}+k'^2\varphi'\right);$$

équations que nous pourrons écrire de cette autre manière:

$$\frac{d^2.u\sqrt{r}}{dr^2}-\left(n^2-\frac{1}{4}\right)\frac{u\sqrt{r}}{r^2}+m'^2u\sqrt{r}$$

$$=\frac{1}{g}\left(e^{m'h}+e^{-m'h}\right)\left(\frac{d^2\varphi'\sqrt{r}}{dt^2}+k'^2\varphi'\sqrt{r}\right) \qquad (15)$$

Je désigne par R' ce que devient R quand on y change m en m'. Au moyen de l'intégration par parties, on aura

$$\int \frac{\mathrm{d}.u\sqrt{r}}{\mathrm{d}r} R'\sqrt{r}\,\mathrm{d}r$$

$$= \frac{\mathrm{d}\,u\sqrt{r}}{\mathrm{d}r} R'\sqrt{r} - u\sqrt{r}\,\frac{\mathrm{d}.R'\sqrt{r}}{\mathrm{d}t} + \int u\sqrt{r}\,\frac{\mathrm{d}^2.R'\sqrt{r}}{\mathrm{d}r^2}\,\mathrm{d}r\ ;$$

Les termes compris sous le signe $\int$ s'évanouissent avec r ; ils s'évanouissent également pour $r=a$, à cause que l'on a, à cette seconde limite,

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}=0\ , \qquad \frac{\mathrm{d}R'}{\mathrm{d}r}=0\ ;$$

on aura donc

$$\int_0^a \frac{\mathrm{d}^2.u\sqrt{r}}{\mathrm{d}r^2} R'\sqrt{r}\,\mathrm{d}r = \int_0^a \frac{\mathrm{d}^2.R\sqrt{r}}{\mathrm{d}r^2}\, u\sqrt{r}\,\mathrm{d}r\ ;$$

par conséquent, si l'on multiplie l'équation (15) par $R'\sqrt{r}\mathrm{d}r$, et qu'on intègre ses deux membres depuis $r=0$ jusqu'à $r=a$, il en résultera

$$\int_0^a \left[\frac{\mathrm{d}^2.R\sqrt{r}}{\mathrm{d}r^2} - \left(n^2-\frac{1}{4}\right)\frac{R'\sqrt{r}}{r^2} + m'^2R'\sqrt{r}\right] u\sqrt{r}\,\mathrm{d}r$$

$$= \frac{1}{n}\left(e^{m'h}+e^{-m'h}\right)\left(\frac{\mathrm{d}^2.\int_0^a v'R'r\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t^2} + k'^2\int_0^a v'R'r\mathrm{d}r\right).$$

Mais, d'après l'équation (11), on a

$$\frac{\mathrm{d}^2.R'\sqrt{r}}{\mathrm{d}r^2} - \left(n^2-\frac{1}{4}\right)\frac{R'\sqrt{r}}{r^2} + m'^2R'\sqrt{r} = 0\ ;$$

ce qui fait disparaître le premier membre de l'équation précédente, et la réduit à

$$\frac{d^2 . \int_0^a \varphi' R' r dr}{dt^2} + k'^2 \int_0^a \varphi' R' r dr = 0 .$$

L'intégrale complète de celle-ci est

$$\int_0^a \varphi' R' r dr = P' \text{Cos}. k't + Q' \text{Sin}. k't ; \qquad (16)$$

P' et Q' désignant deux constantes arbitraires. Pour les déterminer, j'observe 1.° qu'à l'origine du mouvement, ou quand $t=0$, la valeur de $\frac{d\varphi}{g dt}$ qui répond à $z=0$, est donnée par l'équation (2) d'après la figure initiale du fluide; 2.° que si l'on a exercé à la surface une percussion quelconque, la valeur de φ est aussi donnée, d'après l'expression de cette force, pour $z=0$ et $t=0$. Si donc on fait $t=0$ et $z=0$, dans l'équation (8) et dans sa différentielle relative à t, les valeurs initiales de φ' et $\frac{d\varphi'}{g dt}$ seront aussi connues, et de la forme

$$\left. \begin{array}{l} \varphi' = \text{F}r \text{Cos}. n\psi + \text{F}'r \text{Sin}. n\psi , \\ \frac{d\varphi'}{g dt} = \text{f}r . \text{Cos}. n\psi + \text{f}'r . \text{Sin}. n\psi ; \end{array} \right\} \quad (17)$$

$\text{F}r$, $\text{F}'r$, $\text{f}r$, $\text{f}'r$, étant quatre fonctions de la seule variable r, qui seront données, dans chaque exemple particulier, depuis $r=0$ jusqu'à $r=a$. Cela étant, je fais $t=0$ dans l'équation (16) et dans sa différentielle relative à t; il vient

$$P' = \text{Cos}. nt \int_0^a R' r \text{F} r . dr + \text{Sin}. nt \int_0^a R' r \text{F}' r . dr ;$$

$$Q' = \frac{g\,\mathrm{Cos}.nt}{k'} \int_0^a R'r\mathrm{f}r.\mathrm{d}r + \frac{g\,\mathrm{Sin}\,nt}{k'} \int_0^a R'r\mathrm{f}'r.\mathrm{d}r\,,$$

pour les valeurs demandées de P' et Q'. Il ne reste plus qu'à déterminer, d'après ces valeurs, celles des coefficiens P et Q, contenus dans la formule (14).

En faisant $z=0$, dans cette formule, on en déduit

$$\varphi' = \Sigma(P\,\mathrm{Cos}.kt + Q\,\mathrm{Sin}.kt)R(e^{mh}+e^{-mh})\,;$$

expression que je substitue dans le premier membre de l'équation (16). Comme son second membre ne contient que le *cosinus* et le *sinus* de $k't$, il faudra, pour qu'elle soit identique, que les termes dépendans d'un autre angle kt disparaissent dans son premier membre; ou, autrement dit, si m'^2 diffère de m^2, et, par suite k'^2 de k^2, il faudra qu'on ait

$$\int_0^a RR'r\mathrm{d}r = 0\,. \qquad (18)$$

Dans le cas particulier de $m'=m$, et d'après les valeurs trouvées pour P' et Q', on aura en même temps

$$\left.\begin{aligned}
&P(e^{mh}+e^{-mh})\int_0^a R^2r\mathrm{d}r \\
&= \mathrm{Cos}.n\psi \int_0^a Rr\mathrm{F}r.\mathrm{d}r + \mathrm{Sin}\,n\psi \int_0^a Rr\mathrm{F}'r.\mathrm{d}r\,, \\
&Q(e^{mh}+e^{-mh})\int_0^a R^2r\mathrm{d}r \\
&= \frac{g\,\mathrm{Cos}\,n\psi}{k}\int_0^a Rr\mathrm{f}r.\mathrm{d}r + \frac{g\,\mathrm{Sin}.n\psi}{k}\int_0^a Rr\mathrm{f}'r.\mathrm{d}r\,;
\end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

ce qui détermine les valeurs des coefficiens P et Q, relativement à une racine quelconque m de l'équation (13).

La formule (14) ne contenant plus maintenant que des quantités connues, il en sera de même à l'égard de la formule (7), qui peut être écrite ainsi :

$$\varphi = \Sigma v, \qquad (20)$$

la somme Σ s'étendant à toutes les valeurs de n, depuis $n = 0$ jusqu'à $n = \infty$, pourvu que l'on ne prenne que la moitié de son premier terme. Les différences partielles de cette expression de φ, relatives à t, z, r, ψ, feront connaître, à un instant quelconque, la figure de la surface du fluide, et les vîtesses de la molécule qui répond aux coordonnées z, r, ψ. En appelant p la pression, rapportée à l'unité de surface, qui a lieu au même point, on aura

$$p = gz - \frac{d\varphi}{dt},$$

la densité du fluide étant prise pour unité; et cette pression étant supposée nulle à la surface. L'état du fluide est donc complètement déterminé, et la solution complète du problème proposé est donnée par la formule (20).

Cette expression de φ dépendra, en général, de deux sommations successives : l'une relative aux racines m de l'équation (13), et l'autre relative au nombre n. Au moyen de l'équation (18), on prouvera que ces racines sont toutes réelles, quel que soit le nombre n, qui entre dans l'équation (13). Je crois inutile de répéter ici cette démonstration qui se trouve déjà en plusieurs endroits de mes autres mémoires (*). Il en résulte que tous les termes de l'ex-

(*) Voy. aussi le *Bulletin de la société philomatique*, octobre 1826, pag. 145.

pression de φ sont périodiques, ce qui devait être, en effet, puisque le fluide a été écarté d'un état d'équilibre *stable*. Mais, pour que tous les points reviennent ensemble au même état, et qu'il exécute des oscillations isochrones, il faudra, à cause que les valeurs de k sont incommensurables, que tous les termes de la double somme qui donne la valeur de φ, se réduisent à un seul, et que tous les autres soient nuls, en vertu de l'état initial du fluide.

(7) Si le fluide n'a reçu, à l'origine, aucune percussion, et que les molécules soient parties de l'état de repos, la valeur initiale de φ sera nulle, et il en résultera $\mathrm{F}r=0$, $\mathrm{F}'r=0$ et $P=0$. Supposons de plus qu'à l'origine du mouvement, on ait fait prendre à l'eau la forme d'un solide de révolution, dont l'axe soit celui même du vase qui la contient; il est évident qu'elle conservera constamment une semblable forme, et que la fonction φ sera indépendante de l'angle ψ. En vertu de l'équation (8), la quantité ν sera nulle pour toutes les valeurs de n, excepté pour $n=0$; les deux quantités ν et φ ne différeront pas l'une de l'autre; pour $n=0$, on aura

$$R=\int_0^{\varpi}\mathrm{Cos.}(mr\,\mathrm{Cos.}\omega)d\omega\ ; \qquad (21)$$

et, si l'on supprime le coefficient P dans la formule (14), elle deviendra

$$\varphi=\Sigma Q(e^{m(h-\gamma)}+e^{-m(h-\gamma)})\left(\int_0^{\varpi}\mathrm{Cos.}(mr\,\mathrm{Cos.}\omega)d\omega\right)\mathrm{Sin.}kt.$$

En y substituant pour Q sa valeur relative à $n=0$, et donnée par la seconde équation (17), on aura

$$\varphi=g\Sigma\frac{\int_0^a Rr\mathrm{f}r.dr}{\int_0^a R^2rdr}\left(\int_0^{\varpi}\mathrm{Cos.}(mr\,\mathrm{Cos.}\omega)d\omega\right)Z\frac{\mathrm{Sin.}kt}{k}\ , \qquad (22)$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$\frac{e^{m(h-\gamma)}+e^{-m(h-\gamma)}}{e^{mh}+e^{-mh}}=Z\ ,$$

et conservé la lettre R à la place de sa valeur donnée par l'équation (21).

L'expression de φ ne dépend, comme on voit, dans ce cas particulier, que d'une seule somme Σ, qui répond aux valeurs de m tirées de l'équation (17), et relatives à $n=0$, ce qui réduit cette équation à

$$\int_0^{\varpi} \text{Sin.}(ma\text{Cos.}\omega)\text{Cos.}\omega.\text{d}\omega=0\ , \qquad (23)$$

ou, ce qui est la même chose, à

$$1-\frac{2x}{(1.2)^2}+\frac{3x^2}{(1.2.3)^2}-\frac{4x^3}{(1.2.3.4)^2}+\frac{5x^4}{(1.2.3.4.5)^2}-\ldots\ldots=0\ ,$$

en développant son premier membre suivant les puissances de ma, supprimant le facteur ma commun à tous ses termes, et faisant $m^2a^2=4x$.

Si l'on fait $n=0$, dans la seconde équation (17), on a

$$\frac{\text{d}v'}{g\text{d}t}=\text{f}r\ ,$$

pour $t=0$; et, comme v' est la valeur de v ou de φ qui répond à $z=0$, il résulte de l'équation (2) que fr est la valeur de z' relative à $t=0$. Ainsi, la fonction fr, donnée arbitrairement, que renferme l'équation (22), est l'ordonnée d'un point quelconque de la surface de l'eau à l'origine de son mouvement. D'après cela, si l'on fait $t=0$ et $z=0$, dans l'équation (22) différenciée par rapport à t, on en conclura

$$\text{f}r = \Sigma\, \frac{\int_0^a R r \text{f}r . dr}{\int_0^a R^2 r dr} \left(\int_0^\pi \text{Cos.}(mr\text{Cos.}\omega) d\omega \right) ;$$

et cette expression en série sera propre à représenter la fonction fr, pour toutes les valeurs de la variable, depuis $r = 0$ jusqu'à $r = a$.

L'une des racines de l'équation (23) est $m = 0$; pour cette valeur de m on a

$$Z = 1 , \quad R = \varpi , \quad k = 0 , \quad \frac{\text{Sin}.kt}{k} = t ,$$

et, par conséquent,

$$\varphi = \frac{gt}{\varpi a^2} \Sigma \left(2\varpi \int_0^a r\text{f}r . dr \right) ;$$

mais, à cause de l'incompressibilité du fluide, le volume que représente $2\varpi \int_0^a r\text{f}r . dr$ doit être égal à zéro, le terme de φ qui répond à $m = 0$ est donc aussi nul ; et c'est pour cela que nous avons fait abstraction de cette racine de l'équation (23) en développant son premier membre.

(8) Observons, en terminant ce mémoire, que, si l'on différencie l'équation (2) par rapport à r, et qu'on ait égard à l'équation (6), on en conclura

$$\frac{dz'}{dr} = 0 ,$$

pour $r = a$. Si donc on coupe la surface du fluide par un plan passant par l'axe du cylindre, les tangentes aux extrémités de la courbe d'intersection, c'est-à-dire, aux points où cette courbe rencontre la surface du vase, demeureront constamment horizontales, pendant toute la durée du mouvement. Il faudra donc que cette condition soit remplie par l'état initial et arbitraire de la surface : si elle ne l'était pas, les mêmes molécules du fluide ne resteraient pas adjacentes à la surface latérale du vase, du moins pendant les premiers instans du mouvement qui ne pourrait plus être déterminé par les formules précédentes. Cette restriction provient, comme on voit, des équations différentielles du problème que nous avons empruntées de la *Mécanique analytique*. Il en résulte que le cas, qui paraît le plus simple, où le fluide est terminé à l'origine du mouvement, par un plan incliné, échappe cependant à l'analyse fondée sur ces équations.

Lorsque la surface du fluide sera celle d'un solide de révolution, ses plans tangens extrêmes seront constamment horizontaux, et il faudra qu'à l'origine du mouvement cette surface et celle du vase se coupent à angle droit. Ainsi, dans les formules du numéro précédent la fonction arbitraire $\mathrm{f}r$ devra être telle que l'on ait $\frac{\mathrm{d.f}r}{\mathrm{d}r}=0$ pour $r=a$.

N. B. Dans un mémoire déposé au secrétariat de l'Institut, M. Corancez s'est occupé, avant moi, des oscillations de l'eau contenue dans un vase cylindrique ou prismatique. J'ai cru cependant pouvoir publier la solution précédente du cas où le vase est un cylindre, parce qu'elle m'a paru plus simple et plus complète que celle de M. Corancez qui n'a pas déterminé les quantités arbitraires que contiennent les intégrales, d'après un état quelconque du fluide à l'origine du mouvement.

GÉOMÉTRIE DE SITUATION.

Note sur le nombre des conditions nécessaires pour que quatre droites appartiennent à une même surface du second ordre ;

Par M. GERGONNE.

A la pag. 335 du précédent volume, M. Bobillier a démontré que, *si deux tétraèdres sont l'un inscrit et l'autre circonscrit à une même surface du second ordre, de telle sorte que les sommets de l'inscrit soient les points de contact des faces du circonscrit ; les faces respectivement opposées, dans les deux tétraèdres se coupent suivant quatre droites qui appartiennent à une même surface du second ordre ;* proposition à laquelle, au surplus, M. Steiner était aussi parvenu de son côté.

Faute d'avoir remarqué qu'assujettir une surface courbe à toucher un plan donné en un point donné, c'était réellement l'assujettir à *trois* conditions, et non pas à *deux*, je signalais ce théorème comme présentant quelque chose de paradoxal. Je supposais en effet, deux tétraèdres inscrit et circonscrit l'un à l'autre, d'une manière tout à fait arbitraire, de manière à ne point satisfaire à la condition énoncée ; et je croyais qu'on pourrait toujours concevoir une infinité de surfaces du second ordre à la fois circonscrites à l'un et inscrites à l'autre ; attendu, disais-je, que c'est les assujettir à *huit* conditions seulement, et qu'il en faut *neuf* pour déterminer complètement une surface du second ordre.

MM. Bobillier et Chasles n'ont pas tardé de me faire apercevoir de mon inadvertance, et dès lors j'ai vu clairement que deux tétraèdres étant inscrit et circonscrit l'un à l'autre, assujettir une surface du second ordre à être à la fois circonscrite à l'un et inscrite à l'autre, c'était réellement l'assujettir à *douze* conditions, au lieu de *neuf* qui sont nécessaires pour déterminer une telle surface; que conséquemment le problème n'était résoluble qu'autant que les deux tétraèdres étaient choisis d'une manière convenable, et qu'il n'était pas surprenant, d'après cela, qu'ils dussent satisfaire à la condition énoncée dans le théorème de MM. Steiner et Bobillier.

Mais regardant, mal à propos, cette condition comme unique (pag. 35 du présent volume); après avoir d'abord reproché au théorème de dire trop, je lui reprochai ensuite de ne dire point assez. Peu après, M Chasles ayant démontré (pag. 67) que *les droites qui joignent les sommets respectivement opposés, dans les deux tétraèdres, appartiennent aussi à une même surface du second ordre*, j'ai cru, dans ma fausse préoccupation, pouvoir signaler ce nouveau théorème comme le complément que j'avais désiré pour le premier.

Mais, par une lettre en date du 5 novembre 1828, M. le docteur Plucker me fait observer, avec beaucoup de raison, que ce dernier théorème n'est qu'une conséquence inévitable du premier qui, à son tour, peut réciproquement en être déduit, de telle sorte que, *si deux tétraèdres, inscrit et circonscrit l'un à l'autre, sont tels que les droites suivant lesquelles se coupent les plans de leurs faces respectivement opposées appartiennent toutes quatre à une même surface du second ordre, les droites qui joindront leurs sommets respectivement opposés appartiendront aussi toutes quatre à une même surface du second ordre, et réciproquement;* attendu que ces deux théorèmes sont polaires réciproques l'un de l'autre; et M. Bobillier m'a fait postérieurement la même remarque.

MM. Plucker et Bobillier me font observer, en outre, que chacun de ces deux théorèmes, pris isolément, est complet, c'est-à-dire, qu'il ne dit ni trop ni trop peu; attendu qu'assujettir quatre droites à appartenir à une même surface du second ordre, c'est réellement les assujettir à trois conditions.

En effet, on peut, à l'aide des équations de trois de ces droites, trouver l'équation de la surface du second ordre qu'elles déterminent; et, si l'on suppose que les équations de la quatrième sont

$$x=mz+g\,, \qquad y=nz+h\,,$$

il faudra que les valeurs qu'elles donnent pour x et y, substituées dans l'équation de cette surface, conduisent à une équation qui laisse z indéterminé; mais, cette équation étant du second degré, il faudra que le coefficient de z^2, celui de z et le terme sans z soient séparément nuls, ce qui donnera bien trois conditions distinctes.

Au surplus, comme suivant la maxime des écoles : *Ab actu ad posse valet consecutio*, la manière la plus lumineuse de prouver qu'assujettir quatre droites à appartenir à une même surface du second ordre c'est les assujettir à trois conditions distinctes, c'est incontestablement de produire ces trois conditions. Le calcul en serait assez compliqué si l'on supposait les axes des ordonnées situés d'une manière quelconque, par rapport à ces quatre droites; mais, en les choisissant d'une manière convenable, on peut parvenir au but par un calcul très-simple et très-symétrique.

Soient, en effet, quatre droites indéfinies, que nous supposons n'être assujetties qu'à la seule condition d'appartenir à une surface du second ordre. Prenons l'origine en un point quelconque de l'une d'elles et les axes respectivement parallèles aux trois autres; ces trois dernières déterminent une certaine surface du second ordre, et il s'agit d'exprimer que la quatrième est tout entière dans cette surface.

Ces choses ainsi entendues, considérons l'équation

$$(x-a)(y-b)(z-c)=(x-a')(y-b')(z-c')\,, \qquad (1)$$

elle n'est évidemment que du second degré, et exprime conséquemment une surface du second ordre ; or, on y satisfait par ces trois systèmes d'équations

$$\left\{\begin{array}{l} y=b\,, \\ z=c'\,; \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} z=c\,, \\ x=a'\,; \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x=a\,, \\ y=b'\,; \end{array}\right. \qquad (2)$$

lesquelles expriment des droites respectivement parallèles aux trois axes, qu'on peut toujours supposer être trois de nos droites ; d'où il suit que l'équation (1) est celle de la surface du second ordre déterminée par ces trois droites. En la développant, elle devient

$$\begin{array}{l} (a-a')yz-(bc-b'c')x \\ +(b-b')zx-(ca-c'a')y-(abc-a'b'c')=0\,. \qquad (3) \\ +(c-c')xy-(ab-a'b')z \end{array}$$

Présentement, la quatrième droite, passant par l'origine, doit avoir des équations de la forme

$$\frac{x}{a''}=\frac{y}{b''}=\frac{z}{c''}\,, \qquad (4)$$

d'où l'on tire

$$x=\frac{a''}{c''}z\,, \qquad y=\frac{b''}{c''}z\,;$$

valeurs qui, substituées dans l'équation (3), la changent en celle-ci,

$$\left.\begin{array}{c}\{b''c''(a-a')+c''a''(b-b')+a''b''(c-c')\}z^2\\ -c''\{a''(bc-b'c')+b''(ca-c'a')+c''(ab-a'b')\}z\\ -c''^2(abc-a'b'c')=0\ ;\end{array}\right\}\quad(5)$$

afin donc que la droite (4) soit entièrement dans la surface déterminée par les trois droites (2), il faut que l'équation (5) laisse z absolument indéterminée ; ce qui exige qu'on ait à la fois

$$\left.\begin{array}{c}b''c''(a-a')+c''a''(b-b')+a''b''(c-c')=0\ ,\\ a''(bc-b'c')+b''(ca-c'a')+c''(ab'-a'b')=0\ ,\\ abc-a'b'c'=0\ ;\end{array}\right\}\quad(6)$$

telles sont donc les trois équations qui expriment que les quatre droites (2) et (4) appartiennent à une même surface du second ordre.

GÉOMÉTRIE DES COURBES.

Note sur la quadrature des sections coniques ;

Par M. Bary, professeur suppléant de physique au Collége royal de Charlemagne, ancien élève de l'Ecole polytechnique.

On peut parvenir assez rapidement à la quadrature des trois sections coniques, 1.° en considérant l'ellipse comme la projection d'un cercle ; 2.° en considérant la parabole comme une ellipse dont le grand axe est infini ; 3.° enfin, en considérant l'hyperbole comme une ellipse dont le petit axe est imaginaire. C'est ce que nous nous proposons de faire voir dans ce qui va suivre.

I. En considérant l'ellipse comme la projection orthogonale d'un cercle, et se rappelant que l'aire de la projection d'une figure plane sur un plan quelconque est le produit de l'aire de cette figure par le cosinus tabulaire de l'angle des deux plans, on prouve facilement que l'aire d'une ellipse est équivalente à celle d'un cercle dont le rayon serait moyen proportionnel entre ses deux demi-axes.

La même considération prouve aussi que les coordonnées perpendiculaires à l'un des axes d'une ellipse ne sont autre chose que les ordonnées du cercle décrit sur cet axe comme diamètre, augmentées ou diminuées dans le rapport des deux axes de l'ellipse; et on conclut aisément de là que, *si un cercle et une ellipse ont un axe commun, les segmens des deux courbes répondant à une même abscisse seront aussi entre eux dans le rapport des deux axes.*

Rien n'est plus facile d'après cela que d'obtenir l'expression de l'aire d'un demi-segment elliptique, borné par une perpendiculaire à son grand axe. Soient a et b les demi-axes de l'ellipse ; soit y la perpendiculaire qui termine le segment, et x l'abscisse correspondante. Soit décrit un cercle sur le diamètre $2a$, l'ordonnée y prolongée déterminera un demi-segment circulaire, et nous aurons

$$\text{Demi-ség. ellipt.} = \frac{a}{b}\ \text{demi-ség. circul.}$$

Le demi-segment circulaire est l'excès d'un secteur sur un triangle; et comme, en désignant par y' l'ordonnée du cercle correspondant à l'ordonnée y de l'ellipse, on a $y'=\frac{a}{b}y$, il s'ensuit que le sinus de l'angle du demi-secteur qui est $\frac{y'}{a}$ pourra aussi être exprimé par $\frac{y}{b}$; l'aire de ce demi-secteur sera donc $\frac{1}{2}a^2\text{Arc.}\left(\text{Sin.}=\frac{y}{b}\right)$. Pour en conclure celle du segment il faudra en retrancher l'aire d'un triangle rectangle dont les deux côtés de l'angle droit sont $a-x$ et $y'=\frac{a}{b}y$; c'est-à-dire, qu'il faudra en retrancher $\frac{1}{2}\frac{a(a-x)y}{b}$; l'aire du demi-secteur circulaire sera donc

$$\frac{1}{2}a\left\{a\text{Arc}\left(\text{Sin.}=\frac{y}{b}\right)-\frac{(a-x)y}{b}\right\};$$

en la multipliant par le rapport $\frac{a}{b}$, on en conclura pour l'aire du demi-secteur elliptique.

$$\frac{1}{2}ab\text{Arc}\left(\text{Sin.}=\frac{y}{b}\right)-\frac{1}{2}(a-x)y\ ; \qquad (1)$$

si l'on veut compter les abscisses du centre, on pourra écrire

$$\frac{1}{2}ab\text{Arc}\left(\text{Tang.}=\frac{x}{y}\right)-\frac{1}{2}xy\ .$$

On sait que

$$\text{Arc}\left(\text{Sin.}=\frac{y}{b}\right)=\frac{y}{b}+\frac{1.y^3}{2.3.b^3}+\frac{1.3.y^5}{2.4.5.b^5}+\frac{1.3.5.y^7}{2.4.6.7.b^7}+\ldots\ldots$$

en substituant cette valeur dans la formule (1) et remplaçant b^2 par $\frac{pa}{2}$, p étant le paramètre, il viendra, en réduisant, pour l'expression du demi-segment elliptique

$$\frac{xy}{2}+\frac{1}{2.3}\cdot\frac{y^3}{p}+2.\frac{1.3}{2.4.5}\cdot\frac{y^6}{p^2a}+4.\frac{1.3.5}{2.4.6.7}\cdot\frac{y^7}{p^3a^2}+\ldots\ldots$$

Si l'on suppose a infini, on passe à la parabole, et cette expression se réduit à

$$\frac{xy}{2}+\frac{y^3}{6p}=\frac{xy}{2}+\frac{pxy}{6p}=\frac{xy}{2}+\frac{xy}{6}=\frac{2}{3}\,xy\ ;$$

c'est-à-dire, que *l'aire du demi-segment parabolique est les deux tiers de celle du rectangle des deux coordonnées.*

On sait que

$$\text{Arc}\left(\text{Tang.}=\frac{y}{x}\right)=\frac{x}{y}-\tfrac{1}{3}\,\frac{y^3}{x^3}+\tfrac{1}{5}\,\frac{y^5}{x^5}-\tfrac{1}{7}\,\frac{y^7}{x^7}+\ldots;$$

substituant dans la formule (2), nous aurons pour l'expression du demi-segment elliptique

$$\tfrac{1}{2}ab\left(\frac{y}{x}-\tfrac{1}{3}\,\frac{y^3}{x^3}+{}_5\,\frac{y^5}{x^5}-\tfrac{1}{7}\,\frac{y^7}{x^7}+\ldots\right)-\tfrac{1}{2}xy\ ;$$

Si, dans cette expression, on change y en $y\sqrt{-1}$, on passera au demi-segment hyperbolique pour lequel on trouvera ainsi

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\left\{\left(\frac{y}{x}+\tfrac{1}{3}\,\frac{y^3}{x^3}+\tfrac{1}{5}\,\frac{y^5}{x^5}+\tfrac{1}{7}\,\frac{y^7}{x^7}+\ldots\ldots\right)-xy\right\}$$

ou bien

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\left\{\mathrm{l}.\frac{x+y}{x-y}-xy\right\}.$$

Pour conclure de là l'aire du demi-segment réel, il faudra d'abord supprimer le facteur $\sqrt{-1}$ et changer ensuite les signes à raison du changement de situation, ce qui donnera

$$\tfrac{1}{2}xy-\tfrac{1}{2}\mathrm{l}.\frac{x+y}{x-y}\ .$$

Or, $\frac{1}{2}xy$ est l'aire du triangle construit sur les coordonnées, d'où il suit que $\frac{1}{2}\mathrm{l}.\frac{x+y}{x-y}$ est l'aire du demi-secteur hyperbolique.

GÉOMÉTRIE.

Note sur deux théorèmes de géométrie démontrés dans le XVIII.me volume du présent recueil ;

Par M. Bobillier.

Il a été démontré, à la pag. 368 du XVIII.me volume des *Annales*, 1.° que, dans toute ligne du second ordre qui a un centre, la somme des carrés des inverses de deux diamètres perpendiculaires l'un à l'autre est une quantité constante ; 2.° que, dans toute surface du second ordre qui a un centre, la somme des carrés des inverses de trois diamètres dont chacun est perpendiculaire aux deux autres, est également une quantité constante.

La livraison des *Annales* qui renferme la démonstration de ces deux théorèmes n'avait point encore paru lorsque j'adressai à M. Quetelet un mémoire publié dans la *Correspondance* de Bruxelles (tom. IV, 4.me livraison, pag. 216), dans lequel ces deux théorèmes se trouvaient aussi incidemment démontrés. J'ai reconnu postérieurement qu'ils pouvaient être démontrés sans calcul, ainsi qu'on va le voir.

I. Soient A, B les deux demi-axes d'une conique, et a, b deux demi-diamètres rectangulaires quelconques. Si l'on prend pour directrice un cercle de même centre, dont r soit le rayon, les demi-axes de la polaire réciproque de la conique seront $\frac{r^2}{A}$, $\frac{r^2}{B}$; les tangentes, polaires des extrémités des demi-diamètres a, b seront rectangulaires et distantes du centre des quantités $\frac{r^2}{a}$, $\frac{r^2}{b}$; le carré de la distance de leur point d'intersection au centre sera donc $\frac{r^4}{a^2}+\frac{r^4}{b^2}$. Mais on sait d'ailleurs que ce point, sommet d'un angle droit circonscrit à la courbe polaire réciproque de la proposée, est sur une circonférence dont le carré du rayon est $\frac{r^4}{A^2}+\frac{r^4}{B^2}$; on doit donc avoir

$$\frac{r^4}{a^2}+\frac{r^4}{b^2}=\frac{r^4}{A^2}+\frac{r^4}{B^2}\ ;$$

c'est-à-dire simplement

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{A^2}+\frac{1}{B^2}\ ;$$

ce qui est précisément le premier des deux théorèmes.

II. Soient A, B, C les demi-axes d'une surface du second ordre, et a, b, c trois demi-diamètres d'une telle surface dont chacun soit perpendiculaire aux deux autres. Si l'on prend pour directrice une sphère de même centre, dont r soit le rayon, les demi-axes de la polaire réciproque de la surface proposée seront $\frac{r^2}{A}$, $\frac{r^2}{B}$, $\frac{r^2}{C}$; les plans tangens polaires des extrémités des demi-diamètres a, b, c seront rectangulaires, et distans du centre des quantités $\frac{r^2}{a}$, $\frac{r^2}{b}$, $\frac{r^2}{c}$; le carré de la distance de leur point d'intersection au centre sera donc $\frac{r^4}{a^2}+\frac{r^4}{b^2}+\frac{r^4}{c^2}$. Mais on sait d'ailleurs que ce point, sommet d'un angle trièdre tri-rectangle, circonscrit à la surface polaire réciproque de la proposée, est sur une sphère dont le carré du rayon est $\frac{r^4}{A^2}+\frac{r^4}{B^2}+\frac{r^4}{C^2}$; on doit donc avoir

$$\frac{r^4}{a^2}+\frac{r^4}{b^2}+\frac{r^4}{c^2}=\frac{r^4}{A^2}+\frac{r^4}{B^2}+\frac{r^4}{C^2} ;$$

c'est-à-dire simplement

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{A^2}+\frac{1}{B^2}+\frac{1}{C^2} ;$$

ce qui est précisément le second des deux théorèmes.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution du problème de géométrie énoncé à la pag. 96 du présent volume ;

Par M. VALLÈS, élève ingénieur des ponts et chaussées.

SOIENT inscrits à un angle donné 2α deux cercles se touchant extérieurement. Soient r, r' les rayons de ces cercles, et d, d' les distances de leurs centres au sommet de l'angle ; en supposant $r>r'$, et par suite $d>d'$, on aura évidemment

$$r=d\,\text{Sin.}\alpha\,,\quad r'=d'\,\text{Sin.}\alpha\,,\quad r+r'=d-d'\ ;$$

éliminant d et d' entre ces trois équations, on en tirera

$$\frac{r}{r'}=\frac{1+\text{Sin.}\alpha}{1-\text{Sin.}\alpha}\quad (*)\ :$$

(*) On peut écrire

$$\frac{r}{r'}=\frac{1+\text{Sin.}\alpha}{1-\text{Sin.}\alpha}=\left(\frac{\sqrt{1+\text{Cos.}\alpha}+\sqrt{1-\text{Cos.}\alpha}}{\sqrt{1+\text{Cos.}\alpha}-\sqrt{1-\text{Cos.}\alpha}}\right)^2=\left\{\frac{1+\sqrt{\dfrac{1-\text{Cos.}\alpha}{1+\text{Cos.}\alpha}}}{1-\sqrt{\dfrac{1-\text{Cos.}\alpha}{1+\text{Cos.}\alpha}}}\right\}^2$$

$$=\left(\frac{1+\text{Tang.}\frac{1}{2}\alpha}{1-\text{Tang.}\frac{1}{2}\alpha}\right)^2=\left(\frac{\text{Tang.}\frac{1}{4}\varpi+\text{Tang.}\frac{1}{2}\alpha}{1-\text{Tang.}\frac{1}{4}\varpi\,\text{Tang.}\frac{1}{2}\alpha}\right)^2=\text{Tang.}^2(\tfrac{1}{4}\varpi+\tfrac{1}{2}\alpha)$$

c'est-à-dire que le rapport entre les rayons de ces deux cercles est indépendant de leur grandeur. De là résulte ce théorème :

Si l'on inscrit à un même angle une suite de cercles se touchant consécutivement, les rayons de ces cercles, et par suite leurs circonférences et leurs surfaces, formeront une progression par quotiens.

Concevons que l'on fasse tourner la moitié de l'angle donné 2α, autour de la droite qui le divise en deux parties égales ; cette moitié engendrera un cône de révolution dont l'angle générateur sera α ; et les demi-cercles engendreront des sphères inscrites à ce cône, lesquelles se toucheront consécutivement ; on a donc cet autre théorème :

Si l'on inscrit à un cône droit une suite de sphères qui se touchent consécutivement ; les rayons de ces sphères, et par suite les circonférences et les surfaces de leurs grands cercles, leurs surfaces et leurs volumes formeront une progression par différences.

A un angle trièdre donné soit inscrite une suite de sphères qui se touchent consécutivement ; ces sphères seront aussi inscrites à la surface conique inscrite à cet angle trièdre ; on a donc ce troisième théorème qui est précisément celui qu'il s'agissait d'établir :

Si, à un angle trièdre donné, on inscrit une suite de sphères qui se touchent consécutivement, les rayons de ces sphères, et par

---

c'est sous cette forme que $\frac{r}{r'}$ a été donnée par M. L. P. E. R., qui a aussi résolu le problème.

On pourrait encore écrire $\frac{r}{r'}=\frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}\varpi+\text{Sin.}\alpha}{\text{Sin.}\frac{1}{2}\varpi-\text{Sin.}\alpha}=\frac{\text{Tang.}(\frac{1}{4}\varpi+\frac{1}{2}\alpha)}{\text{Tang.}(\frac{1}{4}\varpi-\frac{1}{2}\alpha)}$, formule qui rentre dans la première, en observant qu'en général $\text{Tang.}(\frac{1}{4}\varpi+x).\text{Tang.}(\frac{1}{4}\varpi-x)=1$; mais qui a l'inconvénient d'exiger l'emploi de deux logarithmes.

J. D. G.

suite les circonférences et les surfaces de leurs grands cercles, leurs surfaces et leurs volumes formeront une progression par quotiens.

Un cercle d'un rayon r étant inscrit à l'angle plan 2α, on pourra, en marchant vers son sommet, lui inscrire une infinité d'autres cercles, de plus en plus petits. Les rayons de ces cercles formeront une progression décroissante par quotiens, dont la raison sera, comme nous l'avons vu ci-dessus, $\frac{1+\text{Sin.}\alpha}{1-\text{Sin.}\alpha}$; on aura donc pour la somme de ces rayons $\frac{r(1+\text{Sin.}\alpha)}{2\text{Sin.}\alpha}$. La somme des circonférences de ces mêmes cercles sera d'après cela $\frac{\varpi r(1+\text{Sin.}\alpha)}{\text{Sin}\,\alpha}$. Quant à leurs surfaces, elles formeront une progression décroissante par quotiens dont le premier terme sera ϖr^2 et la raison $\left(\frac{1+\text{Sin.}\alpha}{1-\text{Sin.}\alpha}\right)^2$; en conséquence, on trouvera pour la somme des aires de ces cercles

$$\frac{\varpi r^2(1+\text{Sin.}\alpha)^2}{4\text{Sin.}\alpha}.$$

De même, une sphère d'un rayon r étant inscrite à un cône droit dont l'angle générateur est α, on pourra, en marchant vers son sommet, lui inscrire une infinité d'autres sphères, de plus en plus petites. On trouvera, pour la somme des rayons de ces sphères $\frac{r(1+\text{Sin.}\alpha)}{2\text{Sin.}\alpha}$; pour la somme des circonférences de leurs grands cercles $\frac{\varpi r(1+\text{Sin}\,\alpha)}{\text{Sin.}\alpha}$; pour la somme des aires de ces grands cercles $\frac{\varpi r^2(1+\text{Sin.}\alpha)^2}{4\text{Sin.}\alpha}$; pour la somme des surfaces des sphères $\frac{\varpi r^2(1+\text{Sin}\,\alpha)^2}{\text{Sin.}\alpha}$. Enfin, les volumes de ces sphères formeront une progression décroissante par quotiens, dont le premier terme sera $\frac{4}{3}\varpi r^3$, et la raison $\left(\frac{1+\text{Sin}\,\alpha}{1-\text{Sin.}\alpha}\right)^3$; ce qui donnera, pour la somme de ces volumes,

$$\frac{2\varpi r^3(1+\text{Sin.}\alpha)^3}{3(3+\text{Sin.}\alpha)\text{Sin.}\alpha}\,.$$

On sait (*Annales*, tom. XV, pag. 298) que, si a, b, c sont les trois angles plans d'un angle trièdre, et que α soit l'angle générateur du cône inscrit, en posant, pour abréger,

$$a+b+c=2s\,,$$

$$p^2=\text{Sin.}s\text{Sin.}(s-a)\text{Sin.}(s-b)\text{Sin.}(s-c)\,;$$

on a

$$\text{Tang.}\alpha=\frac{p}{\text{Sin.}s}\,,$$

d'où

$$\text{Sin.}\alpha=\frac{p}{\sqrt{p^2+\text{Sin.}^2s}}\,;$$

et

$$\frac{1+\text{Sin.}\alpha}{1-\text{Sin.}\alpha}=\frac{\sqrt{p^2+\text{Sin.}^2s}+p}{\sqrt{p^2+\text{Sin.}^2s}-p}=\frac{(\sqrt{p^2+\text{Sin.}^2s}+p)^2}{\text{Sin.}^2s}\,;$$

et telle sera conséquemment la raison de la progression par quotiens que formeront les rayons et les circonférences des grands cercles des sphères inscrites ; les surfaces de ces grands cercles et celles des sphères formeront une progression dont la raison sera le carré de cette quantité, et les volumes de ces sphères formeront une progression dont la raison en sera le cube (*).

(*) C'est précisément à ce résultat que parvient M. Steiner; et qui nous a aussi été adressé postérieurement par M. Bobillier et par M. Martinelli, cadet au corps royal des pionniers, à Modène.

J. D. G.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Théorèmes d'arithmétique.

I. TOUT nombre entier est diviseur d'un nombre exprimé par une suite de 9 suivis de plusieurs zéros.

II. Tous les nombres et les seuls nombres premiers supérieurs d'une unité à des puissances de *deux*, lesquels sont aussi, comme l'on sait, les nombres de divisions qu'on peut exécuter géométriquement dans la circonférence d'un cercle, sont ceux de la suite

$$2+1\,,\quad 2^{2}+1\,,\quad 2^{2^{2}}+1\,,\quad 2^{2^{2^{2}}}+1\,,\quad 2^{2^{2^{2^{2}}}}+1\,,\quad \ldots$$

Problème d'arithmétique.

Quel est le plus petit des dénominateurs qui donnent des périodes décimales de *onze chiffres ;* ou, en d'autres termes, le nombre 11111111111 a-t-il quelque facteur différent de lui et de l'unité ?

OPTIQUE.

Du mouvement de la lumière dans un milieu transparent, dont la densité varie dans tous les sens, suivant une loi mathématique quelconque;

Par M. Gergonne.

Plusieurs années avant que M. Biot eût fait paraître son ouvrage sur les *Réfractions extraordinaires qui ont lieu près de l'horizon*, et à l'occasion d'une pitoyable explication du phénomène du *Mirage*, que j'avais rencontrée dans la *Décade philosophique*, je m'étais déjà occupé de la recherche des lois du mouvement de la lumière et de la vision, dans un milieu transparent de densité variable. Bien qu'alors le phénomène du mirage fût connu et observé depuis long-temps, dans diverses contrées de l'Europe, personne néanmoins n'avait songé à en déduire l'explication mathématique des lois connues de l'optique. La route dans laquelle je m'engageais n'était donc point encore frayée. Je n'avais jamais eu l'occasion d'observer le phénomène que j'entreprenais de soumettre à l'analyse; il ne m'était même connu que par la courte description qu'en avait donné M. Biot, dans ses *Elémens d'astronomie ;* cependant je fus assez heureux pour parvenir à des résultats que l'observation directe, elle-même, n'avait fait apercevoir qu'assez tardivement à M. Monge, durant son séjour en Egypte, comme on en peut juger par le post-scriptum de son *Mémoire sur le mirage*, inséré d'abord dans la *Décade égyptienne*, et reproduit postérieurement par M. Hachette, dans son *Programme d'un cours de physique.* Le mémoire de Monge paraît, au surplus, beaucoup moins écrit pour les géomètres que pour les hommes, en très-grand nombre, qui aspirent uniquement à prendre une teinture superficielle des causes des phénomènes variés que le spectacle de la nature peut offrir à notre observation ; ce mémoire ne m'aurait donc pu être d'aucun secours pour mon travail, qui était terminé depuis plus d'un an, lorsqu'il me tomba pour la première fois sous la main.

Je m'étais borné alors, parce qu'en effet cela suffisait à mon but, à considérer le mouvement de la lumière et la vision, dans un milieu transparent, composé de couches planes parallèles, d'une densité constante dans chaque couches, et variant seulement, d'une couche à l'autre, suivant une loi mathématique donnée quelconque, et un extrait de mon mémoire parut dans le volume des *Travaux de l'Académie du Gard*, pour 1808 ; mais je m'étais bien promis dès lors de revenir de nouveau sur ce sujet, pour l'envisager sous un point de vue un peu plus large, en supposant que la densité du milieu varie d'un point à l'autre, d'une manière quelconque, dans toutes sortes de directions. Ce n'est que très-récemment que j'ai pu jouir, sans de continuelles distractions, des quelques loisirs qui m'étaient nécessaires pour mettre ce dessein à exécution. Je ne m'occuperai, dans le présent mémoire, que des lois du mouvement de la lumière, en renvoyant à un autre mémoire ce qui concerne les lois de la vision.

Dans tout ce qui va suivre, j'admettrai, comme je l'avais déjà fait, dans mon premier mémoire, l'hypothèse newtonienne sur la nature de la lumière, non toutefois que je la regarde, plus que celles des ondulations, conforme à la vérité, mais seulement parce qu'elle se prête plus aisément que cette dernière à l'analyse mathématique, et que d'ailleurs, pour l'objet particulier que j'ai en vue, rien n'est plus facile, comme on le verra, que de passer des résultats relatifs à l'une des hypothèses à ceux qu'on déduirait de l'autre. Afin que le lecteur n'ait besoin de recourir à aucun autre écrit, qu'il pourrait fort bien n'avoir pas sous la main, j'analyserai d'abord brièvement l'action des milieux sur la lumière qui les traverse.

Tout ce que l'observation peut nous apprendre sur la nature de la lumière, c'est 1.° qu'elle semble une substance d'une nature particulière, dont les molécules s'échappent, dans toutes sortes de directions, de chacun des points des corps lumineux ou éclairés; 2.° que, quelle que soit la direction initiale d'une molécule lumineuse, tant qu'elle se meut dans le vide ou dans un milieu physiquement et chimiquement homogène, c'est-à-dire, dans un milieu dont la nature et la densité sont partout les mêmes, elle suit une direction exactement rectiligne; de telle sorte que la pesanteur terrestre ne paraît exercer sur elle aucune action appréciable (*);

(*) La preuve expérimentale qu'on apporte de cette propriété de la lumière, dans la plupart des traités de physique, m'a toujours paru une véritable pétition de principe. On nous dit, par exemple, qu'un rayon solaire, reçu dans une chambre obscure, par un trou fait au volet, enfile exactement un long tube rectiligne, quelque petit d'ailleurs qu'en soit le diamètre intérieur; mais on ne nous explique pas comment on peut s'assurer, au préalable, que ce tube est rectiligne. Ce ne sera sûrement pas au coup d'œil qu'on en jugera; car si, par aventure, le mouvement de la lumière était curviligne, il faudrait que la direction de l'axe du tube le fût également pour qu'on pût, en plaçant l'œil à une de ses extrémités, apercevoir les objets situés dans le prolongement de cet axe; c'est même là ce qui arriverait inévitablement, à raison des réfractions atmosphériques, si le tube était excessivement long et non vertical. Il ne suffit donc pas que le rayon enfile le tube, pour que la direction de la lumière soit reconnue rectiligne; il faut, en outre, qu'il ne cesse pas de l'enfiler, lorsqu'on fera tourner ce tube dans deux colliers fixes, situés à ses extrémités; car il n'y a que la ligne droite dont la situation soit unique entre deux des points de sa direction.

3.° qu'alors son mouvement est non seulement rectiligne mais encore uniforme; de sorte qu'elle ne paraît éprouver aucune résistance sensible de la part des milieux qu'elle traverse; 4.° qu'enfin, lorsque la lumière pénètre du vide dans un milieu ou d'un milieu dans le vide, ce milieu paraît exercer sur elle une action, tantôt attractive et tantôt répulsive, tout à fait analogue aux actions chimiques, dont le caractère le plus saillant est d'être tout à fait insensible à la moindre distance appréciable du contact.

Adoptons donc cette hypothèse qui n'est, après tout, que l'expression exacte des faits, et examinons soigneusement quelles doivent en être les conséquences mathématiques.

Soit d'abord une molécule lumineuse mue verticalement, de haut en bas, dans le vide, et s'approchant ainsi d'un milieu indéfini, physiquement et chimiquement homogène, séparé de ce vide par un plan horizontal, également indéfini, et dont l'action sur cette molécule soit *attractive*. Soit que la molécule soit encore hors du milieu, ou soit qu'au contraire elle y ait déjà pénétré, tout se trouvant exactement dans les mêmes circonstances tout autour de la verticale que cette molécule parcourt, elle continuera constamment à la parcourir; de sorte qu'il est seulement question de découvrir suivant quelle loi sa vîtesse pourra varier.

Considérons d'abord la molécule hors du milieu; soit x l'intervalle qui l'en sépare à l'époque t; la force accélératrice sera, pour la même époque, $\frac{d^2x}{dt^2}$; et cette force sera visiblement proportionnelle à la densité du milieu; puisque, par exemple, un milieu n fois plus dense que celui-là, pouvant être considéré comme le système de n milieux d'une densité pareille à la sienne, qui se seraient pénétrés, et chacun d'eux agissant comme s'il était seul, leur action totale doit être n fois plus grande que celle de chacun d'eux en particulier. Il n'est pas moins évident que cette force accélératrice doit être une certaine fonction de la distance x de la molécule au plan horizontal indéfini qui termine le milieu; de sorte qu'en représentant par u sa densité constante, on doit avoir

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-uF(x),$$

la fonction F étant indépendante de u. Nous donnons ici le signe — au second membre, parce que l'action du milieu tend à diminuer la distance x.

De cette première équation on conclut

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=A-2u\int F(x)dx,$$

A étant une constante arbitraire; de sorte qu'en posant, pour abréger,

$$\int F(x)dx=f(x),$$

on a simplement

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=A-2uf(x).$$

Pour faire disparaître la constante A, désignons par w la vîtesse uniforme de la molécule dans le vide, avant qu'elle soit assez voisine du milieu pour éprouver de sa part une action appréciable; ce sera aussi sa vîtesse pour $x=\infty$. Soit de plus V la vîtesse de cette molécule au contact où $x=0$; nous aurons ainsi

$$w^2=A-2uf(\infty),$$

$$V^2=A-2uf(0);$$

d'où, en retranchant,

$$V^2-w^2=2u\{f(\infty)-f(0)\};$$

Or, $f(\infty)-f(0)$ est une quantité constante qui ne dépend que de la forme de la fonction f, c'est-à-dire, du mode d'action inconnu des milieux sur la lumière ; mais que nous pouvons, une fois pour toute, représenter par k^2 (*); nous aurons donc ainsi

$$V^2-v^2=2k^2u\ ;$$

c'est-à-dire qu'à l'entrée de la molécule dans le milieu, le carré de sa vîtesse se trouve déjà augmenté d'une quantité proportionnelle à la densité de ce milieu.

Considérons maintenant ce qui se passe lorsque la molécule a déjà pénétré dans le milieu. A quelque profondeur x qu'elle y soit déjà parvenue, si, à la même distance x, au-dessous d'elle, on conçoit un plan horizontal, la portion du milieu située au-dessus de ce plan n'exercera évidemment aucune action sur cette molécule, puisqu'elle s'y trouvera symétriquement située ; la molécule sera donc sollicitée par le surplus du milieu comme elle l'était par le milieu entier, lorsqu'elle n'était encore qu'à la distance x au-dessus de sa surface ; et, comme il en ira toujours de même, quelle que soit la valeur de x, qui, dans ce cas-ci, va croissant, l'action du milieu sur elle, qui aura atteint son maximum au contact, décroîtra continuellement ; de telle sorte qu'elle aura été exactement la même aux mêmes distances au-dessus et au-dessous du plan horizontal indéfini qui termine ce milieu. En un mot, l'action totale du milieu sur cette molécule aura été finalement la même que si, celle-ci restant fixe, le milieu s'était peu à peu élévé jusqu'à elle, pour s'en éloigner ensuite, par un mouvement rétrograde, exactement inverse du premier. La molécule en pénétrant dans le milieu, jusqu'à une profondeur où son mouvement sera devenu de

(*) Ce k^2 est la même chose que le k employé par Laplace dans le X.me livre de la *Mécanique céleste*. Je mets k^2 au lieu de k, pour la commodité des applications.

nouveau sensiblement uniforme, comme il l'était dans le vide, aura donc encore accru le carré de sa vîtesse de la même quantité dont il s'était déjà accru en allant du vide à la surface de ce milieu, de sorte qu'en représentant par v la nouvelle vîtesse uniforme de cette molécule, on aura

$$v^2-V^2=2k^2u\ ;$$

puis donc que nous avons déjà trouvé

$$V^2-w^2=2k^2u\ ,$$

nous aurons, par addition,

$$v^2-w^2=4k^2u\ .$$

Ainsi, lorsqu'une molécule lumineuse passe du vide dans un milieu homogène indéfini qui l'attire, et qui est séparé de ce vide par un plan indéfini, perpendiculaire à la direction du mouvement de la molécule, le carré de la vîtesse uniforme de cette molécule dans le milieu est égal au carré de sa vîtesse uniforme dans le vide, augmenté d'une quantité proportionnelle à la densité de ce milieu, et la force accélératrice est exactement la même à des distances égales de part et d'autre du plan qui termine le milieu. Mais, à cause de l'excessive petitesse du rayon d'activité du milieu, tout se passe sensiblement comme si la vîtesse, constamment égale à w, jusqu'au contact, se changeait brusquement en v au-delà de ce point.

Supposons présentement que la molécule, au lieu de pénétrer du vide dans un milieu homogène, pénètre d'un milieu homogène indéfini dans un autre milieu également homogène et indéfini, d'une densité supérieure à la sienne; les deux milieux étant séparés l'un de l'autre par un plan indéfini, et la direction de la molécule étant perpendiculaire à ce plan. Soient u et u' les densités des deux milieux, v et v' les vîtesses constantes de la lumière dans l'un et dans l'autre. En considérant la densité u' du second milieu comme composée de deux autres u et $u'-u$, la première, qui lui sera commune avec celle du premier, n'aura aucune action pour modifier la vîtesse v; la molécule lumineuse se trouvera donc dans le même cas que si elle pénétrait du vide, où elle aurait la vîtesse v, dans un milieu dont la densité serait $u'-u$, et où elle acquerrait la vîtesse v'; on aura donc, par ce qui précède,

$$v'^2-v^2=4k^2(u'-u).$$

Ainsi, si deux milieux transparens, homogènes et indéfinis, d'une densité différente, sont séparés l'un de l'autre par un plan également indéfini, et qu'une molécule lumineuse passe du moins dense dans celui qui l'est le plus, en suivant une perpendiculaire à leur plan séparateur; par l'effet de l'excès de l'action du second milieu sur celle du premier, le carré de la vîtesse de la molécule se trouvera augmenté d'une quantité proportionnelle à l'excès de la densité de ce second milieu sur celle du premier; et il est clair qu'on pourra encore admettre ici, sans erreur sensible, que cette augmentation dans le carré de la vîtesse a lieu brusquement, dans le passage du premier milieu au second.

Supposons actuellement que la molécule traverse le premier milieu dans une direction oblique au plan séparateur; si, par cette direction, on conçoit un plan perpendiculaire à celui-là, tout étant égal de part et d'autre de ce second plan, la molécule n'en sortira pas, même après avoir pénétré dans le second milieu. Par le point d'incidence soit conduite une perpendiculaire au plan séparateur; soient θ et θ' les angles que font les rayons incidens et réfractés avec cette perpendiculaire; ce seront là aussi, respectivement, les angles d'incidence et de réfraction. Soient toujours v et v' les vîtesses constantes de la molécule dans les deux milieux; les composantes de ces vîtesses seront, savoir:

dans le sens du plan séparateur $\begin{cases} v \ \mathrm{Sin}.\theta\ , \\ v' \ \mathrm{Sin}.\theta'\ ; \end{cases}$

dans le sens de la perpendiculaire $\begin{cases} v \ \mathrm{Cos}.\theta\ , \\ v' \ \mathrm{Cos}.\theta'\ ; \end{cases}$

or, comme l'action totale des milieux s'exerce perpendiculairement au plan séparateur, les vîtesses, dans le sens de ce plan, ne sauraient différer l'une de l'autre; de sorte qu'on doit avoir

$$v\mathrm{Sin}.\theta = v'\mathrm{Sin}.\theta' \ .$$

En second lieu, les carrés des vîtesses perpendiculaires au plan séparateur devant, d'après ce qui précède, différer l'un de l'autre de la quantité $4k^2(u-u')$, on aura aussi

$$v'^2\mathrm{Cos}.^2\theta' - v^2\mathrm{Cos}.^2\theta = 4k^2(u'-u) \ ;$$

éliminant v' entre ces deux équations, et transformant les cosinus en sinus dans l'équation résultante, on aura

$$\frac{\mathrm{Sin}.\theta}{\mathrm{Sin}.\theta'} = \sqrt{1 + \frac{4k^2(u'-u)}{v^2}} \ ;$$

or, pour les deux mêmes milieux et pour une même vîtesse constante v, dans le premier, le second membre de cette équation est indépendant de θ, c'est-à-dire, de la direction de la molécule dans le premier milieu; donc, son premier membre en doit être également indépendant; donc, pour les deux mêmes milieux et pour la même vîtesse absolue dans le premier, *il existe un rapport constant entre le sinus d'incidence et le sinus de réfraction.*

On sait que la constance de ce rapport est complétement confirmée par l'expérience; d'où il suit qu'elle est indépendante de toute hypothèse sur la nature de la lumière; en la représentant par n, nous aurons

$$n=\sqrt{1+\frac{4k^2(u'-u)}{v^2}},$$

d'où on tire

$$u'-u=\frac{n^2-1}{4}\left(\frac{v}{k}\right)^2;$$

si donc on veut adopter tout autre hypothèse que la nôtre, il ne s'agira que de remplacer par $\frac{n^2-1}{4}\left(\frac{v}{k}\right)^2$ ce que nous avons appelé la différence de densité des deux milieux.

Si, entre les deux mêmes équations, on élimine θ, θ' disparaîtra de lui-même, et il viendra

$$v'^2-v^2=4k^2(u'-u);$$

ainsi, la différence des carrés des vîtesses absolues de la molécule dans les deux milieux est indépendante de la direction initiale de son mouvement.

Soient présentement u, u_1, u_2, u_3, ... u_m les densités d'une suite de milieux transparens, homogènes et indéfinis, séparés les uns des autres par des plans également indéfinis, *parallèles ou non parallèles;* une molécule lumineuse qui les parcourra successivement décrira sensiblement un polygone rectiligne ouvert, plan ou gauche, ayant ses sommets sur les divers plans séparateurs, et les plans de ses angles respectivement perpendiculaires aux plans séparateurs qui en contiendront les sommets. Au passage de chaque milieu dans le suivant, la composante de la vîtesse absolue, dans le sens du plan séparateur, ne subira aucune modification; mais, si l'on représente par v, v_1, v_2, v_3, ... v_m les vîtesses absolues dans les différens milieux, on aura, par ce qui précède,

$$v_1^2-v^2=4k^2(u_1-u)\ ,$$

$$v_2^2-v_1^2=4k^2(u_2-u_1)\ ,$$

$$v_3^2-v_2^2=4k^2(u_3-u_2)\ ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ ,$$

$$v^2_m-v^2_{m-1}=4k^2(u_m-u_{m-1})\ ;$$

d'où, en ajoutant et réduisant,

$$v^2_m-v^2=4k^2(u_m-u)\ ;$$

et par suite

$$v^2_m=v^2+4k^2(u_m-u)\ ;$$

c'est-à-dire que la vîtesse absolue de la molécule, dans le dernier milieu, sera exactement la même que si elle y était immédiatement parvenue du premier; de sorte que l'existence des milieux intermédiaires n'aura eu, au plus, d'autre effet que de changer la direction finale de cette molécule, et de lui faire acquérir, par degrés, une vîtesse qu'elle aurait prise tout à coup sans leur présence.

Si les milieux, toujours homogènes et indéfinis, sont séparés les uns des autres par des surfaces courbes quelconques, la molécule en les traversant décrira encore sensiblement un polygone rectiligne ouvert, plan ou gauche, ayant ses sommets sur ces diverses surfaces. En imaginant, par les sommets du polygone, des plans respectivement tangens aux surfaces courbes séparatrices sur lesquelles ces sommets se trouvent situés; ces plans tangens pourront être pris pour les surfaces séparatrices elles-mêmes; de sorte que les plans des angles du polygone seront respectivement perpendiculaires à ces plans tangens; que les composantes des vîtesses absolues, dans le sens de ces plans tangens, ne subiront aucune variation dans le passage d'un milieu à celui qui lui sera consécutif, et qu'enfin la vîtesse absolue de la molécule, dans l'un quelconque de ces milieux, sera la même que si cette molécule y avait directement pénétré.

Tout se passera évidemment de la même manière, quelque peu différentes de figure et de situation dans l'espace que soient deux surfaces courbes séparatrices consécutives et quelque petite que soit la différence de densité des deux milieux séparés par chacune d'elles; il en ira donc encore de même lorsque la molécule parcourra un milieu, chimiquement homogène, dont la densité variera, d'une manière insensible, d'un point au suivant, dans toutes les directions, suivant une loi mathématique quelconque. Il arrivera seulement alors que le polygone rectiligne, plan ou gauche, que décrivait d'abord la molécule, deviendra une courbe plane ou a double courbure; et l'on voit, 1.° que le plan osculateur de cette courbe, en l'un quelconque de ses points, sera normal à la surface courbe, lieu de tous les points du milieu qui auront même densité que celui-là; 2.° que la composante, suivant le plan tangent à cette surface, en ce même point, de la vîtesse absolue de la molécule, devra être constante ou, en d'autres termes, que sa différentielle devra être nulle; 3.° qu'enfin cette vîtesse absolue devra être la même que si, sans intermédiaire, la molécule était parvenue du vide en ce point. Or, il n'en faut pas davantage pour parvenir aux équations du mouvement de la lumière, dans un milieu transparent, chimiquement homogène, dont la densité varie d'un point à l'autre, dans toutes les directions et d'une manière insensible, suivant une loi mathématique donnée, ainsi qu'on le verra tout à l'heure.

Au lieu de supposer que le milieu, chimiquement homogène, varie seulement de densité, il reviendrait au même de supposer que c'est, au contraire, sa nature chimique qui varie, par degrés insensibles, tandis que sa densité demeure constante; on pourrait même supposer que l'une et l'autre varient à la fois. Pour éviter tout embarras, on peut appeler *densité optique* d'un milieu, en chacun de ses points, la densité que devrait avoir un fluide connu, pris pour terme de comparaison, l'air atmosphérique, par exemple, pour exercer sur la lumière une action pareille à celle que ce milieu exerce sur elle, en ce même point, et c'est ainsi qu'il sera permis d'entendre le mot *densité* dans tout ce qui va suivre.

Soit présentement une molécule lumineuse, en mouvement dans un milieu transparent, d'une densité variable. Supposons que cette molécule ne s'y meuve qu'en vertu d'une vîtesse antérieurement acquise, combinée avec l'action du milieu sur elle; rapportons-la à trois axes rectangulaires, et soit (x, y, z) le point du milieu où elle se trouve à l'époque t. Si nous représentons par u la densité de ce milieu en ce point, u sera une fonction de x, y, z, sans t, donnée par une équation de la forme

$$u=\varphi(x,y,z)\,, \qquad (1)$$

qui déterminera le densité de ce milieu, en chacun de ses points, et qui en sera conséquemment la définition complète.

En même temps que cette équation donnera la densité de chacun des points du milieu, elle fera aussi connaître les points de ce milieu qui auront une densité donnée; et l'on voit que tous les points d'une même densité quelconque seront, en général, ceux d'une certaine surface plane ou courbe; de sorte que, généralement parlant, tout milieu de densité variable peut être considéré, ainsi que nous le faisions tout à l'heure, comme composé de couches de densité constante. Un milieu ne saurait différer d'un autre que par la figure et la situation de ces couches, et par la manière dont la densité varie d'une couche à l'autre (*).

(*) C'est la théorie générale de ces sortes de milieux que nous appellions de nos vœux dans une note de la pag. 87 de notre XIV.e volume; note

En posant, pour abréger,

$$\left(\frac{du}{dx}\right)=P\ ,\quad \left(\frac{du}{dy}\right)=Q\ ,\quad \left(\frac{du}{dz}\right)=R\ , \qquad (2)$$

on aura

$$du=Pdx+Qdy+Rdz\ . \qquad (3)$$

Or, poser $du=0$ c'est exprimer que la variation de densité est nulle ou que la densité est constante; donc, l'équation résultante

$$Pdx+Qdy+Rdz=0\ , \qquad (4)$$

est l'équation différentielle des couches de densité constante; c'est-à-dire que c'est l'équation différentielle de la couche dans toute l'étendue de laquelle la densité u est la même qu'au point (x, y, z).

En désignant donc par X, Y, Z les coordonnées courantes dans l'espace, les équations du plan tangent et de la normale de cette surface, en ce point (x, y, z), seront

$$P(X-x)+Q(Y-y)+R(Z-z)=0\ , \qquad (5)$$

$$\frac{X-x}{P}=\frac{Y-y}{Q}=\frac{Z-z}{R}\ . \qquad (6)$$

Présentement, en considérant x, y, z comme des fonctions de t, choisi pour variable indépendante, l'équation du plan osculateur de la trajectoire, au point (x, y, z), sera, comme l'on sait,

---

sur laquelle le *Bulletin universel* (juillet 1828, pag. 10) a rappelé de nouveau l'attention des géomètres, à l'occasion d'un très-curieux mémoire de M. Gauss. On classerait alors les milieux comme on classe aujourd'hui les lignes et les surfaces courbes.

$$\left.\begin{array}{l}\left(\frac{dy}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}-\frac{dz}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}\right)(X-x)\\ +\left(\frac{dz}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dx}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}\right)(Y-y)\\ +\left(\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}\right)(Z-z)\end{array}\right\}=0\,; \quad (7)$$

et il faudra d'abord que ce plan soit perpendiculaire, en (x, y, z), au plan tangent (5) au même point; ce qui donnera, pour première équation du mouvement de la molécule

$$P\left(\frac{dy}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}-\frac{dz}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}\right)+Q\left(\frac{dz}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dx}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}\right)+R\left(\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}\right)=0,$$

ou bien

$$\left(Q\frac{d^2z}{dt^2}-R\frac{d^2y}{dt^2}\right)\frac{dx}{dt}+\left(R\frac{d^2x}{dt^2}-P\frac{d^2z}{dt^2}\right)\frac{dy}{dt}+\left(P\frac{d^2y}{dt^2}-Q\frac{d^2x}{dt^2}\right)\frac{dz}{dt}=0\,. \quad (8)$$

Les vitesses de la molécule, parallèlement aux axes des x, des y et des z, étant respectivement

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt}\,;$$

les équations de la tangente à la trajectoire, au point (x, y, z), seront

$$\frac{X-x}{\frac{dx}{dt}}=\frac{Y-y}{\frac{dy}{dt}}=\frac{Z-z}{\frac{dz}{dt}}\,; \quad (9)$$

de sorte que, si l'on représente par θ l'angle que fait cette tangente avec la normale (6) au même point, c'est-à-dire, l'angle d'incidence, on aura

$$\text{Sin.}\theta = \frac{\sqrt{\left(Q\frac{dz}{dt} - R\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(R\frac{dx}{dt} - P\frac{dz}{dt}\right)^2 + \left(P\frac{dy}{dt} - Q\frac{dx}{dt}\right)^2}}{\sqrt{(P^2+Q^2+R^2)\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}}} . \qquad (10)$$

Mais, si l'on représente par v la vîtesse absolue de la molécule au point (x, y, z), ce qui donnera

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 , \qquad (11)$$

la vîtesse, dans le sens du plan tangent en (x, y, z) à la surface (4) de densité constante, sera $v\text{Sin.}\theta$; en substituant donc, dans son expression, pour v et $\text{Sin.}\theta$ leurs valeurs, cette vîtesse deviendra

$$\frac{\sqrt{\left(Q\frac{dz}{dt} - R\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(R\frac{dx}{dt} - P\frac{dz}{dt}\right)^2 + \left(P\frac{dy}{dt} - Q\frac{dx}{dt}\right)^2}}{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}} ;$$

et il faudra que la différentielle de cette composante, en y traitant P, Q, R comme constans, puisqu'on reste dans le plan tangent, soit nulle ; ce qui donnera, pour deuxième équation du mouvement de la molécule,

$$\left.\begin{array}{l} \left(Q\frac{dz}{dt} - R\frac{dy}{dt}\right)\left(Q\frac{d^2z}{dt^2} - R\frac{d^2y}{dt^2}\right) \\ +\left(R\frac{dx}{dt} - P\frac{dz}{dt}\right)\left(R\frac{d^2x}{dt^2} - P\frac{d^2z}{dt^2}\right) \\ +\left(P\frac{dy}{dt} - Q\frac{dx}{dt}\right)\left(P\frac{d^2y}{dt^2} - Q\frac{d^2x}{dt^2}\right) \end{array}\right\} = 0 . \qquad (12)$$

Enfin, la vîtesse absolue v de la molécule, en (x, y, z), où la densité du milieu est u devant être la même que si cette molécule y était parvenue du vide, sans aucun intermédiaire; en désignant toujours par w la vîtesse connue de la lumière dans le vide, on devra avoir encore, d'après ce qui a été dit ci-dessus,

$$v^2 = w^2 + 4k^2u \; ;$$

ce qui donnera, pour la troisième équation du mouvement de la molécule

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = w^2 + 4k^2u \; ; \qquad (13)$$

mais nous allons voir que ces trois équations peuvent être remplacées par trois autres, incomparablement plus simples.

On satisfait d'abord visiblement aux deux équations (8) et (12), quel que soit λ, en posant

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \lambda P \; , \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \lambda Q \; , \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \lambda R \; ; \qquad (14)$$

mais, en différentiant l'équation (13), on obtient

$$\frac{dx}{dt}\,\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\,\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dz}{dt}\,\frac{d^2z}{dt^2} = 2k^2\left(P\,\frac{dx}{dt} + Q\,\frac{dy}{dt} + R\,\frac{dz}{dt}\right), \quad (15)$$

qui, en y substituant les valeurs (14), se réduit à $\lambda = 2k^2$; de sorte que les équations (14), c'est-à-dire, les équations du mouvement de la molécule sont simplement

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2k^2P \; , \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 2k^2Q \; , \quad \frac{d^2z}{dt^2} = 2k^2R \; ; \quad (16)$$

équations qui comportent d'ailleurs l'équation (13), et qui seront, à raison de leur extrême simplicité et de leur parfaite symétrie, d'un emploi très-commode, surtout lorsque P, Q, R seront respectivement des fonctions de x, y, z seulement.

Ces équations (16) pourront également servir, soit à déterminer les circonstances du mouvement, lorsque la nature du milieu sera donnée, soit au contraire à déterminer la nature du milieu, lorsque les circonstances du mouvement seront connues.

Pour donner un exemple du premier de ces deux cas, supposons que les couches de densité constante soient des couches ellipsoïdales concentriques, semblables et semblablement disposées, ayant le point (a, b, c) pour centre commun, et leurs axes proportionnels à trois quantités p, q, r. Supposons, en outre, que la densité de ces couches croisse du dedans au dehors, proportionnellement aux carrés de leurs dimensions, en prenant les axes des coordonnées respectivement parallèles aux diamètres principaux de ces surfaces, on aura

$$u=\left(\frac{x-a}{p}\right)^2+\left(\frac{y-b}{q}\right)^2+\left(\frac{z-c}{r}\right)^2. \qquad (17)$$

On trouvera conséquemment

$$P=\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)=2\left(\frac{x-a}{p^2}\right),\quad Q=\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\right)=2\left(\frac{y-b}{q^2}\right),\quad R=\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\right)=2\left(\frac{z-c}{r^2}\right);$$

au moyen de quoi les équations (16) deviendront

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=4k^2\left(\frac{x-a}{p^2}\right),\quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=4k^2\left(\frac{y-b}{q^2}\right),\quad \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}=4k^2\left(\frac{z-c}{r^2}\right),$$

et donneront, en intégrant

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=4k^2\left(\frac{x-a}{p}\right)^2+A,\ \left(\frac{dy}{dt}\right)^2=4k^2\left(\frac{y-b}{q}\right)^2+B,\ \left(\frac{dz}{dt}\right)^2=4k^2\left(\frac{z-c}{r}\right)^2+C;\ (18)$$

A, B, C étant trois constantes arbitraires.

Pour les déterminer, supposons que la molécule soit partie de l'origine, avec la vîtesse V, dans une direction faisant avec les axes des x, y, z des angles respectivement égaux à α, β, γ; nous aurons ainsi

$$V^2\text{Cos.}^2\alpha=4k^2\frac{a^2}{p^2}+A,\quad V^2\text{Cos.}^2\beta=4k^2\frac{b^2}{q^2}+B,\quad V^2\text{Cos.}^2\gamma=4k^2\frac{c^2}{r^2}+C;$$

en retranchant ces équations des précédentes, il viendra, en transposant,

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2&=4k^2\left(\frac{x-a}{p}\right)^2+V^2\text{Cos.}^2\alpha-4k^2\frac{a^2}{p^2},\\ \left(\frac{dy}{dt}\right)^2&=4k^2\left(\frac{y-b}{q}\right)^2+V^2\text{Cos.}^2\beta-4k^2\frac{b^2}{q^2},\\ \left(\frac{dz}{dt}\right)^2&=4k^2\left(\frac{z-c}{r}\right)^2+V^2\text{Cos.}^2\gamma-4k^2\frac{c^2}{r^2};\end{aligned}\right\}\ (19)$$

d'où on tirera

$$\left.\begin{aligned}dt&=\frac{dx}{\sqrt{4k^2\left(\frac{x-a}{p}\right)^2+V^2\text{Cos.}^2\alpha-4k^2\frac{a^2}{p^2}}},\\ dt&=\frac{dy}{\sqrt{4k^2\left(\frac{y-b}{q}\right)^2+V^2\text{Cos.}^2\beta-4k^2\frac{b^2}{q^2}}},\\ dt&=\frac{dz}{\sqrt{4k^2\left(\frac{z-c}{r}\right)^2+V^2\text{Cos.}^2\gamma-4k^2\frac{c^2}{r^2}}};\end{aligned}\right\}\ (20)$$

ce qui donnera, en intégrant,

$$\left.\begin{aligned}
t+D &= \frac{p}{2k}\,\text{Log.}\left\{2k\,\frac{x-a}{p}+\sqrt{4k^2\left(\frac{x-a}{p}\right)^2+V^2\text{Cos.}^2\alpha-4k^2\,\frac{a^2}{p^2}}\right\},\\
t+E &= \frac{q}{2k}\,\text{Log.}\left\{2k\,\frac{y-b}{q}+\sqrt{4k^2\left(\frac{y-b}{q}\right)^2+V^2\text{Cos.}^2\beta-4k^2\,\frac{b^2}{q^2}}\right\},\\
t+F &= \frac{r}{2k}\,\text{Log.}\left\{2k\,\frac{z-c}{r}+\sqrt{2k^2\left(\frac{z-c}{r}\right)^2+V^2\text{Cos.}^2\gamma-4k^2\,\frac{c^2}{r^2}}\right\},
\end{aligned}\right\}\quad(21)$$

D, E, F étant trois nouvelles constantes arbitraires.

Pour les déterminer, fixons l'origine des temps au passage de la molécule par l'origine des coordonnées; alors x, y, z devront être nuls en même temps que t; ce qui donnera

$$D=\frac{p}{2k}\,\text{Log.}\left(-2k\,\frac{a}{p}+V\text{Cos.}\alpha\right),$$

$$E=\frac{q}{2k}\,\text{Log.}\left(-2k\,\frac{b}{q}+V\text{Cos.}\beta\right),$$

$$F=\frac{r}{2k}\,\text{Log.}\left(-2k\,\frac{c}{r}+V\text{Cos.}\gamma\right);$$

d'où, en retranchant,

$$\left.\begin{aligned}
t &= \frac{p}{2k}\,\text{Log.}\,\frac{2k\,\frac{x-a}{p}+\sqrt{2k^2\left(\frac{x-a}{p}\right)^2+V^2\text{Cos.}^2\alpha-4k^2\,\frac{a^2}{p^2}}}{V\text{Cos.}\alpha-2k\,\frac{a}{p}},\\
t &= \frac{q}{2k}\,\text{Log.}\,\frac{2k\,\frac{y-b}{q}+\sqrt{2k^2\left(\frac{y-b}{q}\right)^2+V^2\text{Cos.}^2\beta-4k^2\,\frac{b^2}{q^2}}}{V\text{Cos.}\beta-2k\,\frac{a^2}{q^2}},\\
t &= \frac{r}{2k}\,\text{Log.}\,\frac{2k\,\frac{z-c}{r}+\sqrt{2k^2\left(\frac{z-c}{r}\right)^2+V^2\text{Cos.}^2\gamma-4k^2\,\frac{c^2}{r^2}}}{V\text{Cos.}\gamma-2k\,\frac{c}{r}};
\end{aligned}\right\}\quad(22)$$

équations entre lesquelles éliminant t, on aura d'abord, pour la double équation de la trajectoire décrite

$$\left\{\frac{2k\,\frac{x-a}{p}+\sqrt{4k^2\left(\frac{x-a}{p}\right)^2+V^2\text{Cos.}^2\alpha-4k^2\,\frac{a^2}{p^2}}}{V\text{Cos.}\alpha-2k\,\frac{a}{p}}\right\}^p$$
$$=\left\{\frac{2k\,\frac{y-b}{q}+\sqrt{2k^2\left(\frac{y-b}{q}\right)^2+V^2\text{Cos.}^2\beta-4k^2\,\frac{b^2}{q^2}}}{V\text{Cos.}\beta-2k\,\frac{b}{q}}\right\}^q$$
$$=\left\{\frac{2k\,\frac{z-c}{q}+\sqrt{4k^2\left(\frac{z-c}{r}\right)^2+V^2\text{Cos}^2\gamma-4k^2\,\frac{c^2}{r^2}}}{V\text{Cos.}\gamma-2k\frac{c}{r}}\right\}^r \quad (23)$$

Les mêmes équations (22) peuvent être écrites comme il suit :

$$\left(V\text{Cos.}\alpha-2k\,\frac{a}{p}\right)e^{\frac{2kt}{p}}-2k\frac{x-a}{p}=\sqrt{4k^2\left(\frac{x-a}{p}\right)^2+V^2\text{Cos.}^2\alpha-4k^2\,\frac{a^2}{p^2}}\ ,$$

$$\left(V\text{Cos.}\beta-2k\,\frac{b}{q}\right)e^{\frac{2kt}{q}}-2k\,\frac{y-b}{q}=\sqrt{4k^2\left(\frac{y-b}{q}\right)^2+V^2\text{Cos.}^2\beta-4k^2\,\frac{b^2}{q^2}}\ ,$$

$$\left(V\text{Cos.}\gamma-2k\,\frac{c}{r}\right)e^{\frac{2kt}{r}}-2k\,\frac{z-c}{r}=\sqrt{4k^2\left(\frac{z-c}{r}\right)^2+V^2\text{Cos.}^2\gamma-4k^2\,\frac{c^2}{r^2}}\ ;$$

carrant alors les deux membres, réduisant et divisant respectivement par $V\text{Cos.}\alpha-2k\,\frac{a}{p}$, $V\text{Cos.}\beta-2k\,\frac{b}{q}$, $V\text{Cos.}\gamma-2k\,\frac{c}{r}$, il viendra, en transposant,

$$\left.\begin{aligned}
x&=a+\frac{4}{4k}\left\{\left(V\mathrm{Cos}.\alpha-2k\frac{a}{p}\right)e^{\frac{2kt}{p}}-\left(V\mathrm{Cos}.\alpha+2k\frac{a}{p}\right)e^{-\frac{2kt}{p}}\right\},\\
y&=b+\frac{q}{4k}\left\{\left(V\mathrm{Cos}.\beta-2k\frac{b}{q}\right)e^{\frac{2kt}{q}}-\left(V\mathrm{Cos}\,\beta+2k\frac{b}{q}\right)e^{-\frac{2kt}{q}}\right\},\\
z&=c+\frac{r}{4k}\left\{\left(V\mathrm{Cos}.\gamma-2k\frac{c}{r}\right)e^{\frac{2kt}{r}}-\left(V\mathrm{Cos}.\gamma+2k\frac{c}{r}\right)e^{-\frac{2kt}{r}}\right\};
\end{aligned}\right\}\quad(24)$$

et telles seront finalement les équations du mouvement de la molécule.

Si l'on suppose c et $\mathrm{Cos}\,\gamma$ nuls, c'est-à-dire, si l'une des sections principales communes à toutes les couches de densité constante est dans le plan des xy, et que la direction de la molécule à son passage par l'origine, soit aussi dans ce plan, on aura $z=0$, quel que soit t; c'est-à-dire que, pendant toute la durée du mouvement, la molécule ne sortira pas de ce plan, ce qui est d'ailleurs évident, puisqu'alors tout se trouvera de part et d'autre dans les mêmes circonstances.

Si les couches de densité constante sont sphériques, on aura $p=q=r$, et par suite

$$x=a+\frac{1}{4k}\left\{(rV\mathrm{Cos}.\alpha-2ka)e^{\frac{2kt}{r}}-(rV\mathrm{Cos}.\alpha+2ka)e^{-\frac{2kt}{r}}\right\},$$

$$y=b+\frac{1}{4k}\left\{(rV\mathrm{Cos}\,\beta-2kb)e^{\frac{2kt}{r}}-(rV\mathrm{Cos}.\beta+2kb)e^{-\frac{2kt}{r}}\right\},$$

$$z=c+\frac{1}{4k}\left\{(rV\mathrm{Cos}.\gamma-2kc)e^{\frac{2kt}{r}}-(rV\mathrm{Cos}.\gamma+2kc)e^{-\frac{2kt}{r}}\right\}.$$

On tirera de là

$$cy-bz=\frac{rV}{4k}\left(e^{\frac{2kt}{r}}-e^{-\frac{2kt}{r}}\right)(c\text{Cos.}\beta-b\text{Cos.}\gamma)\ ,$$

$$az-cx=\frac{rV}{4k}\left(e^{\frac{2kt}{r}}-e^{-\frac{2kt}{r}}\right)(a\text{Cos.}\gamma-c\text{Cos.}\alpha)\ ,$$

$$bx-ay=\frac{rV}{4k}\left(e^{\frac{2kt}{r}}-e^{-\frac{2kt}{r}}\right)(b\text{Cos.}\alpha-a\text{Cos}\,\beta)\ ;$$

et par suite

$$(cy-bz)\text{Cos.}\alpha+(az-cx)\text{Cos.}\beta+(by-ay)\text{Cos.}\gamma=0\ ,$$

ou bien

$$(b\text{Cos.}\gamma-c\text{Cos.}\beta)x+(c\text{Cos.}\alpha-a\text{Cos.}\gamma)y+(a\text{Cos.}\beta-b\text{Cos.}\alpha)=0\ ;$$

la trajectoire est donc plane, dans ce cas, comme on pouvait bien le prévoir. Son plan passe évidemment par l'origine et par le centre commun des couches de densité constante.

Si, dans les équations (24), on suppose a, b, Cos.α, Cos.β nuls, c'est-à-dire, si l'on suppose que l'un des diamètres principaux commun à toutes les couches de densité constante est dans l'axe des z, et qu'à son passage à l'origine, la molécule est dirigée suivant cet axe, on aura x et y nuls, quel que soit t; c'est-à-dire que, pendant toute la durée du mouvement, la molécule ne sortira pas de cet axe des z; ce qui d'ailleurs est évident, puisqu'alors, d'après ce qui a été dit ci-dessus, elle ne doit sortir ni du plan des xz ni de celui des yz.

Pour donner un exemple du second cas, c'est-à-dire, de celui où des circonstances du mouvement il faut conclure la nature du milieu ; supposons que les équations du mouvement de la molécule soient

$$x=a-\sqrt{(a-Vt\,\mathrm{Cos}.\alpha)^2-4k^2\left(\frac{p}{a}\right)^2t^2}\,,$$

$$y=b-\sqrt{(b-Vt\,\mathrm{Cos}.\beta)^2-4k^2\left(\frac{q}{b}\right)^2t^2}\,,$$

$$z=c-\sqrt{(c-Vt\,\mathrm{Cos}.\gamma)^2-4k^2\left(\frac{r}{c}\right)^2t^2}\,,$$

et proposons-nous d'en conclure la valeur de u, en x, y, z. On voit d'abord qu'à l'origine des temps la molécule se trouvera l'origine des coordonnées.

Par une première différentiation, on déduit de là

$$\frac{dx}{dt}=\frac{aV\mathrm{Cos}.\alpha-\left(V^2\mathrm{Cos}.^2\alpha-4k^2\frac{p^2}{a^2}\right)t}{\sqrt{(a-Vt\,\mathrm{Cos}.\alpha)^2-4k^2\left(\frac{p}{a}\right)^2t^2}}\,,$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{bV\mathrm{Cos}\,\beta-\left(V^2\mathrm{Cos}.^2\beta-4k^2\frac{q^2}{b^2}\right)t}{\sqrt{(b-Vt\,\mathrm{Cos}.\beta)^2-4k^2\left(\frac{q}{b}\right)^2t^2}}\,,$$

$$\frac{dz}{dt}=\frac{cV\mathrm{Cos}.\gamma-\left(V^2\mathrm{Cos}.^2\gamma-4k^2\frac{r^2}{c^2}\right)t}{\sqrt{(c-Vt\,\mathrm{Cos}.\gamma)^2-4k^2\left(\frac{r}{c}\right)^2t^2}}\,;$$

d'où l'on voit que la vîtesse initiale de la molécule est V, et que sa direction initiale fait, avec les axes des x, y, z, des angles respectivement égaux à α, β, γ.

En différentiant de nouveau, il vient

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=\frac{4k^2p^2}{\left\{(a-Vt\mathrm{Cos}.\alpha)^2-4k^2\left(\frac{p}{a}\right)^2t^2\right\}^{\frac{3}{2}}}=-\frac{4k^2p^2}{(x-a)^3}\ ,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=\frac{4k^2q^2}{\left\{(b-Vt\mathrm{Cos}.\beta)^2-4k^2\left(\frac{q}{b}\right)^2t^2\right\}^{\frac{3}{2}}}=-\frac{4k^2q^2}{(y-b)^3}\ ,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}=\frac{4k^2r^2}{\left\{(c-Vt\mathrm{Cos}.\gamma)^2-4k^2\left(\frac{r}{c}\right)^2t^2\right\}^{\frac{3}{2}}}=-\frac{4k^2r^2}{(z-c)^3}\ ;$$

on aura donc aussi (16)

$$2k^2P=-\frac{4k^2p^2}{(x-a)}\ ,\quad 2k^2Q=-\frac{4k^2q^2}{(y-b)^3}\ ,\quad 2k^2R=-\frac{4k^2r^2}{(z-c)^3}\ ;$$

c'est-à-dire,

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)=P=-\frac{2p^2}{(x-a)^3}\ ,\quad \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\right)=Q=-\frac{2q^2}{(y-b)^3}\ ,\quad \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\right)=R=-\frac{2r^2}{(z-c)^3}\ ;$$

d'où

$$\mathrm{d}u=-\frac{2p^2\mathrm{d}x}{(z-a)^3}-\frac{2q^2\mathrm{d}y}{(y-b)^3}-\frac{2r^2\mathrm{d}z}{(z-c)^3}\ ;$$

et, par suite, en intégrant,

$$u=\left(\frac{p}{x-a}\right)^2+\left(\frac{q}{q-y}\right)^2+\left(\frac{r}{z-c}\right)^2\ ;$$

telle est donc la définition du milieu dont il s'agit. Nous n'ajoutons point de constante, attendu qu'en augmentant ou en diminuant, d'une même quantité, la densité de tous les points du milieu, on ne change rien aux circonstances du phénomène.

Lorsque le milieu est symétrique par rapport à un plan et que la direction initiale de la molécule est comprise dans ce plan, c'est-à-dire, lorsque les surfaces courbes de densité constante ont toutes une section principale commune dont le plan contient la direction de la molécule lumineuse, pour un instant quelconque, cette molécule ne sort pas de ce plan et décrit conséquemment une courbe plane. En prenant donc le plan de sa trajectoire pour le plan des xy, $\frac{dz}{dt}$ sera nul; de sorte qu'on n'aura à considérer que les deux équations

$$\frac{d^2x}{dt^2}=2k^2P\ , \quad \frac{d^2y}{dt^2}=2k^2Q\ . \qquad (25)$$

C'est, par exemple, le cas où les couches de densité constante étant des surfaces cylindriques, ayant toutes leurs élémens rectilignes parallèles à une même droite fixe, la molécule serait mue dans un plan perpendiculaire à cette droite.

Si donc les couches de densité constante se trouvaient symétriques par rapport à tous les plans conduits par un même point fixe, la trajectoire décrite par la molécule serait contenue dans un plan passant par ce point fixe, quelle que pût être d'ailleurs la direction initiale de son mouvement. Tel serait, par exemple, le cas où les couches de densité constante seraient sphériques et concentriques; et tel serait aussi le cas où elles seraient planes et parallèles; des plans parallèles pouvant être considérés comme des portions de sphères concentriques, dont le rayon est infini.

Si le milieu était symétrique par rapport à deux ou à un plus grand nombre de plans, se coupant suivant la même droite, et que la direction initiale de la molécule coïncidât avec cette droite, il est clair qu'elle n'en sortirait pas dans tout le mouvement; de sorte que la trajectoire serait rectiligne. En prenant donc cette droite pour axe des x, on n'aurait à considérer que la seule équation

$$\frac{d^2x}{dt^2}=2k^2P \ . \qquad (26)$$

C'est, par exemple, le cas où les couches de densité constante seraient des surfaces de révolution ayant un axe commun avec lequel coïnciderait, à un instant quelconque, la direction du mouvement de la molécule, et c'est encore le cas où les couches de densité constante étant des plans parallèles, la molécule serait dirigée perpendiculairement à ces plans; enfin ce serait aussi le cas d'un milieu homogène, quelle que pût être d'ailleurs la direction initiale de la molécule; puisqu'alors cette direction serait toujours perpendiculaire à des couches planes parallèles de densité constante; mais dans ce dernier cas, le mouvement serait non seulement rectiligne, mais encore uniforme.

Lorsqu'on n'a aucun intérêt à connaître le lieu de la molécule lumineuse à chaque instant de son mouvement et qu'on veut seulement savoir qu'elle est la trajectoire décrite, ce qui est le cas le plus ordinaire, il faut, pour obtenir les équations générales du problème, éliminer t entre les trois équations (16); ce qui exige qu'on change d'abord d'hypothèse relativement à la variable indépendante. En prenant x pour cette variable

$$\left.\begin{matrix}\dfrac{d^2x}{dt^2}\\[3em] \dfrac{d^2y}{dt^2}\\[3em] \dfrac{d^2z}{dt^2}\end{matrix}\right\} \text{ deviendront respectivement } \left\{\begin{matrix}-\dfrac{\dfrac{d^2t}{dx^2}}{\left(\dfrac{dt}{dx}\right)^3}\,,\\[2em] \dfrac{\dfrac{d^2y}{dx^2}\dfrac{dt}{dx}-\dfrac{dy}{dx}\dfrac{d^2t}{dx^2}}{\left(\dfrac{dt}{dx}\right)^3}\,,\\[2em] \dfrac{\dfrac{d^2z}{dx^2}\dfrac{dt}{dx}-\dfrac{dz}{dx}\dfrac{d^2t}{dx^2}}{\left(\dfrac{dt}{dx}\right)^3}\,;\end{matrix}\right.$$

au moyen de quoi les équations (16) se changent dans les suivantes :

$$-\frac{d^2t}{dx^2}=2k^2P\left(\frac{dt}{dx}\right)^3,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}\,\frac{dt}{dx}-\frac{dy}{dx}\,\frac{d^2t}{dx^2}=2k^2Q\left(\frac{dt}{dz}\right)^3,$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}\,\frac{dt}{dx}-\frac{dz}{dx}\,\frac{d^2t}{dx^2}=2k^2R\left(\frac{dt}{dx}\right)^3.$$

Éliminant $\frac{d^2t}{dx^2}$ des deux dernières, au moyen de la première, elles deviennent, en divisant par $\frac{dt}{dx}$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2k^2\left(Q-P\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{dt}{dx}\right)^2$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}=2k^2\left(R-P\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dt}{dx}\right)^2;$$

mais, dans l'hypothèse actuelle, l'équation (13) devient

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2=(w^2+4k^2u)\left(\frac{dt}{dx}\right)^2;$$

éliminant donc $\left(\frac{dt}{dx}\right)^2$ des deux précédentes, au moyen de cette dernière, on obtiendra, pour les deux équations différentielles de la trajectoire décrite,

$$\left.\begin{aligned}(w^2+4k^2u)\frac{d^2y}{dx^2}&=2k^2\left(Q-P\frac{dy}{dx}\right)\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\},\\(w^2+4k^2u)\frac{d^2z}{dx^2}&=2k^2\left(R-P\frac{dz}{dx}\right)\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\};\end{aligned}\right\}\ (27)$$

mais il sera communément plus simple de recourir aux équations (16).

Dans un prochain article, nous nous occuperons proprement du phénomène du mirage.

DYNAMIQUE.

Solution d'un problème de dynamique ;

Par M. Le Barbier.

PROBLÈME. *Un tube cylindrique rectiligne, d'une longueur indéfinie, est lié d'une manière invariable à un axe horizontal fixe, auquel il est perpendiculaire, de telle sorte que l'axe de rotation passe par l'axe du tube qui se trouve ainsi contraint de se mouvoir, comme une lunette méridienne, dans un plan vertical fixe.*

On introduit dans l'intérieur de ce tube une sphère pesante, d'un diamètre égal au sien, dont le centre de gravité coïncide avec son centre de figure, qui, de la sorte, se trouve constamment dans l'axe du tube.

On suppose que ce tube est contraint à tourner d'un mouvement uniforme sur l'axe horizontal fixe qui le supporte, et l'on demande de déterminer les circonstances du mouvement du centre de la sphère dans le plan vertical, en faisant d'ailleurs abstraction de la résistance de l'air et du frottement ?

Solution. Rien n'étant plus aisé que de combiner le mouvement de rotation uniforme de l'axe du tube avec le mouvement varié du centre de la sphère, le long de cet axe supposé fixe, occupons-nous d'abord uniquement de ce dernier.

Par le centre du mouvement, et à droite de ce centre, soit menée, dans le plan vertical fixe que doit parcourir l'axe du tube, une horizontale indéfinie ; la position initiale de cet axe sera déterminée par l'angle que fera alors sa direction avec l'horizontale;

angle que nous désignerons par α et que nous mesurerons constamment au-dessus de cette horizontale, et de droite à gauche. Nous n'aurons jamais besoin d'ailleurs de le supposer plus grand que deux angles droits, puisque, si cela arrivait, nous pourrions lui substituer l'angle que formerait, avec l'horizontale, le prolongement de l'axe du tube au-delà du centre du mouvement.

Supposons qu'à l'origine des temps, le centre de la sphère mobile soit à une distance R du centre du mouvement et qu'on lui ait imprimé, suivant l'axe du tube, une vîtessse V, positive ou négative, suivant que sa projection sur l'horizontale sera elle-même positive ou négative. Soit enfin T la durée d'une révolution du tube sur son axe.

Durant l'intervalle de temps t, l'axe du tube décrira dans le plan vertical fixe un angle $2\varpi\frac{t}{T}$; de sorte que si l'on suppose, pour fixer les idées, que son mouvement tende à faire croître l'angle α, cet angle sera, à l'époque t, $\alpha+2\varpi\frac{t}{T}$.

Soit g la gravité, seule force accélératrice du système ; si l'on décompose cette force en deux autres, l'une perpendiculaire à l'axe du tube et l'autre dans le sens de cet axe, le mouvement de rotation du tube étant tout à fait déterminé, indépendamment de la pesanteur, la première de ces deux composantes sera détruite, et la seconde aura seule son plein effet ; or, cette dernière a évidemment pour expression $g\text{Sin.}\left(\alpha+2\varpi\frac{t}{T}\right)$; en désignant donc par r la distance variable du centre de la sphère mobile au centre du mouvement, on aura

$$\frac{d^2r}{dt^2}=-g\text{Sin.}\left(\alpha+2\varpi\frac{t}{T}\right). \qquad (1)$$

Nous donnons ici le signe *moins* au second membre, attendu que, dans le cas $t=0$, la gravité tend à diminuer la distance r.

On voit donc que la force accélératrice, suivant l'axe du tube, est à la fois variable et périodique ; elle sera nulle, quel que soit le nombre entier n, toutes les fois qu'on aura

$$\alpha+2\varpi\frac{t}{T}=n\varpi\,,\qquad \text{d'où}\qquad t=\frac{T(n\varpi-\alpha)}{2\varpi}\;;$$

elle atteindra sa plus grande valeur négative, toutes les fois qu'on aura

$$\alpha+2\varpi\frac{t}{T}=\frac{(4n+1)\varpi}{2}\,,\qquad \text{d'où}\qquad t=\frac{T\{(4n+1)\varpi-2\alpha\}}{4\varpi}\;;$$

et cette valeur positive sera $-g$; elle atteindra enfin sa plus grande valeur lorsqu'on aura

$$\alpha+2\varpi\frac{t}{T}=\frac{(4n+3)\varpi}{2}\,,\qquad \text{d'où}\qquad t=\frac{T\{(4n+3)\varpi-2\alpha\}}{4\varpi}\;;$$

et cette valeur sera $+g$.

Si l'on intègre une première fois l'équation (1), en se rappelant que V est la vîtesse initiale du centre de la sphère mobile, et qu'on représente par v la vîtesse de ce centre, suivant l'axe du tube à l'époque t, on aura

$$v=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\left(V-\frac{gT}{2\varpi}\operatorname{Cos.}\alpha\right)+\frac{gT}{2\varpi}\operatorname{Cos.}\left(\alpha+2\varpi\frac{T}{t}\right).\qquad(2)$$

Ainsi la vîtesse du centre de la sphère mobile, suivant l'axe du tube, tout comme la force accélératrice, sera à la fois variable et périodique.

Pour que cette vîtesse soit nulle, il faudra qu'on ait

$$\left(V-\frac{gT}{2\varpi}\operatorname{Cos.}\alpha\right)+\frac{gT}{2\varpi}\operatorname{Cos.}\left(\alpha+2\varpi\frac{t}{T}\right)=0\;;\qquad(3)$$

ce qui donnera

$$t = \frac{T}{2\varpi}\left\{ \text{Arc.}\left[\text{Cos.} = \left(\text{Cos.}\alpha - \frac{2\varpi}{T}\cdot\frac{V}{g}\right)\right] - \alpha \right\} :$$

Ces époques seront aussi évidemment celles des *maxima* et *minima* de la distance r ; mais , pour que ces époques soient réelles, encore faudra-t-il que

$$\text{Cos.}\alpha - \frac{2\varpi}{T}\cdot\frac{V}{g}$$

soit compris entre $+1$ et -1 , ou, ce qui revient au même, que V soit compris entre les deux limites

$$\pm\frac{gT}{2\varpi}(1\mp\text{Cos.}\alpha) .$$

Quant aux époques des *maxima* et des *minima* de la vîtesse v , elles seront les mêmes que celles pour lesquelles on aura $\frac{dv}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2} = 0$; c'est-à-dire , comme nous l'avons vu ci-dessus , celles où on aura

$$\alpha + 2\varpi\frac{t}{T} = n\varpi ;$$

ce qui donnera (2)

$$v = \left(V - \frac{gT}{2\varpi}\text{Cos.}\alpha\right) \pm \frac{gT}{2\varpi} = V \pm \frac{gT}{2\varpi}(1\mp\text{Cos.}\alpha) .$$

On voit par là que , si V est positif , il y aura toujours des époques où le centre de la sphère mobile ira en s'éloignant du centre du mouvement dans le sens de V, et il en sera même toujours ainsi , si l'on a

$$V > \frac{gT}{2\varpi}(1+\text{Cos.}\alpha) .$$

Si, au contraire, V est négatif, il y aura toujours des époques où le centre de la sphère mobile s'éloignera du centre du mouvement, dans le sens de V, et il en sera même toujours ainsi, dans ce cas, si l'on a

$$V > \frac{gT}{2\varpi}(1-\text{Cos.}\alpha) ;$$

Si V étant positif, on avait

$$V = \frac{gT}{2\varpi}(1+\text{Cos.}\alpha) ,$$

ou bien si, V étant négatif, on avait

$$V = \frac{gT}{2\varpi}(1-\text{Cos.}\alpha) ,$$

le minimum de vîtesse dans le sens de V se réduirait à une vîtesse nulle.

En intégrant de nouveau l'équation (2), et se rappelant qu'à $t=0$ doit répondre $r=R$, on trouvera

$$r = \left(R - \frac{gT^2}{4\varpi^2}\text{Sin.}\alpha\right) + \left(V - \frac{gT}{2\varpi}\text{Cos.}\alpha\right)t + \frac{gT^2}{4\varpi^2}\text{Sin.}\left(\alpha + 2\varpi\frac{t}{T}\right) ; \quad (4)$$

d'où l'on voit que la valeur de r se compose de trois parties, savoir: une partie constante, une autre qui croît indéfiniment avec le temps, et enfin une troisième qui est périodique. Il suit de là qu'en général on pourra toujours assigner une époque à laquelle le centre de la sphère mobile sera aussi éloigné qu'on le voudra du centre du mouvement.

Nous disons *en général*, car, si l'on avait

$$V = \frac{gT}{2\varpi}\text{Cos.}\alpha ,$$

ce qui ne peut arriver lorsqu'il n'y a point de vîtesse initiale ; qu'autant que le tube part de la direction verticale ; la valeur de r se réduisant alors simplement à

$$r=\left(R-\frac{gT^2}{4\varpi^2}\,\text{Sin}.\alpha\right)+\frac{gT^2}{4\varpi^2}\,\text{Sin}.\left(\alpha+2\varpi\frac{t}{T}\right), \quad (5)$$

et étant conséquemment périodique, elle se trouverait ainsi comprise entre les deux limites

$$r=\left(R-\frac{gT^2}{4\varpi^2}\,\text{Sin}.\alpha\right)\pm\frac{gT^2}{4\varpi^2}=R\pm\frac{gT^2}{4\varpi^2}(1\mp\text{Sin}.\alpha)\ ;$$

d'où l'on voit que le centre de la sphère mobile demeurerait alors constamment d'un même côté du centre du mouvement, si R étant positif on avait

$$R>\frac{gT^2}{4\varpi^2}(1+\text{Sin}.\alpha)\ ,$$

ou bien si, R étant négatif, on avait

$$R>\frac{gT^2}{4\varpi^2}(1-\text{Sin}.\alpha)\ .$$

Si, dans la même hypothèse, on voulait connaître les époques où le centre de la sphère mobile passera par le centre du mouvement, il ne s'agirait que de poser $r=0$ dans l'équation (5), et de la résoudre ensuite par rapport à t ; ce qui donnerait

$$t=\frac{T}{2\varpi}\left\{\text{Arc.}\left[\text{Sin.}=\left(\text{Sin}.\alpha-\frac{4\varpi^2}{T^2}\cdot\frac{R}{g}\right)\right]-\alpha\right\}\ ;$$

mais encore faudrait-il, pour que ces époques fussent réelles, que

$$\text{Sin}.\alpha-\frac{4\varpi^2}{T^2}\cdot\frac{R}{g}\ ,$$

fût compris entre les limites $+1$ et -1, ou, ce qui revient au même, que R fût compris entre ces deux-ci :

$$\pm\frac{gT^2}{4\varpi^2}(1\pm\text{Sin}\,\alpha)\ ;$$

ce qui concorde exactement avec ce qui vient d'être dit ci-dessus.

Si, pour le cas général, on se demandait les époques où le centre de la sphère mobile passera par le centre du mouvement, il faudrait, dans l'équation (4), poser $r=0$, et la résoudre ensuite par rapport à t; et l'on voit qu'on aurait ainsi à résoudre un problème du même genre que le problème de Képler, puisque t entre à la fois, dans cette équation, algébriquement et sous le signe sinus.

Il sera plus aisé, dans le cas général, de connaître les *maxima* et *minima* de la distance r; il suffira en effet, pour cela, d'introduire dans la formule (4) la valeur de $V-\frac{gT}{2\varpi}$ donnée par l'équation (5); ce qui donnera

$$r=\left(R-\frac{gT^2}{4\varpi^2}\text{Sin}.\alpha\right)-\frac{gT}{2\varpi}\left\{t\text{Cos}.\left(\alpha+2\varpi\frac{t}{T}\right)-\frac{T}{2\varpi}\text{Sin}.\left(\alpha+2\varpi\frac{t}{T}\right)\right\}.$$

Si l'on prend pour pôle le centre du mouvement, et que l'on représente par θ l'angle que fait le rayon vecteur avec l'horizontale menée dans le plan vertical fixe, par le centre du mouvement, on aura

$$\theta=\alpha+2\varpi\frac{t}{T}\ ,\qquad \text{d'où}\qquad t=\frac{T(\theta-\alpha)}{2\varpi}\ ;$$

substituant donc cette valeur dans l'équation (4), on obtiendra pour l'équation polaire de la trajectoire décrite par le centre de la sphère mobile dans le plan vertical fixe,

$$r = \left(R - \frac{gT^2}{4\varpi^2}\,\text{Sin.}\alpha\right) + \left(V - \frac{gT}{2\varpi}\,\text{Cos.}\alpha\right)\frac{T(\theta-\alpha)}{2\varpi} + \frac{gT^2}{4\varpi^2}\,\text{Sin.}\theta \;;$$

équation qui servira à construire la courbe par points, et de laquelle on conclurait aisément l'équation en coordonnées rectangulaires.

Ces résultats deviennent plus simples lorsqu'on suppose que le tube part de la direction verticale et que la sphère mobile n'a reçu aucune impulsion ; on a alors $V = 0$, $\alpha = \frac{1}{2}\varpi$, d'où $\text{Sin.}\alpha = 1$ et $\text{Cos.}\alpha = 0$; en conséquence on trouve, d'abord pour la force accélératrice,

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -g\,\text{Sin.}\,\frac{2\varpi t}{T} \;;$$

cette force accélératrice sera nulle, et conséquemment la vîtesse du centre de la sphère mobile aura atteint son maximum ou son minimum, lorsqu'on aura $t = \frac{nT}{2}$, c'est-à-dire à chaque demi-révolution ; on trouvera ensuite, pour la vîtesse du mobile, à l'époque t,

$$v = \frac{gT}{2\varpi}\,\text{Cos.}\,\frac{2\varpi}{T} \;;$$

cette vîtesse sera nulle, et conséquemment le rayon vecteur r atteindra son maximum ou son minimum, lorsqu'on aura $t = \frac{(2n+1)T}{4}$, c'est-à-dire, toutes les fois que le tube parviendra à la situation horizontale. Si, dans cette valeur de v, on fait $t = \frac{nT}{2}$, on aura pour le maximum et le minimum de vîtesse, répondant à la situation verticale du tube,

$$v = \pm\frac{gT}{2\varpi}\,.$$

On trouvera enfin, dans la même hypothèse,

$$r=R-\frac{gT^2}{4\varpi^2}\left(1-\frac{\mathrm{Sin}.2\varpi t}{T}\right), \qquad (6)$$

on conclura de là les plus grandes et les moindres valeurs de r, en y mettant pour t la valeur $\frac{(2n+1)T}{4}$ qui répond aux *maxima* et *minima*, ce qui donnera

$$r=R-\frac{gT^2}{4\varpi^2}(1\pm1)$$

c'est-à-dire,

$$r=R\,, \qquad r=R-\frac{gT^2}{2\varpi^2}\,,$$

de sorte que le centre de la sphère mobile passera ou ne passera pas par le centre du mouvement, suivant que $\frac{gT^2}{2\varpi^2}$ sera plus grand ou plus petit que R. Quant aux époques de ces passages, on les trouvera en résolvant l'équation (6) par rapport à t, après y avoir fait $r=0$, ce qui donnera

$$t=\frac{T}{2\varpi}\left\{\mathrm{Arc.}\left[\mathrm{Sin.}=\left(1+\frac{4\pi^2R}{gT}\right)\right]\right\}.$$

Ajoutons que, dans le cas actuel, l'équation polaire de la trajectoire se réduira simplement à

$$r=R-\frac{gT^2}{4\pi^2}(1-\mathrm{Sin}.\theta)=R-\frac{gT^2}{2\varpi^2}\mathrm{Cos}.^2\left(\tfrac{1}{4}\varpi+\tfrac{1}{2}\theta\right).$$

Il est entendu que, dans tout ce qui précède, on doit supposer le diamètre de la sphère mobile assez petit, pour qu'on puisse se dispenser d'avoir égard aux momens d'inertie.

ANALYSE ALGÉBRIQUE.

Démonstration d'un théorème sur les fractions continues périodiques ;

Par M. Evariste Galois, élève au Collége de Louis-le-Grand.

On sait que si, par la méthode de Lagrange, on développe en fraction continue une des racines d'une équation du second degré, cette fraction continue sera périodique, et qu'il en sera encore de même de l'une des racines d'une équation de degré quelconque, si cette racine est racine d'un facteur rationnel du second degré du premier membre de la proposée, auquel cas cette équation aura, tout au moins, une autre racine qui sera également périodique. Dans l'un et dans l'autre cas, la fraction continue pourra d'ailleurs être immédiatement périodique ou ne l'être pas immédiatement, mais, lorsque cette dernière circonstance aura lieu, il y aura du moins une des transformées dont une des racines sera immédiatement périodique.

Or, lorsqu'une équation a deux racines périodiques, répondant à un même facteur rationnel du second degré, et que l'une d'elles est immédiatement périodique, il existe entre ces deux racines une relation assez singulière qui paraît n'avoir pas encore été remarquée, et qui peut être exprimée par le théorème suivant :

THÉORÈME. Si une des racines d'une équation de degré quelconque est une fraction continue immédiatement périodique, cette équation aura nécessairement une autre racine également périodique

que l'on obtiendra en divisant l'unité négative par cette même fraction continue périodique, écrite dans un ordre inverse.

Démonstration. Pour fixer les idées, ne prenons que des périodes de quatre termes ; car la marche uniforme du calcul prouve qu'il en serait de même si nous en admettions un plus grand nombre. Soit une des racines d'une équation de degré quelconque exprimée comme il suit :

$$x=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\dotsb}}}}}}}\;;$$

l'équation du second degré, à laquelle appartiendra cette racine et qui contiendra conséquemment sa corrélative, sera

$$x=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{x}}}}\;;$$

or, on tire de là successivement

$$a-x=-\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{x}}}}\,,\qquad \frac{1}{a-x}=-\left(b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{x}}}\right.\,,$$

$$b+\frac{1}{a-x}=-\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{x}}}\,;\qquad \cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a-x}}=-\left(c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{x}}\right.\,,$$

$$c+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a-x}}=-\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{x}}\,,\qquad \cfrac{1}{c+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a-x}}}=-\left(d+\frac{1}{x}\right.\,,$$

$$d+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a-x}}}=-\frac{1}{x}, \quad \cfrac{1}{d+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a-x}}}}=-x,$$

c'est-à-dire,

$$x=-\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a-x}}}};$$

c'est donc toujours là l'équation du second degré qui donne les deux racines dont il s'agit ; mais en mettant continuellement pour x, dans son second membre, ce même second membre qui en est en effet la valeur, elle donne

$$x=-\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+\ldots}}}}}}}};$$

c'est donc là l'autre valeur de x, donnée par cette équation ; valeur qui, comme l'on voit, est égale à -1 divisé par la première.

Dans ce qui précède nous avons supposé que la racine proposée était plus grande que l'unité; mais, si l'on avait

$$x=\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\ldots}}}}}}}},$$

on en conclurait, pour une des valeurs de $\frac{1}{x}$,

$$\frac{1}{x}=a+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\dots\dots.$$

l'autre valeur de $\frac{1}{x}$ serait donc, par ce qui précède,

$$\frac{1}{x}=-\frac{1}{d}+\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}+\frac{1}{d}+\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}+\dots\dots,$$

d'où on conclurait, pour l'autre valeur de x,

$$x=-(d+\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}+\frac{1}{d}+\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}+\dots\dots$$

ou

$$x=-\cfrac{1}{\frac{1}{d}+\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}+\frac{1}{d}+\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}};$$

ce qui rentre exactement dans notre théorème.

Soit A une fraction continue, immédiatement périodique quelconque, et soit B la fraction continue qu'on en déduit en renversant la période ; on voit que, si l'une des racines d'une équation est $x=A$, elle aura nécessairement une autre racine $x=-\frac{1}{B}$; or, si A est un nombre positif plus grand que l'unité, $-\frac{1}{B}$ sera négatif et compris entre o et -1; et, à l'inverse, si A est un nombre négatif compris entre o et -1, $-\frac{1}{B}$ sera un nombre positif plus grand que l'unité. Ainsi, lorsque l'une des racines d'une équation du second degré est une fraction continue immédiatement périodique, plus grande que l'unité, l'autre est nécessairement comprise entre o et -1, et réciproquement si l'une d'elles est comprise entre o et -1, l'autre sera nécessairement positive et plus grande que l'unité.

On peut prouver que, réciproquement, si l'une des deux racines d'une équation du second degré est positive, est plus grande que l'unité, et que l'autre soit comprise entre o et -1, ces racines seront exprimables en fractions continues immédiatement périodiques. En effet, soit toujours A une fraction continue immédiatement périodique quelconque, positive et plus grande que l'unité, et B la fraction continue immédiatement périodique qu'on en déduit, en renversant la période, laquelle sera aussi, comme elle, positive et plus grande que l'unité. La première des racines de la proposée ne pourra être de la forme $x=p+\frac{1}{A}$, car alors, en vertu de notre théorème, la seconde devrait être $x=a+\cfrac{1}{-\frac{1}{B}}=a-B$; or, $a-B$ ne saurait être compris entre o et -1 qu'autant que la partie entière de B serait égale à p; auquel cas, la première valeur serait immédiatement périodique. On ne pourrait avoir davantage, pour la première valeur de x, $x=p+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{A}}$, car alors l'autre serait $x=p+\frac{1}{q-B}$ ou $x=p-\frac{1}{B-q}$; or, pour que cette valeur fût comprise entre o et -1, il faudrait d'abord que $\frac{1}{B-q}$ fût égal à p plus une fraction ; il faudrait donc que $B-q$ fût plus petit que l'unité, ce qui exigerait que B fût égal à q, plus une fraction ; d'où l'on voit que q et p devraient être respectivement égaux aux deux premiers termes de la période qui répond à B ou aux deux derniers de la période qui répond à A ; de sorte que, contrairement à l'hypothèse, la valeur $x=p+\frac{1}{q}+\frac{1}{A}$ serait immédiatement périodique. On prouverait, par un raisonnement analogue, que les périodes ne sauraient être précédées d'un plus grand nombre de termes n'en faisant pas partie.

Lors donc qu'on traitera une équation numérique par la méthode de Lagrange, on sera sûr qu'il n'y a point de racines périodiques à espérer tant qu'on ne rencontrera pas une transformée ayant au moins une racine positive plus grande que l'unité, et une autre comprise entre o et -1 ; et si, en effet, la racine que l'on poursuit doit être périodique, ce sera tout au plus à cette transformée que les périodes commenceront.

Si l'une des racines d'une équation du second degré est non seulement immédiatement périodique mais encore symétrique, c'est-à-dire, si les termes de la période sont égaux à égale distance des extrêmes, on aura $B=A$; de sorte que ces deux racines seront A et $-\frac{1}{A}$; l'équation sera donc

$$Ax^2-(A^2-1)x-A=0\ .$$

Réciproquement, toute équation du second degré de la forme

$$ax^2-bx-a=0\ ,$$

aura ses racines à la fois immédiatement périodiques et symétriques. En effet, en mettant tour à tour pour x l'infini et -1, on obtient des résultats positifs, tandis qu'en faisant $x=1$ et $x=0$; on obtient des résultats négatifs; d'où l'on voit d'abord que cette équation a une racine positive plus grande que l'unité et une racine négative comprise entre o et -1, et qu'ainsi ces racines sont immédiatement périodiques; de plus, cette équation ne change pas en y changeant x en $-\frac{1}{x}$; d'où il suit que si A est une de ses racines l'autre sera $-\frac{1}{A}$, et qu'ainsi, dans ce cas, $B=A$.

Appliquons ces généralités à l'équation du second degré

$$3x^2-16x+18=0\ ;$$

on lui trouve d'abord une racine positive comprise entre 3 et 4; en posant

$$x=3x+\frac{1}{y}\ ;$$

on obtient la transformée

$$3y^2-2y-3=0\ ,$$

dont la forme nous apprend que les valeurs de y sont à la fois immédiatement périodiques et symétriques; en effet, en posant, tour à tour,

$$y=1+\frac{1}{z}\ ,\quad z=2+\frac{1}{t}\ ,\quad t=1+\frac{1}{u}\ ,$$

on obtient les transformées

$$2z^2-4z-3=0\ ,$$

$$3t^2-4t-2=0\ ,$$

$$3u^2-2u-3=0\ ,$$

l'identité entre les équations en u et en y prouve que la valeur positive de y est

$$y=-\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\ldots}}}}}$$

sa valeur négative sera donc

$$y=-\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\ldots}}}}}}$$

les deux valeurs de x seront donc

$$x=3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\ldots}}}}}}\qquad x=3-\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\ldots}}}}}}$$

dont la dernière, en vertu de la formule connue

$$p-\frac{1}{q}=p-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{q-1}},$$

devient

$$x=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\ldots}}}}}}}}}\ (*)$$

(*) On trouve diverses recherches sur le même sujet, dans le présent recueil, tom. IX, pag. 261, tom. XIV, pag. 324 et 337.

J. D. G.

GÉOMÉTRIE DE SITUATION.

Théorèmes sur les polaires successives ;

Par M. Bobillier, professeur à l'école des arts et métiers de Châlons-sur-Marne.

Soient

$$M=0\ ,\quad M_1=0\ ,\quad M_2=0\ ,\ \dots\dots\ M_{m-n}=0\ ,\ \dots\dots\ M_n=0$$

les équations d'une suite de courbes des $m.^{ieme}$, $(m-1)^{ieme}$, $(m-1)^{ieme}$, ..., $(m-n)^{ieme}$, ... $n.^{ieme}$ degrés, dont la première seule soit arbitraire, et dont chacune soit, par rapport à celle qui la précède immédiatement, considérée comme directrice, la *courbe polaire* d'un point donné (x',y') ; ces courbes sont ce que nous appelerons les *polaires successives* de ce point, par rapport à cette directrice, et nous les désignerons sous les dénominations de $1.^{iere}$, $2.^{ieme}$, $3.^{ieme}$, ... $(m-n)^{ieme}$, ... $n.^{ieme}$ polaires du point (x',y').

D'après un théorème précédemment démontré (pag. 106), nous aurons

$$M_1=\quad mM-\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}(x-x')-\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}y}(y-y')\ ,$$

$$M_2=(m-1)M_1-\frac{\mathrm{d}M_1}{\mathrm{d}x}(x-x')-\frac{\mathrm{d}M_1}{\mathrm{d}y}(y-y')\ ,$$

$$M_3=(m-2)M_2-\frac{\mathrm{d}M_2}{\mathrm{d}x}(x-x')-\frac{\mathrm{d}M_2}{\mathrm{d}y}(y-y')\ ,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\ ,$$

$$M_n=(m-n+1)M_{n-1}-\frac{\mathrm{d}M_{n-1}}{\mathrm{d}x}(x-x')-\frac{\mathrm{d}M_{n-1}}{\mathrm{d}y}(y-y').$$

A l'aide de cette suite d'équations, il nous sera facile, par des différentiations et substitutions successives d'obtenir tour à tour les valeurs de M_2, M_3, ... M_n, en fonction de M, en égalant la dernière à zéro, et posant, pour abréger,

$$1.2.3.........k=k!$$

nous trouverons, pour l'équation de la n.$^{\text{ième}}$ polaire du point (x',y'), par rapport à la directrice $M=0$,

$$0=\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{m!}{n!}M \\[2ex]
-\dfrac{(m-1)!}{(n-1)!}\left\{\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}\,\dfrac{(x-x')}{1}+\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}y}\,\dfrac{(y-y')}{1}\right\} \\[2ex]
+\dfrac{(m-2)!}{(n-2)!}\left\{\dfrac{\mathrm{d}^2M}{\mathrm{d}x^2}\,\dfrac{(x-x')^2}{1.2}+\dfrac{\mathrm{d}^2M}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\,\dfrac{(x-x')}{1}\,\dfrac{(y-y')}{1}+\dfrac{\mathrm{d}^2M}{\mathrm{d}y^2}\,\dfrac{(y-y')^2}{1.2}\right\} \\[2ex]
-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\[2ex]
\pm\dfrac{(m-n)!}{1}\left\{\dfrac{\mathrm{d}^nM}{\mathrm{d}x^n}\,\dfrac{(x-x')^n}{n!}+\dfrac{\mathrm{d}^nM}{\mathrm{d}x^{n-1}\mathrm{d}y}\,\dfrac{(x-x')^{n-1}}{(n-1)!}\,\dfrac{(y-y')}{1}+\ldots\ldots+\dfrac{\mathrm{d}^nM}{\mathrm{d}y^n}\,\dfrac{(y-y')^n}{n!}\right\}
\end{array}\right\}.$$

Supposons que le point (x',y') étant indéterminé, on veuille le déterminer de telle sorte que cette polaire passe par un point donné (x'',y''), il faudra pour cela exprimer que l'équation ci-dessus est satisfaite en changeant simultanément x et y en x'' et y''. Changeant ensuite respectivement x' et y' en x et y, on trouvera pour l'équation du lieu du point (x',y')

$$
(\mathrm{P})\quad 0=\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{m!}{n!}M'' \\[2ex]
+\dfrac{(m-1)!}{(n-1)!}\left\{\dfrac{\mathrm{d}M''}{\mathrm{d}x''}\dfrac{(x-x'')}{1}+\dfrac{\mathrm{d}M''}{\mathrm{d}y''}\dfrac{(y-y'')}{1}\right\} \\[2ex]
+\dfrac{(m-2)!}{(n-2)!}\left\{\dfrac{\mathrm{d}^2M''}{\mathrm{d}x''^2}\dfrac{(x-x'')^2}{1.2}+\dfrac{\mathrm{d}^2M''}{\mathrm{d}x''\mathrm{d}y''}\dfrac{(x-x'')}{1}\dfrac{(y-y'')}{1}+\dfrac{\mathrm{d}^2M''}{\mathrm{d}y''^2}\dfrac{(y-y'')^2}{1.2}\right\} \\[2ex]
+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\[2ex]
+\dfrac{(m-n)!}{1}\left\{\dfrac{\mathrm{d}^nM''}{\mathrm{d}x''^n}\dfrac{(x-x'')^n}{n!}+\dfrac{\mathrm{d}^nM''}{\mathrm{d}x''^{n-1}\mathrm{d}y''}\dfrac{(x-x'')^{n-1}}{(n-1)!}\dfrac{(y-y'')}{1}+\ldots\ldots+\dfrac{\mathrm{d}^nM''}{\mathrm{d}y''^n}\dfrac{(y-y'')^n}{n!}\right\}
\end{array}\right.
$$

Si, présentement, on représente généralement par u_k une fonction homogène du $k.^{ieme}$ degré en x et y, toute courbe du $m.^{ieme}$ degré aura une équation de la forme

$$u_0+u_1+u_2+\ldots\ldots\ldots+u_n+\ldots\ldots\ldots+u_m=0\ .$$

Si l'on cherche les polaires successives de l'origine, par rapport à cette courbe prise pour directrice, au moyen des considérations exposées à la pag. 89 du précédent volume, on trouvera facilement, pour l'équation de la $(m-n)^{ieme}$ polaire,

$$\frac{m!}{n!}u_0+\frac{(m-1)!}{(n-1)!}u_1+\frac{(m-2)!}{(n-2)!}u_2+\ldots\ldots\ldots+\frac{(m-n)!}{1}u_n=0\ .$$

En conséquence, pour obtenir l'équation de la $(m-n)^{ieme}$ polaire d'un point (x'',y''), relativement à la directrice $M=0$, il faudra d'abord transporter l'origine en ce point, en changeant respectivement dans M, x et y en $x+x''$ et $y+y''$, et développer ; puis dans le développement multiplier respectivement les termes de 0, 1, 2,...... n dimensions par

$$\frac{m!}{n!}\,,\quad \frac{(m-1)!}{(n-1)!}\,,\quad \frac{(m-2)!}{(n-2)!}\,,\,\ldots\ldots\ldots\,\frac{(m-n)!}{1}\,,$$

et supprimer tous ceux de dimensions plus élevées ; après quoi, il faudra remplacer respectivement x et y par $x-x''$ et $y-y''$, afin de retourner à l'origine primitive. Or, il est visible que l'équation résultante ne sera autre chose que l'équation (P) ci-dessus. En invoquant donc le principe de dualité, on obtiendra les deux théorèmes que voici :

THÉORÈME I. Si, par rapport à une même directrice du $(\mathrm{p}+\mathrm{q})^{\text{ieme}}$ *degré, on détermine la* p^{ieme} *polaire d'un point* P *et la* $\mathrm{q}.^{\text{ieme}}$ *polaire d'un point* Q, *et que l'un quelconque de ces deux points ait été choisi sur la polaire de l'autre, ce dernier point se trouvera réciproquement sur la polaire du premier* (*).

THÉORÈME I. Si, par rapport à une même directrice de $(\mathrm{p}+\mathrm{q})^{\text{ieme}}$ *classe, on détermine la* $\mathrm{p}.^{\text{ieme}}$ *polaire d'une droite* P *et la* $\mathrm{q}.^{\text{ieme}}$ *polaire d'une droite* Q, *et que l'une quelconque de ces deux droites ait été choisie tangente à la polaire de l'autre, cette dernière droite se trouvera réciproquement tangente à la polaire de la première.*

Si l'on fait $p=m-1$ et $q=1$, on retombe sur le théorème de la pag. 157 du précédent volume, qui n'est ainsi qu'un cas très-particulier de celui-ci.

Au moyen de ces deux théorèmes, on pourra résoudre les deux problèmes que voici :

PROBLÈME I. Trouver, sur le plan d'une directrice donnée du $\mathrm{m}.^{\text{ieme}}$ *degré, un point dont la*

PROBLÈME I. Trouver, sur le plan d'une directrice donnée de $\mathrm{m}.^{\text{ieme}}$ *classe, une droite dont*

(*) M. Plucker nous a adressé postérieurement, sans démonstration, un théorème tout à fait analogue.

J. D. G.

n.^{ieme} *polaire, relative à cette directrice, passe par deux points donnés ?*

Si, en effet, on détermine, par rapport à la directrice proposée, les $(m-n)^{iemes}$ polaires des deux points donnés, il résulte de notre théorème que les $n.^{iemes}$ polaires de leurs intersections, relatives à la même directrice, passeront par les deux points donnés. Et, comme les $(m-n)^{iemes}$ polaires des deux points donnés seront l'une et l'autre du $n.^{ieme}$ degré, le problème aura n^2 solutions.

la n.^{ieme} *polaire, relative à cette directrice, touche deux droites données ?*

Si, en effet, on détermine, par rapport à la directrice proposée, les $(m-n)^{iemes}$ polaires des deux droites données, il résulte de notre théorème que les $n.^{iemes}$ polaires de leurs tangentes communes, relatives à la même directrice, toucheront les deux droites données. Et, comme les $(m-n)^{iemes}$ polaires des deux droites données seront l'une et l'autre de $n.^{ieme}$ classe, le problème aura n^2 solutions.

En appliquant aux fonctions de trois variables x, y, z les considérations qui nous ont guidés dans ce qui précède, on parviendra, sans autre peine que celle d'écrire des développemens, à établir les deux théorèmes que voici :

THÉORÈME II. Si, par rapport à une même surface directrice du (p+q)^{ieme} *degré, on détermine la* p.^{ieme} *polaire d'un point* P *et la* q.^{ieme} *polaire d'un point* Q, *et que l'un quelconque de ces deux points ait été choisi sur la polaire de l'autre, ce dernier point se trouvera réciproquement sur la polaire du premier.*

THÉORÈME II. Si, par rapport à une même surface directrice de (p+q)^{ieme} *classe, on détermine la* p.^{ieme} *polaire d'un plan* P *et la* q^{ieme} *polaire d'un plan* Q, *et que l'un quelconque de ces deux plans ait été choisi tangent à la polaire de l'autre, ce dernier plan se trouvera réciproquement tangent à la polaire du premier.*

Si l'on fait $p=m-1$ et $q=1$, on retombe sur le théorème de la pag. 164 du précédent volume, qui n'est ainsi qu'un cas très-particulier de celui-ci.

Au moyen de ces deux théorèmes, on pourra résoudre les deux problèmes que voici :

PROBLÈME II. Une surface directrice du m.^{ieme} *degré étant donnée, trouver, dans l'espace, un point dont la* n.^{ieme} *polaire, relative à cette surface, passe par trois points donnés?*

Si, en effet, on détermine, par rapport à la surface directrice proposée, les $(m-n)^{iemes}$ polaires des trois points donnés, il résulte de notre théorème que les $n.^{iemes}$ polaires de leurs intersections, relatives à la même directrice, passeront par les trois points donnés. Et, comme les $(m-n)^{iemes}$ polaires des trois points donnés seront toutes trois du $n.^{ieme}$ degré, le problème aura n^3 solutions.

PROBLÈME II. Une surface de m.^{ieme} *classe étant donnée, trouver, dans l'espace, un plan dont la* n.^{ieme} *polaire, relative à cette surface, touche trois plans donnés?*

Si, en effet, on détermine, par rapport à la surface directrice proposée, les $(m-n)^{iemes}$ polaires des trois plans donnés, il résulte de notre théorème que les $n.^{iemes}$ polaires de leurs plans tangens communs, relatives à la même directrice, toucheront les trois plans donnés. Et, comme les $(m-n)^{iemes}$ polaires des trois plans donnés seront toutes trois de $n.^{ieme}$ classe, le problème aura n^3 solutions.

Châlons, le 20 avril 1828.

MÉTÉOROLOGIE.

Résumé des observations barométriques, hygrométriques, thermométriques et magnétiques faites à Montpellier, en 1828;

Par M. GERGONNE.

LES observations météorologiques que je publie ici peuvent être considérées comme faisant suite à celles que j'ai publiées à la pag. 9 du présent volume; elles ont, en effet, été faites aux mêmes heures, avec les mêmes instrumens placés de la même manière; les observations barométriques ont subi les mêmes réductions, et les tableaux ont exactement la même forme: seulement, j'ai été assez heureux pour pouvoir mettre un peu plus d'assiduité dans celles-ci que dans les précédentes; tellement que, sur les 1464 observations de l'année, je n'en ai omis que 34 seulement; savoir: *cinq* de sept heures du matin, *quinze* de midi, *douze* de cinq heures du soir et *deux* de dix. Les époques des observations omises sont d'ailleurs assez distantes entre elles pour qu'il n'en résulte aucune erreur sensible sur la moyenne de chacun des douze mois de l'année.

§. I. BAROMÈTRE.

1.° *Tableau des moyennes barométriques.*

1828.	7 Heures.	Midi.	5 Heures.	10 Heures.	Moyennes.
Janvier.	763,41	763,73	763,62	763,73	763,62
Février.	756,88	755,66	755,40	755,98	755,98
Mars.	758,10	758,01	757,52	758,51	758,03
Avril.	757,54	756,70	756,57	757,07	756,97
Mai.	756,60	756,25	755,55	756,48	756,22
Juin.	759,81	759,18	758,40	759,40	759,20
Juillet.	756,33	756,30	754,97	756,24	755,96
Août.	758,43	757,89	756,79	757,88	757,75
Septembre.	759,55	759,63	758,88	759,63	759,42
Octobre.	761,46	761,27	760,80	761,44	761,24
Novembre.	759,93	760,12	759,60	760,24	759,97
Décembre.	763,88	763,49	763,47	763,56	763,60
Moyennes.	759,33	759,02	758,46	759,18	758,10

La moyenne barométrique à Montpellier, pour l'année 1828, est donc 758,10, au lieu de 758,39 qu'elle avait été pour 1827.

2.° *Tableau des mouvemens barométriques.*

1828.	Maxima.	Moyennes.	Minima.	Oscillations.
Janvier.	775,59	763,62	750,93	24,66
Février.	769,53	755,98	734,53	35,00
Mars.	766,28	758,03	749,90	16,38
Avril.	766,63	756,97	744,54	22,09
Mai.	762,27	756,22	747,38	14,89
Juin.	763,05	759,20	753,31	9,74
Juillet.	762,49	755,96	749,43	13,06
Août.	763,39	757,75	749,94	13,45
Septembre.	765,13	759,42	752,81	12,32
Octobre.	768,89	761,24	753,36	15,53
Novembre.	767,91	759,97	748,69	19,22
Décembre.	771,64	763,60	749,22	22,42
Maximum.	775,59	763,62	753,36	35,00
Moyenne.	766,90	758,10	748,67	18,23
Minimum.	762,27	755,96	734,53	9,74
Oscillations.	13,32	7,66	18,83	25,26

Ce tableau donne, pour le plus grand maximum, 771,64
Et pour le plus petit minimum, 734,53

Différence, 37,11.

Le sommet de la colonne de mercure a donc parcouru dans le tube une longueur de 37,11.

§. II. HYGROMÈTRE.

1.° *Tableau des moyennes hygrométriques.*

1828.	7 Heures.	Midi.	5 Heures.	10 Heures.	Moyennes.
Janvier.	83,7	83,5	83,4	83,9	83,6
Février.	79,5	78,9	79,0	79,0	79,1
Mars.	72,5	71,5	71,7	71,8	71,6
Avril.	76,1	75,7	75,8	76,3	76,0
Mai.	74,0	73,3	73,1	73,7	73,5
Juin.	60,7	60,1	58,5	59,9	59,8
Juillet.	67,1	65,2	65,3	66,4	66,0
Août.	63,6	62,7	65,8	63,0	63,8
Septembre	80,2	79,3	80,1	80,6	80,1
Octobre.	82,8	82,6	82,3	82,7	82,6
Novembre.	88,8	88,5	88,9	89,2	88,8
Décembre.	85,9	85,3	85,4	85,7	85,6
Moyennes	76,2	75,6	75,8	76,0	75,9

On voit donc qu'à Montpellier la moyenne hygrométrique, pour l'année 1828, a été 75,9, au lieu de 71,8 qu'elle avait été en 1827.

2.° *Tableau des mouvemens hygrométriques.*

1828.	Maxima.	Moyennes.	Minima.	Oscillations.
Janvier.	88,5	83.6	74,0	14,5
Février.	87,0	79.1	67,5	19.5
Mars.	82,5	71,6	56,5	26,0
Avril.	83,5	76,0	65,0	18,5
Mai.	83,0	73,5	62,5	20,5
Juin.	73,0	59,8	46,0	27,0
Juillet.	79,5	66,0	50,0	29 5
Août.	74,0	63,8	50,0	24.0
Septembre.	90,0	80,1	62,5	27,5
Octobre.	89,0	82,6	71,0	18,0
Novembre.	97,0	88,8	79,0	18,0
Décembre.	94,5	85,6	80,5	14,0
Maximum.	97,0	88,8	80,5	29,5
Moyenne.	85,1	75,9	63,7	21,4
Minimum.	73,0	63,8	46,0	14,0
Oscillations.	24,0	25,0	34,5	15,5

Ce tableau donne, pour le plus grand maximum,	97,0
Et pour le plus petit minimum,	46 0
Différence	51,0

Ainsi à Montpellier, pendant l'année 1828, l'aiguille de l'hygromètre a parcouru, sur la graduation, 51 divisions.

§. III. THERMOMÈTRE.

1.° *Tableau des moyennes thermométriques.*

1828.	7 Heures.	Midi.	5 Heures.	10 Heures.	Moyennes.
Janvier.	6,98	10,65	9,48	6,75	8,46
Février.	6,86	10,90	10,22	7,53	8,88
Mars.	8,28	13,75	12,67	9,87	11,14
Avril.	11,97	16,94	16,05	12,72	14,42
Mai.	17,46	21,09	20,43	17,03	19,00
Juin.	21,21	25,91	25,23	21,12	23,37
Juillet.	22,65	26,60	25,82	22,36	24,36
Août.	20,97	25,55	24,85	21,53	23,22
Septembre.	18,65	22,78	26,59	19,42	21,86
Octobre.	13,64	17,81	16,82	14,78	15,76
Novembre.	10,77	14,40	13,55	11,91	12,66
Décembre.	6,60	10,43	9,17	7,14	8,34
Moyennes.	13,84	18,07.	17,57	14,43	15,96

Ainsi, à Montpellier, la température moyenne de l'année 1828, a été 15°,96, un peu supérieure à la moyenne d'octobre.

2.° *Tableau des mouvemens thermométriques.*

1828.	Maxima.	Moyennes.	Minima.	Oscillations.
Janvier.	14,70	8,46	3,15	11,55
Février.	16,50	8,88	—0,50	17,00
Mars.	21,00	11,14	1,80	19,20
Avril.	24,05	14,42	7,25	16,80
Mai.	26,55	19,00	12,00	14,55
Juin.	28,75	23,37	17,20	11,55
Juillet.	31,30	24,36	16,40	14,90
Août	28,90	23,22	17,85	11,05
Septembre.	25,50	21,85	14,85	10,65
Octobre.	22,15	15,76	4,75	17,40
Novembre.	17,75	12,66	4,80	12,95
Décembre.	14,00	8,34	1,80	12,20
Maximum.	31,30	24,36	17,85	19,20
Moyenne.	22,60	15,96	8,45	14,15
Minimum.	14,00	8,34	—0,50	10,65
Oscillations.	17,30	16,02	18,35	8,55

Ce dernier tableau donne, pour le plus grand maximum, 31,30
Et pour le plus petit minimum, —0,50

Différence 31,80

De sorte qu'à Montpellier, dans l'année 1828, le sommet de la colonne de mercure a parcouru, dans le tube du thermomètre, un espace de 31°,80.

§. IV. INCLINAISON MAGNÉTIQUE.

Le 8 octobre 1828, j'ai observé l'inclinaison de l'aiguille aimantée, au moyen d'un appareil construit par les frères Jecker, à Paris ; en notant les inclinaisons, dans tous les azimuths, de dix en dix degrés, lisant l'arc aux deux extrémités de l'aiguille, retournant ensuite cette aiguille, pour recommencer les mêmes observations relativement à son autre face, et employant enfin la formule connue $\text{Tang.}^2x=\text{Tang.}^2\alpha+\text{Tang.}^2\beta$, j'ai obtenu ainsi dix-huit moyennes, desquelles j'ai conclu que l'inclinaison de l'aiguille, pour ce jour-là à Montpellier, était comprise entre 64°.21′ et 64°.26′.

J'espère avoir, pour 1829, un instrument propre à mesurer la déclinaison.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Théorème de géométrie.

La perpendiculaire abaissée de l'un des sommets d'un parallélipipède quelconque, sur un plan quelconque conduit par le sommet opposé, est égale à la somme des perpendiculaires abaissées sur le même plan des trois sommets qui environnent ce dernier; elle est la moitié seulement de la somme des perpendiculaires abaissées sur ce plan des trois sommets restans, respectivement opposés à ces trois-là.

Problème d'hydrostatique.

On suppose qu'il n'existe rien autre chose, dans l'univers, qu'une masse de fluide élastique dont les molécules s'attirent en raison composée de la directe de la masse de la molécule attirante et de l'inverse du carré de sa distance à la molécule attirée ; on suppose en outre que ce fluide se comprime proportionnellement aux pressions qu'il éprouve ; on suppose enfin que ses couches de densité uniforme sont sphériques et concentriques, et l'on demande suivant quelle fonction de leur rayon doit varier la densité de ces couches pour que toute la masse fluide soit en équilibre ?

Problème de dynamique.

Tout étant comme dans le problème de la page 285, si ce n'est que le tube est exactement équilibré sur son axe et n'est sollicité à se mouvoir que par le poids de la sphère introduite dans son interieur; on demande de déterminer les circonstances du mouvement tant de la sphère que de ce tube.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

Démonstration de deux théorèmes sur les lignes et surfaces du second ordre ;

Par M. Bobillier, professeur à l'Ecole des arts et métiers de Châlons-sur-Marne.

Nous nous proposons de faire voir, dans ce qui va suivre, que quatre théorèmes déjà connus, dont deux relatifs aux lignes et les deux autres aux surfaces du second ordre, ne sont que des cas particuliers de deux autres théorèmes plus généraux qui paraissent n'avoir point encore été remarqués.

I. Soient deux ellipses concentriques dont les diamètres principaux coïncident, et supposons que leurs équations relatives à ces deux droites soient

$$Ax^2+By^2=1\ , \qquad A'x^2+B'y^2=1\ .$$

Soit un angle droit mobile, sur le plan de ces courbes, dont les côtés les touchent respectivement ; en désignant par (α,β), (α',β') les points de contact variables, nous aurons d'abord

$$A\alpha^2+B\beta^2=1\ , \qquad A'\alpha'^2+B'\beta'^2=1\ . \qquad (1)$$

Les équations des deux côtés de cet angle seront respectivement

$$A\alpha x+B\beta y=1\ , \qquad A'\alpha'x+B'\beta'y=1\ ; \qquad (2)$$

et, parce que l'angle est droit, nous aurons en outre

$$AA'\alpha\alpha'+BB'\beta\beta'=0\ ; \qquad (3)$$

et l'on voit que l'équation en x et y, résultant de l'élimination de α, β, α', β' entre ces cinq dernières équations, serait celle de la courbe décrite par le sommet de l'angle mobile.

Soient posés

$$A\alpha=a\ , \quad B\beta=b\ , \qquad A'\alpha'=a'\ , \quad B'\beta'=b'\ , \qquad (4)$$

$$a^2+b^2=r^2\ , \qquad a'^2+b'^2=r'^2\ ; \qquad (5)$$

les équations (1), (2), (3) deviendront ainsi

$$\frac{a^2}{A}+\frac{b^2}{B}=1\ , \qquad \frac{a'^2}{A'}+\frac{b'^2}{B'}=1\ , \qquad (6)$$

$$ax+by=1\ , \qquad a'x+b'y=1\ , \qquad (7)$$

$$aa'+bb'=0\ . \qquad (8)$$

Les équations (5) et (8) pourront alors être écrites comme il suit:

$$\left(\frac{a}{r}\right)^2+\left(\frac{b}{r}\right)^2=1\ , \quad \left(\frac{a'}{r'}\right)^2+\left(\frac{b'}{r'}\right)^2=1\ , \quad \left(\frac{a}{r}\right)\left(\frac{a'}{r'}\right)+\left(\frac{b}{r}\right)\left(\frac{b'}{r'}\right)=0\ ; \quad (9)$$

or, il est connu qu'à trois pareilles relations, entre quatre quantités, on peut, comme équivalentes, substituer les trois suivantes (*) :

(*) Soient, en effet, deux systèmes de coordonnées rectangulaires, de même origine, et soient (x, y), (t, u) un même point considéré, tour à tour, dans les deux systèmes. Le carré de sa distance à l'origine devant être le même

$$\left(\frac{a}{r}\right)^2+\left(\frac{a'}{r'}\right)^2=1\,,\quad \left(\frac{b}{r}\right)^2+\left(\frac{b'}{r'}\right)^2=1\,,\quad \left(\frac{a}{r}\right)\left(\frac{b}{r}\right)+\left(\frac{a'}{r'}\right)\left(\frac{b'}{r'}\right)=0\,. \qquad (10)$$

Cela posé, les équations (7) peuvent être écrites ainsi:

$$\frac{a}{r}x+\frac{b}{r}y+\frac{1}{r}\,,\quad \frac{a'}{r}x+\frac{b'}{r}y=\frac{1}{r'}\;;$$

---

pour les deux systèmes, on devra avoir, quel que soit ce point,

$$x^2+y^2=t^2+u^2\,. \qquad (1)$$

Présentement les coordonnées x et y devant être des fonctions linéaires de t et u qui doivent s'évanouir en même temps que ces dernières, on peut écrire

$$x=pt+p'u\,,\qquad y=qt+q'u\;; \qquad (2)$$

ce qui donnera, en substituant dans (1), transposant et développant,

$$(p^2+q^2-1)t^2+(p'^2+q'^2-1)u^2+2(pp'+qq')tu=0\;;$$

équation qui, par ce qu'elle doit être identique, donne

$$p^2+q^2=1\,,\qquad p'^2+q'^2=1\,,\qquad pp'+qq'=0\,. \qquad (3)$$

D'un autre côté, si l'on prend, tour à tour, la somme des produits des équations (2), d'abord par p et q, puis par p' et q', en ayant égard aux relations (3), il viendra

$$t=px+qy\,,\qquad u=p'x+q'y\;; \qquad (4)$$

substituant dans (1), transposant et développant, on aura

$$(p^2+p'^2-1)x^2+(q^2+q'^2-1)y^2+2(pq+p'q)xy=0\;;$$

équation qui, devant aussi être identique, donne

$$p^2+p'^2=1\,,\qquad q^2+q'^2=1\,,\qquad pq+p'q'=0\;; \qquad (5)$$

relations qui, conséquemment, doivent être équivalentes aux relations (3). Nous nous sommes déjà appuyés sur cette équivalence à la pag. 159 du XII.e volume du présent recueil.

J. D. G.

prenant alors la somme de leurs carrés, ayant égard aux relations (10), il viendra simplement

$$x^2+y^2=\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r'^2}. \qquad (11)$$

Supposons présentement que les deux ellipses aient les mêmes foyers, et conséquemment la même excentricité, on aura ainsi

$$\frac{1}{A}-\frac{1}{B}=\frac{1}{A'}-\frac{1}{B'}, \quad \text{ou bien} \quad \frac{1}{A}-\frac{1}{A'}=\frac{1}{B}-\frac{1}{B'}; \quad (12)$$

et, par suite,

$$\frac{a'^2}{A'}+\frac{b'^2}{B'}=\frac{a'^2}{A}+\frac{b'^2}{B}+\left(\frac{1}{A'}-\frac{1}{A}\right)a'^2+\left(\frac{1}{B'}-\frac{1}{B}\right)b'^2=\frac{a'^2}{A}+\frac{b'^2}{B}+\left(\frac{1}{B'}-\frac{1}{B}\right)r'^2;$$

c'est-à-dire (6),

$$\frac{a'^2}{A^2}+\frac{b'^2}{B^2}=1+\left(\frac{1}{B}-\frac{1}{B'}\right)r'^2;$$

ou bien encore

$$\frac{1}{A}\left(\frac{a'}{r'}\right)^2+\frac{1}{B}\left(\frac{b'}{r'}\right)^2=\frac{1}{r'^2}+\left(\frac{1}{B}-\frac{1}{B'}\right);$$

mais on a aussi (6)

$$\frac{1}{A}\left(\frac{a}{r}\right)^2+\frac{1}{B}\left(\frac{b}{r}\right)^2=\frac{1}{r^2};$$

ajoutant ces deux équations membre à membre, et ayant égard aux relations (10), il viendra

$$\frac{1}{A}+\frac{1}{B}=\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r'^2}+\frac{1}{B}-\frac{1}{B'};$$

c'est-à-dire, en réduisant et ayant égard à la relation (12),

$$\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r'^2}=\frac{1}{A}+\frac{1}{B'}=\frac{1}{A'}+\frac{1}{B} \quad ;$$

au moyen de quoi l'équation (11) deviendra

$$x^2+y^2=\frac{1}{A}+\frac{1}{B'}=\frac{1}{A'}+\frac{1}{B} \quad ;$$

ce qui permet d'écrire, pour plus de symétrie,

$$x^2+y^2=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}\right)+\left(\frac{1}{A'}+\frac{1}{B'}\right)\right\} ; \qquad (13)$$

équation d'un cercle qui a son centre à l'origine.

Si, au lieu de deux ellipses, on avait deux hyperboles, ou bien une ellipse et une hyperbole, il n'y aurait rien de changé que les signes de B et de B', ou de l'un d'eux seulement, ce qui pourrait quelquefois réduire le cercle à un point, ou même le rendre imaginaire. On a donc ce théorème :

THÉORÈME I. Si un angle droit se meut sur un plan, de telle sorte que les côtés touchent respectivement deux coniques bi-confocales, son sommet décrira la circonférence qui leur sera concentrique.

Le carré du rayon de ce cercle sera égal à la demi-somme des carrés des cordes qui, dans les deux coniques, joindront deux sommets consécutifs.

Soit e l'excentricité commune aux deux courbes, et soient respectivement f et f' les distances de leurs sommets à un même foyer, nous aurons

$$\frac{1}{A}-\frac{1}{B}=e^2 , \qquad \frac{1}{A'}-\frac{1}{B'}=e^2 ,$$

$$\frac{1}{A}=(e+f)^2 , \qquad \frac{1}{A'}=(e+f')^2 ,$$

d'où nous conclurons

$$\frac{1}{B}=f(2e+f)\ ,\qquad \frac{1}{B'}=f'(2e+f')\ :$$

Si nous substituons ces valeurs dans les équations des deux courbes, en y changeant x en $x-e$ pour transporter l'origine au foyer commun négatif, elles deviendront

$$\frac{(x-e)^2}{(e+f)^2}+\frac{y^2}{f(2e+f)}=1\ ,\qquad \frac{(x-e)^2}{(e+f')^2}+\frac{y^2}{f'(2e+f')}=1\ ;$$

ou, en chassant les dénominateurs, développant, ordonnant et divisant par e^2

$$\frac{f}{e}\left(2+\frac{f}{e}\right)x^2-2f\left(2+\frac{f}{e}\right)x+\left(1+\frac{f}{e}\right)^2y^2=f^2\left(2+\frac{f}{e}\right)^2\ ;$$

$$\frac{f'}{e}\left(2+\frac{f'}{e}\right)x^2-2f'\left(2+\frac{f'}{e}\right)x+\left(1+\frac{f'}{e}\right)^2y^2=f'^2\left(2+\frac{f'}{e}\right)^2\ .$$

Avec les mêmes données l'équation (13) du cercle décrit par le sommet de l'angle deviendra

$$\frac{x^2+y^2}{e}-2x=\frac{f^2+f'^2}{e}+2(f+f')\ .$$

Si l'on suppose ensuite que e devient infini, les équations des deux courbes deviennent celles de deux paraboles données par les équations

$$y^2=4f(x+f)\ ,\qquad y^2=4f'(x+f')\ ;$$

et celle du cercle devient

$$x=-(f+f')\ ;$$

c'est-à-dire, celle d'une perpendiculaire à l'axe commun des deux courbes.

D'un autre côté, en égalant entre elles les valeurs de y^2, l'équation résultante

$$4f(x+f)=4f'(x+f')\,,$$

qui doit être celle de la corde commune ou de l'axe de symptose des deux courbes, donne aussi la même valeur pour x ; on a donc ce théorème :

THÉORÈME II. Si un angle droit se meut sur un plan, de telle sorte que ses côtés touchent respectivement deux paraboles de même axe et de même foyer, son sommet décrira l'axe de symptose des deux courbes.

Le *théorème I* peut encore être énoncé comme il suit :

THÉORÈME III. Si deux coniques bi-confocales se meuvent, dans le plan d'un angle droit, de manière à toucher respectivement ses deux côtés, leur centre commun décrira une circonférence qui aura pour centre le sommet de cet angle.

On peut supposer, tour à tour, dans le *théorème I*, 1.° que les deux coniques se confondent en une seule ; 2.° que, sans qu'elles se confondent, leurs foyers communs se confondent en un seul ; on obtient ainsi ces deux théorèmes connus, qui ne sont, comme on le voit, que des cas particuliers de celui-là ;

Si un angle droit se meut, sur un plan, de manière à être constamment circonscrit à une même conique, ou de manière que ses côtés touchent respectivement deux cercles concentriques ; son sommet décrira une circonférence qui aura pour centre le centre de la conique ou le centre commun des deux cercles directeurs.

Son sommet décrira donc une ligne droite si la courbe est une parabole.

Il est encore facile de conclure des *théorèmes I* et *II* qu'*une ellipse et une hyperbole de mêmes foyers, ou bien deux paraboles de même axe et de même foyer, se coupent toujours orthogonalement.*

II. Soient trois ellipsoïdes concentriques, dont les diamètres principaux coïncident ; et supposons que leurs équations, relatives à ces trois droites, soient

$$Ax^2+By^2+Cz^2=1\ ,\quad A'x^2+B'y^2+C'z^2=1\ ,\quad A''x^2+B''y^2+C''z^2=1\ .$$

Soit un angle trièdre tri-rectangle, mobile dans l'espace, dont les faces touchent respectivement ces trois ellipsoïdes ; en désignant par (α,β,γ), (α',β',γ'), $(\alpha'',\beta'',\gamma'')$ les trois points de contact variables, nous aurons d'abord

$$A\alpha^2+B\beta^2+C\gamma^2=1\ ,\quad A'\alpha'^2+B'\beta'^2+C'\gamma'^2=1\ ,\quad A''\alpha''^2+B''\beta''^2+C''\gamma''^2=1\ .\ (1)$$

Les équations des trois faces de cet angle trièdre seront respectivement

$$A\alpha x+B\beta y+C\gamma z=1\ ,\quad A'\alpha' x+B'\beta' y+C'\gamma' z=1\ ,\quad A''\alpha'' x+B''\beta'' y+C''\gamma'' z=1\ ;\ (2)$$

et, parce que l'angle trièdre est tri-rectangle, nous aurons, en outre,

$$A'A''\alpha'\alpha''+B'B''\beta'\beta''+C'C''\gamma'\gamma''=0\ ,\quad A''A\alpha''\alpha+B''B\beta''\beta+C''C\gamma''\gamma=0\ ,$$

$$AA'\alpha\alpha'+BB'\beta\beta'+CC'\gamma\gamma'=0\ ,\quad (3)$$

or, bien que ces équations ne soient qu'au nombre de neuf seulement, on peut néanmoins éliminer entre elles les neufs coordonnées des trois points de contact, et l'équation résultante, en x, y, z, sera celle de la surface décrite dans l'espace par le sommet de l'angle trièdre mobile.

Soient posés

$$A\alpha=a\ ,\ B\beta=b\ ,\ C\gamma=c\ ,\ A'\alpha'=a'\ ,\ B'\beta'=b'\ ,\ C'\gamma'=c'\ ,\ A''\alpha''=a''\ ,\ B''\beta''=b''\ ,\ C''\gamma''=c''\ ,\ (4)$$

$$a^2+b^2+c^2=r^2\ ,\quad a'^2+b'^2+c'^2=r'^2\ ,\quad a''^2+b''^2+c''^2=r''^2\ ;\ (5)$$

les équations (1), (2), (3) deviendront ainsi

$$\frac{a^2}{A}+\frac{b^2}{B}+\frac{c^2}{C}=1\,,\qquad \frac{a'^2}{A'}+\frac{b'^2}{B'}+\frac{c'^2}{C'}=1\,,\qquad \frac{a''^2}{A''}+\frac{b''^2}{B''}+\frac{c''^2}{C''}=1\,,\quad (6)$$

$$ax+by+cz=1\,,\quad a'x+b'y+c'z=1\,,\quad a''x+b''y+c''z=1\,,\quad (7)$$

$$a'a''+b'b''+c'c''=0\,,\quad a''a+b''b+c''c=0\,,\quad aa'+bb'+cc'=0\,;\quad (8)$$

les équations (5) et (8) pourront alors être écrites comme il suit :

$$\left.\begin{array}{ll}
\left(\frac{a}{r}\right)^2+\left(\frac{b}{r}\right)^2+\left(\frac{c}{r}\right)^2=1\,, & \left(\frac{a'}{r'}\right)\left(\frac{a''}{r''}\right)+\left(\frac{b'}{r'}\right)\left(\frac{b''}{r''}\right)+\left(\frac{c'}{r'}\right)\left(\frac{c''}{r''}\right)=0\,,\\
\left(\frac{a'}{r'}\right)^2+\left(\frac{b'}{r'}\right)^2+\left(\frac{c'}{r'}\right)^2=1\,, & \left(\frac{a''}{r''}\right)\left(\frac{a}{r}\right)+\left(\frac{b''}{r''}\right)\left(\frac{b}{r}\right)+\left(\frac{c''}{r''}\right)\left(\frac{c}{r}\right)=0\,,\\
\left(\frac{a''}{r''}\right)^2+\left(\frac{b''}{r''}\right)^2+\left(\frac{c''}{r''}\right)^2=1\,, & \left(\frac{a}{r}\right)\left(\frac{a'}{r'}\right)+\left(\frac{b}{r}\right)\left(\frac{b'}{r'}\right)+\left(\frac{c}{r}\right)\left(\frac{c'}{r'}\right)=0\,;
\end{array}\right\}\ (9)$$

or, il est connu qu'à six pareilles relations entre neuf quantités, on peut, comme équivalentes, substituer les suivantes (*) :

(*) Soient, en effet, deux systèmes de coordonnées rectangulaires de même origine, et soient (x, y, z), (t, u, v) un même point considéré, tour à tour, dans les deux systèmes. Le carré de sa distance à l'origine devant être le même pour ces deux systèmes, on devra avoir, quel que soit ce point,

$$x^2+y^2+z^2=t^2+u^2+v^2\,. \qquad (1)$$

Présentement, les coordonnées x, y, z devant être des fonctions linéaires de t, u, v qui doivent s'évanouir en même temps que ces dernières, on peut écrire

$$x=pt+p'u+p''v\,,\quad y=qt+q'u+q''v\,,\quad z=rt+r'u+r''v\,; \qquad (2)$$

ce qui donnera en substituant dans (1), transposant et développant

$$\left.\begin{array}{ll}\left(\frac{a}{r}\right)^2+\left(\frac{a'}{r'}\right)^2+\left(\frac{a''}{r''}\right)^2=1\,, & \left(\frac{b}{r}\right)\left(\frac{c}{r}\right)+\left(\frac{b'}{r'}\right)\left(\frac{c'}{r'}\right)+\left(\frac{b''}{r''}\right)\left(\frac{c''}{r''}\right)=0\,,\\ \left(\frac{b}{r}\right)^2+\left(\frac{b'}{r'}\right)^2+\left(\frac{b''}{r''}\right)^2=1\,, & \left(\frac{c}{r}\right)\left(\frac{a}{r}\right)+\left(\frac{c'}{r'}\right)\left(\frac{a'}{r'}\right)+\left(\frac{c''}{r''}\right)\left(\frac{a''}{r''}\right)=0\,,\\ \left(\frac{c}{r}\right)^2+\left(\frac{c'}{r'}\right)^2+\left(\frac{c''}{r''}\right)^2=1\,, & \left(\frac{a}{r}\right)\left(\frac{b}{r}\right)+\left(\frac{a'}{r'}\right)\left(\frac{b'}{r'}\right)+\left(\frac{a''}{r''}\right)\left(\frac{b''}{r''}\right)=0\,,\end{array}\right\}\quad(10)$$

$$\left.\begin{array}{l}(p^2+q^2+r^2-1)t^2+2(p'p''+q'q''+r'r'')uv\\ +(p'^2+q'^2+r'^2-1)u^2+2(p''p+q''q+r''r)vt\\ +(p''^2+q''^2+r''^2-1)v^2+2(pp'+qq'+rr')tu\end{array}\right\}=0\,,$$

équation qui, parce qu'elle doit être identique, donne

$$\left.\begin{array}{ll}p^2+q^2+r^2=1\,, & p'p''+q'q''+r'r''=0\,,\\ p'^2+q'^2+r'^2=1\,, & p''p+q''q+r''r=0\,,\\ p''^2+q''^2+r''^2=1\,, & pp'+qq'+rr'=0\,.\end{array}\right\}\quad(3)$$

D'un autre côté, si l'on prend, tour à tour, la somme des produits respectifs des équations (2), d'abord par p, q, r, ensuite par p', q', r', puis enfin par p'', q'', r'', en ayant égard aux relations (3), il viendra

$$t=px+qy+rz\,,\qquad u=p'x+q'y+r'z\,,\qquad v=p''x+q''y+r''z\,;\quad(4)$$

substituant dans (1), transposant et développant, on aura

$$\left.\begin{array}{l}(p^2+p'^2+p''^2-1)x^2+2(qr+q'r'+q''r'')yz\\ +(q^2+q'^2+q''^2-1)y^2+2(rp+r'p'+r''p'')zx\\ +(r^2+r'^2+r''^2-1)z^2+2(pq+p'q'+p''q'')xy\end{array}\right\}=0\,,$$

équation qui, devant aussi être identique, donne

Cela posé, les équations (7) peuvent être écrites ainsi :

$$\frac{a}{r}x+\frac{b}{r}y+\frac{c}{r}z=\frac{1}{r}\,, \quad \frac{a'}{r'}x+\frac{b'}{r'}y+\frac{c'}{r'}z=\frac{1}{r'}\,, \quad \frac{a''}{r''}x+\frac{b''}{r''}y+\frac{c''}{r''}z=\frac{1}{r''}\;;$$

prenant alors la somme de leurs carrés, en ayant égard aux relations (10), il viendra simplement

$$x^2+y^2+z^2=\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r'^2}+\frac{1}{r''^2}\,. \tag{11}$$

Supposons présentement que deux des sections principales des trois ellipsoïdes aient les mêmes foyers, et, par suite, même excentricité, on aura ainsi

$$\frac{1}{A}-\frac{1}{C}=\frac{1}{A'}-\frac{1}{C'}=\frac{1}{A''}-\frac{1}{C''}\,, \quad \frac{1}{B}-\frac{1}{C}=\frac{1}{B'}-\frac{1}{C'}=\frac{1}{B''}-\frac{1}{C''}\;;$$

d'où, en retranchant,

$$\frac{1}{A}-\frac{1}{B}=\frac{1}{A'}-\frac{1}{B'}=\frac{1}{A''}-\frac{1}{B''}\;;$$

$$\left.\begin{array}{ll} p^2+p'^2+p''^2=1\,, & qr+q'r'+q''r''=0\,, \\ q^2+q'^2+q''^2=1\,, & rp+r'p'+r''p''=0\,, \\ r^2+r'^2+r''^2=1\,, & pq+p'q'+p''q''=0\;; \end{array}\right\} \quad (5)$$

relations qui, conséquemment, doivent être équivalentes avec les relations (3). Nous nous sommes déjà appuyés (*Annales*, tom. XII, pag. 163) sur cette équivalence signalée, pour la première fois, par Lagrange dans sa *Mécanique analytique*, et dont M. Poisson a donné postérieurement une démonstration fort élégante dans la *Correspondance* de M. Hachette (tom. I, pag. 237).

J. D. G.

c'est-à-dire, que les troisièmes sections principales auront aussi la même excentricité, et, par suite, les mêmes foyers. On tirera de là

$$\frac{1}{A'}-\frac{1}{A}=\frac{1}{B'}-\frac{1}{B}=\frac{1}{C'}-\frac{1}{C}\,, \qquad \frac{1}{A''}-\frac{1}{A}=\frac{1}{B''}-\frac{1}{B}=\frac{1}{C''}-\frac{1}{C}\,; \qquad (12)$$

au moyen de quoi on aura

$$\frac{a'^2}{A'}+\frac{b'^2}{B'}+\frac{c'^2}{C'}=\frac{a'^2}{A}+\frac{b'^2}{B}+\frac{c'^2}{C}+\left(\frac{1}{A'}-\frac{1}{A}\right)a'^2+\left(\frac{1}{B'}-\frac{1}{B}\right)b'^2+\left(\frac{1}{C'}-\frac{1}{C}\right)c'^2\,,$$

$$\frac{a''^2}{A''}+\frac{b''^2}{B''}+\frac{c''^2}{C''}=\frac{a''^2}{A}+\frac{b''^2}{B}+\frac{c''^2}{C}+\left(\frac{1}{A''}-\frac{1}{A}\right)a''^2+\left(\frac{1}{B''}-\frac{1}{B}\right)b''^2+\left(\frac{1}{C''}-\frac{1}{C}\right)c''^2\,;$$

c'est-à-dire (5), (6), (12),

$$\frac{a'^2}{A}+\frac{b''^2}{B}+\frac{c''^2}{C}=1+\left(\frac{1}{B}-\frac{1}{B'}\right)r'^2\,,$$

$$\frac{a''^2}{A}+\frac{b''^2}{B}+\frac{c''^2}{C}=1+\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{C''}\right)r''\,;$$

ou bien encore

$$\frac{1}{A}\left(\frac{a'}{r'}\right)^2+\frac{1}{B}\left(\frac{b'}{r'}\right)^2+\frac{1}{C}\left(\frac{c'}{r'}\right)^2=\frac{1}{r'^2}+\left(\frac{1}{B}-\frac{1}{B'}\right)\,,$$

$$\frac{1}{A}\left(\frac{a''}{r''}\right)^2+\frac{1}{B}\left(\frac{b''}{r''}\right)^2+\frac{1}{C}\left(\frac{c''}{r''}\right)^2=\frac{1}{r''^2}+\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{C''}\right)\,;$$

mais on a aussi (6)

$$\frac{1}{A}\left(\frac{a}{r}\right)^2+\frac{1}{B}\left(\frac{b}{r}\right)^2+\frac{1}{C}\left(\frac{c}{r}\right)^2=\frac{1}{r^2}\,;$$

ajoutant ces trois équations membre à membre, en ayant égard aux relations (10), il viendra

$$\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}=\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r'^2}+\frac{1}{r''^2}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}-\frac{1}{B'}-\frac{1}{C''}\ ;$$

c'est-à-dire, en réduisant et ayant égard aux relations (12),

$$\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r'^2}+\frac{1}{r''^2}=\frac{1}{A}+\frac{1}{B'}+\frac{1}{C''}=\frac{1}{A'}+\frac{1}{B''}+\frac{1}{C}=\frac{1}{A''}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C'}\ ,$$

au moyen de quoi l'équation (11) deviendra

$$x^2+y^2+z^2=\frac{1}{A}+\frac{1}{B'}+\frac{1}{C''}=\frac{1}{A'}+\frac{1}{B''}+\frac{1}{C}=\frac{1}{A''}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C'}\ ;$$

ce qui permet d'écrire, pour plus de symétrie,

$$x^2+y^2+z^2=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\right)+\left(\frac{1}{A'}+\frac{1}{B'}+\frac{1}{C'}\right)+\left(\frac{1}{A''}+\frac{1}{B''}+\frac{1}{C''}\right)\right\}; \quad (13)$$

équation d'une sphère qui a son centre à l'origine.

Si, au lieu de trois ellipsoïdes on avait trois hyperboloïdes, ou bien deux ellipsoïdes avec une hyperboloïde, ou encore deux hyperboloïdes avec un ellipsoïde, il n'en résulterait que de simples changemens de signes dans quelqu'un des neuf coefficiens A, B, C, A', B', C', A'', B'', C''; le lieu cherché serait donc toujours une sphère, qui pourrait seulement se réduire quelquefois à un point, ou même devenir imaginaire. On a donc ce théorème :

THÉORÈME I. Si un angle trièdre tri-rectangle se meut dans l'espace, de manière que ses faces touchent respectivement trois surfaces du second ordre dont les sections principales soient bi-confocales, son sommet décrira une sphère qui leur sera concentrique.

De là on conclura facilement cet autre théorème :

THÉORÈME II. Si un angle trièdre tri-rectangle se meut dans l'espace, de manière que ses faces touchent respectivement trois surfaces du second ordre dépourvues de centres, dont les sections *paraboliques principales aient même axe et même foyer, son sommet décrira un plan perpendiculaire à leur axe commun.*

Le *théorème I* peut encore être énoncé comme il suit :

THÉORÈME III. Si trois surfaces du second ordre, invariablement liées entre elles, et ayant leurs sections principales bi-confocales, se meuvent dans l'espace, de manière à toucher respectivement les trois faces d'un angle trièdre tri-rectangle fixe, leur centre commun décrira une sphère ayant son centre au sommet de l'angle trièdre.

Si, dans les *théorèmes I* et *II*, on suppose que deux des surfaces du second ordre se confondent, on obtiendra ces deux-ci :

THÉORÈME IV. Si deux surfaces du second ordre ont leurs sections principales bi-confocales, et qu'un angle trièdre tri-rectangle se meuve dans l'espace, de telle sorte que deux de ses faces touchent constamment une de ces surfaces, tandis que la troisième touche constamment l'autre, le sommet de cet angle trièdre décrira une sphère concentrique avec ces deux surfaces.

THÉORÈME V. Si deux surfaces du second ordre dépourvues de centre ont même axe et même foyer, et qu'un angle trièdre se meuve dans l'espace, de telle sorte que deux de ses faces touchent constamment une de ces surfaces, tandis que la troisième touche constamment l'autre, le sommet de cet angle trièdre décrira un plan perpendiculaire à l'axe commun de ces deux surfaces.

On peut supposer, tour à tour, dans le *théorème I*, 1.° que les trois surfaces se confondent en une seule ; 2.° que, sans qu'elles se confondent, les foyers communs de leurs sections principales se confondent en un seul, on obtient ainsi ce double théorème démontré par M. Poisson, dans la correspondance de M. Hachette (tom. I, pag. 237), et qui n'est, comme on le voit, qu'un cas particulier de notre théorème général :

Si un angle trièdre tri-rectangle se meut, dans l'espace, de manière à être constamment circonscrit à une même surface du second ordre, ou de manière que ses faces touchent respectivement *trois sphères concentriques*, *son sommet décrira une sphère qui aura pour centre le centre de la surface du second ordre ou le centre commun des trois sphères directrices* (*).

Son sommet décrira donc un plan, *si la surface du second ordre est dépourvue de centre.*

Il est encore facile de conclure, de notre théorème général, que *trois surfaces du second ordre*, *dont les sections principales sont bi-confocales*, *se coupent deux à deux à angles droits.*

(*) Dans le dernier numéro de la *Correspondance* de Bruxelles (tom. V, pag. 32), le cas de trois sphères concentriques a été considéré par divers géomètres, et deux d'entre eux ont observé avec raison que, sans faire aucune dépense de calcul, ce cas pouvait être démontré très-simplement par des considérations purement géométriques; mais on peut dire plus encore, et il nous paraît que c'est méconnaître tout à fait la nature du cercle et celle de la sphère, que de ne point admettre, sans démonstration, et comme conséquences immédiates de leurs définitions, les propositions plus générales que voici :

I. *Si une droite d'une longueur invariable se meut sur un plan*, *de manière que ses deux extrémités soient constamment sur les circonférences de deux cercles concentriques*, *cette droite enveloppera*, *dans son mouvement*, *une troisième circonférence concentrique aux deux premières.*

II. *Si un triangle équilatéral se meut dans l'espace*, *de manière que ses sommets soient constamment sur trois sphères concentriques*, *ou de manière que ses côtés touchent constamment ces trois sphères*, *le plan de ce triangle enveloppera*, *dans son mouvement*, *une quatrième sphère concentrique aux trois autres.*

I. *Si un angle d'une grandeur invariable se meut sur un plan*, *de manière que ses deux côtés soient constamment tangens à deux cercles concentriques*, *son sommet décrira*, *dans son mouvement*, *la circonférence d'un troisième cercle concentrique aux deux premières.*

II. *Si un angle trièdre équilatéral se meut dans l'espace*, *de manière que ses faces soient constamment tangentes à trois sphères concentriques*, *ou de manière que ses arêtes touchent constamment ces trois sphères*, *le sommet de cet angle trièdre décrira*, *dans son mouvement*, *une quatrième sphère concentrique aux trois autres.*

J. D. G.

III. De ces divers théorèmes on peut aisément, par la théorie des polaires réciproques, conclure les suivans :

THÉORÈME I. Si un angle droit, mobile sur le plan de deux cercles qui se touchent, a constamment son sommet à leur point d'intersection, la droite mobile qui joindra les points de contact respectifs des deux côtés de cet angle avec les deux cercles, passera constamment par leur autre centre de similitude ou d'homologie.

THÉORÈME II. Si un angle trièdre tri-rectangle, mobile dans l'espace, a constamment son sommet au point de contact de trois sphères, le plan mobile qui passera par les points où les trois arêtes de cet angle trièdre percent respectivement ces sphères, passera constamment par un même point fixe de la droite qui joint leurs centres.

THÉORÈME III. Si un angle droit, mobile sur le plan de deux coniques fixes, a son sommet en un point fixe de ce plan, et que ce point soit tellement situé que, dans quatre des situations de l'angle mobile, les droites qui joindront les points d'intersection respectifs de ses côtés avec les deux coniques se confondent avec leurs quatre tangentes communes, cette droite, dans toutes ses positions, cette droite mobile enveloppera une troisième conique ayant pour foyer le sommet de l'angle mobile.

THÉORÈME IV. Si un angle trièdre tri-rectangle, mobile dans l'espace, a son sommet en un point fixe, et que, dans huit de ses positions, en conduisant des plans par les trois points où ses arêtes percent respectivement trois surfaces fixes du second ordre, ces plans coïncident avec les huit plans tangens communs à ces trois surfaces, dans toutes les autres situations de l'angle trièdre, le plan mobile enveloppera une surface de révolution du second ordre, ayant pour foyer le sommet fixe de cet angle trièdre.

On peut consulter, sur la démonstration de ces divers théorèmes, un article inséré à la pag. 185 du précédent volume des *Annales*.

Nous terminerons par un théorème assez remarquable sur les co-

coniques bi-confocales ; ce théorème consiste en ce que *trois coniques bi-confocales étant données, si un triangle mobile et variable de forme est constamment circonscrit à l'une d'elles, de telle sorte que deux de ses sommets décrivent les deux autres, son troisième sommet décrira une quatrième conique bi-confocale avec les trois premières.*

Ce théorème résulte de ce que 1.° en plaçant le centre du cercle directeur à l'un des foyers, les trois premières coniques se transforment en trois cercles ayant un axe de symptose commun ; 2.° trois cercles tracés sur un même plan, ayant un axe de symptose commun, si l'on inscrit à l'un d'eux un triangle mobile et variable de forme, dont deux côtés enveloppent respectivement les deux autres, son troisième côté enveloppera un quatrième cercle ayant un axe de symptose commun avec les trois premiers (PONCELET, *Propriétés projectives*, pag. 323).

Châlons-sur-Marne, le 10 novembre 1828.

GÉOMÉTRIE DE SITUATION.

Sur le théorème d'Euler relatif aux polyèdres ;

Par M. GERGONNE.

ON a vu dans le III.me volume du présent recueil (pag. 169) que ce n'est qu'après des tentatives réitérées qu'Euler est parvenu à établir, d'une manière à la fois complète et générale, son curieux théorème sur la relation constante entre le nombre des faces, celui des sommets et celui des arêtes d'un polyèdre quelconque. On sait que, dans ces derniers temps, M. Cauchy a démontré, d'une manière beaucoup plus simple, un autre théorème dont celui d'Euler n'est qu'un cas particulier.

En suivant une marche un peu différente, M. le docteur J. A. Gruner, de Torgau, dans le II.^me volume du précieux recueil de M. Crelle (pag. 367), est parvenu à démontrer le théorème d'Euler d'une manière plus simple encore, et, en suivant la marche tracée par l'auteur, on peut obtenir une démonstration non moins simple du théorème de M. Cauchy, et ramener ainsi toute cette théorie à être racontée, pour ainsi dire, dans une promenade, à quelqu'un même qui n'aurait aucune notion de géométrie, ainsi que nous allons le faire voir.

Remarquons d'abord que, si s est le nombre des sommets d'un polygone ouvert, $s+1$ sera le nombre de ses côtés; c'est-à-dire, que *le nombre des côtés d'un polygone ouvert surpasse constamment d'une unité le nombre des sommets de ce polygone.*

Soit présentement un système non interrompu, ou, en d'autres termes, un réseau de polygones contigus les uns aux autres et formant, par leur ensemble, un polygone unique, convexe ou non. Soient F le nombre des figures partielles composant ce polygone total, S le nombre des points qui leur servent de sommets et A le nombre des droites qui leur servent de côtés.

Concevons qu'on enlève un quelconque des polygones extérieurs sans toucher aucunement aux autres; ceux-ci formeront un nouveau réseau. Désignons par F' le nombre des figures qui composent ce dernier, par S' le nombre des points qui lui servent de sommet et par A' le nombre des droites qui lui servent de côtés.

Il est évident que, pour passer du premier réseau au second, on n'aura eu autre chose à faire que de supprimer dans celui-là un certain polygone ouvert, et, qu'en représentant par s le nombre de ses sommets, on aura

$$F'=F-1\,,$$

$$S'=S-s\ ,$$

$$A'=A-s-1\ ;$$

d'où on conclut sur-le-champ

$$F'+S'-A'=F+S-A\ ;$$

ainsi, en supprimant un des polygones extérieurs, le nombre des polygones, augmenté du nombre des points servant de sommets et diminué du nombre de droites servant de côtés, demeurera constant; il en sera donc de même si l'on enlève un second polygone extérieur, puis un troisième, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait enfin amené le réseau à se réduire à un polygone unique.

Mais, dans ce dernier cas, on aura évidemment

$$F+S-A=1\ ;$$

donc, cette relation aura également lieu quel que puisse être le nombre des polygones qui composeront le réseau, c'est-à-dire que, *dans un réseau de polygones contigus les uns aux autres, le nombre des polygones, augmenté du nombre des sommets, surpasse constamment d'une unité le nombre des droites.* C'est le premier des deux théorèmes de M. Cauchy.

La forme de la démonstration de ce théorème prouve évidemment qu'il est applicable aux polygones plans, curvilignes et mixtilignes, comme aux polygones plans rectilignes, pourvu que l'on admette qu'aucun des premiers n'a moins de trois côtés, et il n'est pas moins évident qu'il serait encore vrai, sous la même restriction, pour un réseau de polygones curvilignes tracés sur une surface courbe quelconque.

Enfin, il sera vrai aussi pour un système de polygones rectilignes tel que deux polygones consécutifs pourraient n'être pas situés dans un même plan ; c'est-à-dire, en d'autres termes, pour un polyèdre ouvert; de sorte qu'en représentant par f le nombre des faces, par s le nombre des sommets et par a le nombre des arêtes d'un tel polyèdre, nous devrons avoir

$$f+s-a=1 \;;$$

c'est-à-dire que, *dans tout polyèdre ouvert, le nombre des faces, augmenté du nombre des sommets, surpasse constamment d'une unité le nombre des arêtes.*

Remarquons que la même relation subsisterait encore, lors même qu'on voudrait faire abstraction tant des sommets que des arêtes extérieures du polyèdre ouvert, puisque les uns et les autres étant en même nombre, la valeur de $f-a$ n'en serait aucunement affectée; ainsi *dans tout polyèdre ouvert, le nombre des faces, augmenté du nombre des arêtes intérieures, surpasse constamment d'une unité le nombre des sommets intérieurs.*

Si l'on enlève une quelconque des faces d'un polyèdre fermé quelconque, il deviendra un polyèdre ouvert dans lequel le nombre des faces sera moindre d'une unité, tandis que le nombre des sommets et celui des arêtes demeurera le même si donc F, S, A représentent respectivement le nombre des faces, celui des sommets et celui des arêtes du polyèdre fermé, nous devrons avoir (1)

$$(F-1)+S-A=1 \;;$$

d'où

$$F+S=A+2 \;;$$

c'est-à-dire que, *dans tout polyèdre fermé, le nombre des faces, augmenté du nombre des sommets, surpasse constamment de deux unités le nombre des arêtes.* C'est le théorème d'Euler.

Soit présentement un système non interrompu, ou, en d'autres termes, un réseau de polyèdres contigus les uns aux autres et formant, par leur ensemble, un polyèdre unique, convexe ou non. Soient P le nombre de ces polyèdres, F le nombre des plans leur servant de *faces*, S le nombre des points leur servant de *sommets* et enfin A le nombre des droites leur servant d'*arêtes*.

Concevons qu'on enlève un quelconque des polyèdres extérieurs, sans toucher aucunement aux autres; ceux-ci formeront un nouveau réseau. Désignons par P' le nombre des polyèdres de ce dernier réseau, par F' le nombre des plans leur servant de faces, par S' le nombre des points leur servant de sommets et par A' le nombre des droites leur servant d'arêtes.

Il est évident que, pour passer du premier réseau au second, on n'aura autre chose à faire que de supprimer dans celui-là un certain polyèdre ouvert, et qu'en représentant par f le nombre de ses faces, par s le nombre de ses sommets intérieurs et par a le nombre de ses arêtes intérieures, on aura, comme nous l'avons prouvé plus haut,

$$f+s-a=1 \; ; \qquad (1)$$

mais on aura aussi, d'un autre côté,

$$P'=P-1 \; ,$$

$$F'=F-f \; ,$$

$$S'=S-s \; ,$$

$$A'=A-a \; ;$$

d'où on conclura sur-le-champ, en ayant égard à la relation (1),

$$F'+S'-A'-P'=F+S-A-P \; ;$$

ainsi, en supprimant un des polyèdres extérieurs, le nombre des faces, plus le nombre des sommets moins le nombre des arêtes, moins encore le nombre des polyèdres, demeurera constant ; il en sera donc encore de même si l'on enlève un second polyèdre extérieur, puis un troisième, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait enfin amené le réseau à se réduire à un polyèdre unique.

Mais, comme alors, en vertu du théorème d'Euler, on aura

$$F+S-A=2\ ,$$

et comme d'ailleurs on aura $P=1$, on pourra écrire

$$F+S-A-P=1\ ;$$

donc cette relation ou son équivalente

$$F+S=A+P+1\ ,$$

aura également lieu, quel que soit le nombre des polyèdres dont le réseau sera composé ; c'est-à-dire que, *dans un réseau de polyèdres contigus les uns aux autres, le nombre des faces, augmenté du nombre des sommets, surpasse constamment d'une unité le nombre des arêtes augmenté du nombre des polyèdres.* C'est le second théorème de M. Cauchy, que M. Gruner n'avait pas démontré.

En rapprochant ce qui précède des laborieuses recherches d'Euler, sur le même sujet, on se trouve ramené, comme dans tant d'autres cas, à cette réflexion, savoir : qu'il est bien rare qu'une théorie sorte sous sa forme la plus simple des mains de son premier auteur. Nous pensons qu'on sert peut-être plus encore la science en simplifiant, de la sorte, des théories déjà connues, qu'en l'enrichissant de théories nouvelles, et c'est là un sujet auquel on ne saurait s'appliquer avec trop de soin.

On peut voir à la pag. 157 du XV.^{me} volume du présent recueil, les nombreuses et piquantes conséquences qui résultent de ce théorème.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution du problème de statique énoncé à la pag. 283 *du XVII.*^me *volume des* Annales ;

Par un ABONNÉ. (*)

PROBLÈME. De quelle manière doit être posé un fil uniformément pesant, d'une longueur donnée, parfaitement flexible et inextensible, sur deux tringles fixes, rectilignes, horizontales et parallèles, d'un diamètre infiniment petit, n'exerçant sur ce fil aucun frottement, pour s'y tenir en équilibre ? Quelle est en outre la moindre longueur de ce fil, qui puisse permettre l'équilibre.

I. *Considérations préliminaires.* Avant d'attaquer cette question par le calcul, examinons d'abord ce que les notions les plus élémentaires de la statique nous permettent de découvrir sur le nombre et la nature des solutions dont elle peut être susceptible. Cette attention préliminaire nous paraît ici d'autant plus convenable que, généralement parlant, le problème ne peut être résolu algébriquement que par les séries.

La première remarque qui s'offre à l'esprit, c'est que l'équilibre ne pourra subsister qu'autant que le fil, abandonné à lui-même, se trouvera contenu, en totalité, dans un plan vertical perpendiculaire à la direction commune des deux tringles, dont la résis-

(*) M. Timmermans s'est aussi occupé de ce problème.

tance se réduira ainsi à celle de deux points fixes ou de deux anneaux infiniment petits, dans lesquels ce fil se trouverait engagé.

Ces points fixes diviseront la longueur totale du fil en trois parties, dont l'intermédiaire affectera la courbure d'une chaînette uniformément pesante, tandis que les deux extrêmes, pendant verticalement, feront équilibre par leurs poids, aux tensions qui s'exerceront aux deux extrémités de l'autre partie.

Supposons, en premier lieu, que les longueurs des deux parties extrêmes soient, l'une et l'autre, infinies; alors leurs poids et, par suite, les tensions aux deux extrémités de la partie intermédiaire étant également infinis, cette partie sera tendue en ligne droite; elle aura la moindre longueur qu'elle puisse avoir.

Si les longueurs des deux parties extrêmes, sans être infinies, sont néanmoins très-grande par rapport à celle de la partie intermédiaire, tout se passera encore *à peu près* de la même manière. Il arrivera seulement que cette partie intermédiaire affectera une faible courbure.

Si alors on tente de diminuer un peu cette courbure au profit des longueurs des parties extrêmes, comme alors le poids de ces parties ne sera pas augmenté en proportion de l'accroissement de tension aux deux extrémités de l'autre, cette tension deviendra prépondérante, et l'action qu'elle exercera sur les parties extrêmes ramenera bientôt le système dans l'état d'équilibre où il se trouvait d'abord.

Que si, au contraire, on tente d'augmenter un peu la courbure de la partie intermédiaire, aux dépens de celles des parties extrêmes, l'action de celles-ci ne se trouvant pas diminuée en proportion du décroissement de tension aux deux extrémités de l'autre, leur action sur celle-ci deviendra prépondérante et tendra à son tour à ramener le système dans sa situation d'équilibre.

Cet équilibre du système sera donc tel que, dans quelque sens qu'on tente de l'en écarter un peu, il tendra constamment à y revenir ; c'est-à-dire que ce système se trouvera dans une situation d'*équilibre stable*.

Si l'on supposait, au contraire, les longueurs des parties extrêmes nulles, ou du moins très-petites, par rapport à celle de la partie intermédiaire, on conçoit que l'équilibre ne pourrait avoir lieu, et que l'action prépondérante des tensions, aux extrémités de cette partie, tendrait à faire glisser ces parties extrêmes sur les points fixes, et à faire entièrement tomber le fil.

Entre les deux états extrêmes que nous venons de considérer, on en conçoit un où le poids des parties extrêmes n'aura exactement que l'action strictement nécessaire pour contre-balancer la tension aux deux extrémités de la partie intermédiaire, et l'empêcher d'entraîner ces parties extrêmes en les faisant glisser sur les appuis.

Si donc, dans cet état de choses, on tente d'augmenter un peu la longueur de la partie intermédiaire, aux dépens de celles des parties extrêmes, l'action de celles-ci cessant dès lors de lutter efficacement contre les tensions aux extrémités de l'autre, ces tensions deviendront prépondérantes, et le fil sera entraîné de dessus les appuis, comme nous le disions tout-à-l'heure.

Que si, au contraire, on tente de diminuer un peu la longueur de la partie intermédiaire, au profit de celles des deux autres, ce sera l'action de celles-ci qui deviendra à son tour prépondérante, et qui fera retourner le système vers la situation d'équilibre stable que nous avions considéré en premier lieu, et dans laquelle il finira par se fixer.

Voilà donc un autre état d'équilibre dont le système doit tendre constamment à l'écarter davantage, dans quelque sens qu'on l'en écarte un peu ; c'est donc une situation d'*équilibre instable*.

On conçoit, au surplus, que moins le fil aura de longueur, pourvu toutefois qu'il en ait suffisamment pour que l'équilibre puisse être établi, et plus aussi ces deux situations d'équilibre stable et instable devront être voisines l'une de l'autre. Il devra donc y avoir telle longueur de fil pour laquelle ces deux situations d'équilibre se confondront en une seule, et cette longueur sera évidemment la moindre pour laquelle l'équilibre puisse être établi. Cette situation unique sera d'ailleurs telle que, si l'on tente de diminuer un peu la longueur de la partie intermédiaire du fil, au profit de celle des parties extrêmes, le système tendra à revenir dans la situation qu'on l'avait contraint d'abandonner; tandis que si, au contraire, on tente d'allonger cette partie, aux dépens des deux autres, elle tendra à s'allonger davantage encore, jusqu'à ce que le fil échappe entièrement aux appuis. Ce sera donc là une situation d'*équilibre mixte*.

Toutes ces diverses considérations peuvent, au surplus, être littéralement appliquées à une pièce d'étoffe homogène, d'une largeur constante, que l'on voudrait soutenir sur deux bâtons rectilignes, fixés horizontalement dans des directions parallèles. On peut, en effet, considérer cette pièce d'étoffe comme une suite de chaînettes uniformément pesantes, posées les unes à côtés des autres, dans des plans verticaux parallèles.

II. *Equation de la chaînette.* Rapportons une chaînette, uniformément pesante, à la tangente et à la normale en son point le plus bas, prises respectivement pour axes des x et des y. Soit pris pour unité de poids ce que peserait une portion de cette chaînette égale en étendue à l'unité de longueur; si alors s exprime la longueur de l'arc de courbe compris depuis l'origine jusqu'à un quelconque (x,y) de ses points, cette lettre représentera aussi le poids de cet arc; et si z et v expriment respectivement les tensions qui ont lieu à l'origine et au point (x,y), ces lettres exprimeront aussi les longueurs des portions de la même chaînette dont les poids pourraient faire équilibre à ces mêmes tensions.

Or, on sait, par les premiers principes de la statique, que la tension à chacune des extrémités d'une chaînette, est à son poids comme le sinus de l'angle que fait avec la verticale la tangente à son autre extrémité, est au sinus de l'angle des tangentes aux deux extrémités. On a donc cette double équation

$$\frac{s}{\frac{dy}{ds}}=\frac{z}{\frac{dx}{ds}}=v\,;$$

d'où on conclut ces deux-ci,

$$z\frac{dy}{dx}=s\,,\qquad (1)\qquad\qquad v=z\frac{ds}{dx}\,.\qquad (2)$$

En différentiant la première, il vient

$$z\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,,$$

ou bien

$$z\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}=dx\,;$$

d'où, en intégrant,

$$z\text{Log.}\left\{\frac{dy}{dx}+\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right\}=x\,;$$

nous n'ajoutons point de constante, parce que x et $\frac{dy}{dx}$ doivent être nuls en même temps.

Cette intégrale revient à

$$\frac{dy}{dx}+\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=e^{\frac{x}{z}}\,,$$

équation qui, rendue rationnelle et résolue par rapport à $\frac{dy}{dx}$, donne

$$2\frac{dy}{dx}=e^{\frac{x}{z}}-e^{-\frac{x}{z}}; \qquad (3)$$

donc

$$2\frac{ds}{dx}=2\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=e^{\frac{x}{z}}+e^{-\frac{x}{z}}; \qquad (4)$$

ce qui donne, en intégrant,

$$2s=z\left(e^{\frac{x}{z}}+e^{-\frac{x}{z}}\right). \qquad (5)$$

Ici encore nous n'ajoutons point de constante, parce que x et s doivent être nuls en même temps.

En substituant dans l'équation (2) la valeur de $\frac{ds}{dx}$, donnée par l'équation (4), elle devient

$$2v=z\left(e^{\frac{x}{z}}+e^{-\frac{x}{z}}\right). \qquad (6)$$

En intégrant ensuite l'équation (3), il vient

$$2(y+k)=z\left(e^{\frac{x}{z}}+e^{-\frac{x}{z}}\right),$$

où k est la constante arbitraire. Remarquant alors que x et y doivent être nuls en même temps, on trouve $k=z$, et, par suite,

$$2(y+z)=z\left(e^{\frac{x}{z}}+e^{-\frac{x}{z}}\right). \qquad (7)$$

Au moyen des équations (5), (6), (7), un point (x, y) étant donné sur le plan des axes, on déterminera quelle longueur s doit avoir la chaînette tendue de l'origine à ce point, pour que sa tangente, au premier de ces deux points, se confonde avec l'axe des x, supposé horizontal, et on déterminera, en outre, ses tensions z et v en ces deux points, c'est-à-dire les longueurs qu'il faudrait prendre sur un fil uniformément pesant de la même nature, pour que leurs poids fissent équilibre à ces mêmes tensions.

Mais, par une combinaison convenable de ces trois équations, on peut les remplacer par d'autres plus simples; et d'abord la comparaison des équations (6) et (7) donne sur-le-champ

$$v=z+y. \qquad (8)$$

En prenant, tour à tour, la demi-somme et la demi-différence des équations (5) et (6), il vient

$$v+s=z.e^{\frac{x}{z}}, \qquad (9)$$

$$v-s=z.e^{-\frac{x}{z}};$$

équations dont la seconde équivaut à la première, pourvu qu'on admette que s change de signe avec x. En les multipliant membre à membre, il viendra

$$v^2-s^2=z^2. \qquad (10)$$

On pourra donc remplacer les équations (5), (6), (7) par les équaions (8), (9), (10), dont une seule est transcendante.

Si l'on veut transporter l'origine au point quelconque $(-t, -u)$, auquel cas t et u seront les coordonnées du point le plus bas de la courbe, il ne s'agira que de changer respectivement x et y en $t+x$ et $u+y$, ce qui donnera

$$v=z+u+y\ , \tag{11}$$

$$v+s=z.e^{\frac{t+x}{z}}\ ; \tag{12}$$

$$v^2-s^2=z^2\ . \tag{13}$$

III. *Solution du problème.* Soit présentement $2c$ la longueur totale du fil en équilibre sur les deux points fixes (a, b), (a', b') que, pour fixer les idées, nous supposons situés l'un et l'autre du côté positif du point le plus bas (t, u). Alors v, v' étant les longueurs des deux parties extrêmes, pendant verticalement, et s, s' les longueurs de la chaînette comptées depuis le point (t, u) situé sur son prolongement, jusqu'aux points (a, b), (a', b'), la longueur de la partie intermédiaire sera $s-s'$; de sorte qu'on aura

$$v+v'+(s-s')=2c\ . \tag{14}$$

On aura, en outre, en vertu des équations (11), (12), (13),

$$v=z+u+b\ , \quad (15) \qquad v'=z+u+b'\ , \quad (18)$$

$$v+s=z.e^{\frac{t+a}{z}}\ , \quad (16) \qquad v'+s'=z.e^{\frac{t+a'}{z}}\ , \quad (19)$$

$$v^2-s^2=z^2\ ; \quad (17) \qquad v'^2-s'^2=z^2\ ; \quad (20)$$

équations au moyen desquelles on déterminera les sept inconnues t, u, v, v', s, s', z, lorsque les grandeurs a, a', b, b', c seront données.

Comme les inconnues t et u sont étrangères au problème qui nous occupe, il convient de les éliminer d'abord. Il suffit pour cela de retrancher l'équation (18) de l'équation (15), et de diviser ensuite l'équation (16) par l'équation (19); il vient ainsi

$$v-b=v'-b'\,, \qquad (21)$$

$$\frac{v+s}{v'+s'}=e^{\frac{a-a'}{z}}\,. \qquad (22)$$

de sorte qu'on aura, pour déterminer v, v', s, s', z les cinq équations (14), (17), (20), (21), (22).

L'équation (21) montre que, dans le cas d'équilibre, les parties extrêmes du fil, pendant verticalement, doivent se terminer sur la même droite horizontale (*).

En égalant les valeurs de z^2, données par les équations (17) et (20), on en conclut

$$v^2-s^2=v'^2-s'^2\,, \qquad (23)$$

équation qui exprime ce théorème : si l'on construit un triangle dont la base soit égale à la longueur de la partie intermédiaire, courbée en chaînette, du fil en équilibre, et dont les deux autres côtés soient égaux en longueur aux parties extrêmes de ce fil, pendant verticalement; la perpendiculaire abaissée du sommet du triangle, sur la direction de cette base, la divisera en deux segmens respectivement égaux aux longueurs des deux segmens de la partie intermédiaire, comptés depuis son point le plus bas.

Pour simplifier le problème, supposons que les deux points fixes soient situés sur la même horizontale, à la distance $2d$ l'un de l'autre; on aura ainsi $b'=b$ et $a-a'=2d$, on en conclura, par l'équation (21),

---

(*) On conclura facilement de là que, quel que puisse être le nombre des points d'appui, et, par suite, le nombre des parties intermédiaires ployées en chaînettes, toujours les parties extrêmes, pendant verticalement, devront, dans le cas d'équilibre, se terminer sur la même horizontale.

$\rho'=\rho$, et par l'équation (22), $s=-s'$; les équations (14), (17), (20) et (22) se réduiront alors à

$$\rho+s=c\,, \qquad (24)$$

$$\rho^2-s^2=(\rho+s)(\rho-s)=c(\rho-s)=z^2\,, \qquad (25)$$

$$\frac{\rho+s}{\rho-s}=e^{\frac{2d}{z}}\,; \qquad (26)$$

mettant dans cette dernière, pour $\rho+s$ et $\rho-s$, leurs valeurs données par les deux précédentes, elle deviendra

$$c^2=z^2.e^{\frac{2d}{z}}\,;$$

d'où, par l'extraction de la racine quarrée,

$$c=z.e^{\frac{d}{z}}\,. \qquad (27)$$

Par le développement en fraction continue, ou par tout autre moyen analogue, on tirera de cette dernière, dans chaque cas particulier, la valeur de z, et on en conclura ensuite celles de ρ et s, au moyen des équations (24) et (25).

Si l'on veut savoir, pour ce cas particulier, quel est le fil le plus court qui puisse résoudre le problème, il faudra égaler à zéro la différentielle de la valeur de c, prise par rapport à z, ce qui donnera

$$0=(z-d).e^{\frac{d}{z}}\,;$$

l'égalité à zéro du second facteur répondant au fil le plus long ; nous aurons simplement $z=d$, d'où $c=e.d$; les équations (24) et (25) donneront ensuite $\rho=\frac{e^2+1}{2e}d$, et $s=\frac{e^2-1}{2e}d$.

Lyon, le 18 avril 1828.

GÉOMÉTRIE DES COURBES.

Mémoire sur l'hyperbole équilatère (*);

Par M. Bobillier, professeur à l'Ecole des arts et métiers de Châlons-sur-Marne.

On sait que deux diamètres conjugués quelconques d'une hyperbole équilatère font avec son axe transverse deux angles aigus complément l'un de l'autre, et que conséquemment les deux asymptotes divisent en deux parties égales les quatre angles formés par ces deux diamètres; d'où il suit encore que l'angle de deux quelconques des diamètres d'une telle hyperbole est le même que celui de leurs conjugués.

Donc aussi, *l'angle de deux droites, tracées arbitrairement sur le plan d'une hyperbole équilatère, est le même que celui des deux diamètres de la courbe qui en contiennent les pôles respectifs.* Ainsi tout ce qui a été démontré pour le cas d'une directrice circulaire peut se dire également du cas où cette directrice est une hyperbole équilatère (**); on pourra dire, en particulier, *que la polaire d'un cercle, par rapport à une hyperbole équilatère, est une conique qui a pour foyer le centre de cette courbe et pour directrice la polaire du centre du cercle;* si donc ce cercle est concen-

(*) Voy., sur le même sujet, la pag. 205 du XI.me volume du présent recueil.

(**) Voy. *Annales*, tom. XVIII, pag. 185.

J. D. G.

trique avec l'hyperbole, sa polaire réciproque sera un autre cercle qui lui sera concentrique ; et si, en outre, il a pour diamètres les axes de l'hyperbole, il sera lui-même sa polaire réciproque. Il est visible, en outre, que, réciproquement, la polaire réciproque de l'hyperbole, par rapport à ce cercle, sera une hyperbole qui aura le même centre, les mêmes sommets et les mêmes asymptotes, et qui, par suite, se confondra avec elle.

On peut prouver, plus généralement, que *si, sur les mêmes diamètres conjugués, on décrit une ellipse et une hyperbole, chacune de ces deux courbes sera à elle-même sa polaire réciproque, par rapport à l'autre courbe prise pour directrice.* En effet, les équations de ces deux courbes seront comprises dans la formule

$$Ax'^2 \pm By'^2 = C\ ,$$

l'équation de la tangente à l'une d'elles, en un point (x', y'), sera

$$Ax'x \pm By'y = C\ ,$$

et l'équation de la polaire, relative à l'autre, d'un point quelconque (x'', y'') sera

$$Ax''x \mp By''y = C\ ;$$

or, si l'on veut que cette polaire coïncide avec la tangente, il faudra prendre $x''=x'$, $y''=-x'$, d'où $x''^2=x'^2$, $y''^2=y'^2$. Ainsi l'équation de la polaire réciproque sera

$$Ax''^2 \pm By''^2 = C\ ;$$

c'est-à-dire, la même que celle de la courbe proposée.

Il résulte évidemment de là que, *si deux paraboles de même paramètre, et tournées en sens inverse, se touchent de telle sorte que leurs axes soient parallèles, chacune d'elle sera à elle-même sa polaire réciproque, par rapport à l'autre, considérée comme directrice.*

En rapportant les propriétés angulaires d'une hyperbole équilatère à cette courbe elle-même, considérée comme sa propre polaire réciproque, on parvient à un grand nombre de théorèmes, parmi lesquels nous nous bornerons à signaler les suivans :

La droite qui divise l'angle des rayons vecteurs d'un même point d'une hyperbole équilatère en deux parties égales, lui est tangente en ce point.

Le diamètre qui va au point de contact d'une tangente à une hyperbole équilatère divise, en deux parties égales, deux des quatre angles formés par les deux diamètres qui vont aux points d'intersection de cette même tangente avec les polaires des deux foyers.

Les deux côtés d'un angle circonscrit à une hyperbole équilatère, font respectivement des angles égaux avec les droites qui joignent le sommet de cet angle aux deux foyers.

Les diamètres qui vont aux deux extrémités d'une corde d'une hyperbole équilatère, font respectivement des angles égaux avec ceux qui vont aux intersections de cette même corde avec les polaires des deux foyers.

La demi-différence des angles, sous lesquels une même corde d'une hyperbole équilatère est vue de ses deux foyers, est supplément de l'angle circonscrit suivant cette même corde.

Le supplément de l'angle, sous lequel une corde d'une hyperbole équilatère est vue de son centre, est égal à la demi-différence des angles sous lesquels on voit du même point les portions des polaires des deux foyers interceptées par l'angle circonscrit suivant cette corde.

La portion d'une tangente quelconque à une hyperbole équilatère, interceptée entre les tangentes à ses deux sommets, est vue sous un angle droit de l'un et de l'autre foyers.

La portion de l'une ou de l'autre polaire des foyers d'une hyperbole équilatère interceptée entre deux cordes supplémentaires, *relatives à l'axe transverse de la courbe, est vue de son centre sous un angle droit.*

Si un angle droit se meut sur le plan d'une hyperbole équilatère, de manière que l'un de ses côtés soit constamment tangent à la courbe et que l'autre passe constamment par un de ses foyers, son sommet décrira un cercle qui aura pour diamètre l'axe transverse de la courbe.

La droite qui joint un des foyers d'une hyperbole équilatère au pôle d'une corde qui passe par ce foyer, est perpendiculaire sur cette même corde.

L'angle sous lequel on voit, du centre d'une hyperbole équilatère, la portion de la polaire de l'un de ses foyers, comprise entre l'un quelconque des points de la direction de cette polaire, et la polaire de ce point est un angle droit.

Si, de l'un des foyers d'une hyperbole équilatère, on mène des droites, 1.° au sommet d'un angle circonscrit et au point d'intersection de sa corde de contact avec la polaire de ce foyer; 2.° aux deux extrémités de la corde de contact; les deux premières droites seront rectangulaires et diviseront en deux parties égales les quatre angles formés par les deux dernières.

Si, du centre d'une hyperbole équilatère, on mène des diamètres aux quatre points d'intersection de la polaire de l'un de ses foyers, 1.° avec les deux côtés de l'angle circonscrit; 2.° avec sa corde de contact et avec la droite qui va du foyer à son sommet; les deux derniers diamètres seront rectangulaires et diviseront en deux parties égales les quatre angles formés par les deux premiers.

Pour parvenir à un autre principe qui conduit à un grand nombre de propriétés nouvelles de l'hyperbole équilatère, nous ferons remarquer que, lorsqu'un angle droit tourne autour de son sommet, fixé en un point du périmètre d'une conique, les cordes de tous les arcs interceptés par cet angle concourent en un point fixe situé sur la normale de son sommet. Or, si la conique est une hyperbole équilatère, on pourra disposer l'angle droit de manière que ses côtés soient parallèles aux asymptotes. La corde de l'arc intercepté sera alors située à l'infini; le point invariable de la normale du sommet passera donc aussi à l'infini; ce qui revient à dire que les cordes des arcs interceptés par l'angle mobile seront constamment parallèles aux normales du sommet, ou, si l'on aime mieux, perpendiculaires aux tangentes en ce même sommet. Il est visible d'ailleurs, d'après ce qui a été démontré au commencemant de cet article, que le diamètre non transverse qui contient les pôles de ces cordes est perpendiculaire à celui qui contient le sommet, on a donc ce théorème :

Toutes les cordes d'une hyperbole équilatère, perpendiculaires à une même tangente, sont vues du point de contact sous un angle droit; en outre, le diamètre non transverse qui contient le pôle de l'une de ces cordes est perpendiculaire au diamètre transverse qui va au point de contact de la tangente.

A ce théorème correspond celui-ci : *Les angles circonscrits à une hyperbole équilatère, dont les cordes de contact sont perpendiculaires à une même tangente, interceptent, sur cette tangente, des parties qui sont vues du centre de la courbe sous des angles droits.*

Si, présentement, on rapporte l'hyperbole équilatère à un cercle directeur, de rayon arbitraire, ayant son centre sur le périmètre de la courbe, sa polaire réciproque sera une parabole qui, d'après ce qui a été démontré ci-dessus, sera telle que tous les angles droits qui lui seront circonscrits auront leur sommet sur la tangente menée à l'hyperbole par le centre du cercle directeur, et que leurs cordes de contact passeront par le pôle du diamètre non transverse, perpendiculaire à celui qui ira au centre de ce cercle. Il s'ensuit que *la polaire réciproque d'une hyperbole équilatère, par rapport à tout cercle directeur dont le centre est situé sur cette courbe, est une parabole qui a pour directrice la tangente menée à l'hyperbole par le centre du cercle directeur, et pour foyer le pôle du dia-*

mètre non transverse de cette hyperbole perpendiculaire à celui qui va au centre de ce cercle.

Il est facile aussi de reconnaître que l'axe de cette parabole sera la polaire du point k, de concours de la tangente au centre du cercle et du diamètre non transverse dont il vient d'être question; que son sommet sera le pôle de la seconde tangente que l'on pourra mener à l'hyperbole par le point k, et qu'enfin le point de contact de cette dernière sera sur la normale à l'hyperbole; de sorte que le lieu des points k sera la polaire réciproque de la développée de cette courbe, l'hyperbole étant prise pour courbe directrice; d'où il suit que ce lieu est du quatrième degré.

Voici présentement quelques applications.

Deux arcs interceptés sur un cercle par deux parallèles, sont vus sous des angles supplémentaires ou égaux des différens points de la circonférence, suivant que ces points sont entre ces parallèles ou hors d'elles. Si donc on prend un cercle directeur dont le centre soit sur la circonférence du premier, on pourra conclure de là que, *dans tout quadrilatère circonscrit à une parabole, de telle sorte que l'une de ses diagonales contienne le foyer; les angles dont les sommets sont aux extrémités de l'autre diagonale sont égaux ou supplémentaires.*

Donc, *deux cordes égales et parallèles d'une hyperbole équilatère sont vues d'un point de cette courbe sous des angles égaux ou supplémentaires, suivant que l'œil est compris ou non compris entre les deux droites.*

Ce théorème, indiqué dans la *Correspondance* de Bruxelles, est dû à M. Vaure. On pourrait le généraliser, en considérant dans le cercle deux cordes non parallèles; mais cela exigerait trop de développemens.

Le supplément d'un angle circonscrit à la parabole est moitié de l'angle sous lequel sa corde de contact est vue du foyer.

Donc, *l'angle sous lequel on voit une corde de l'hyperbole équilatère, de l'un des points de son périmètre, est double de celui sous lequel est vue, du même point, la portion du diamètre non* *transverse, perpendiculaire à celui qui passe par l'œil, interceptée entre les tangentes aux extrémités de cette corde.*

La portion d'une tangente mobile à la parabole, comprise entre deux tangentes fixes, est vue du foyer sous un angle constant.

Donc, *les angles inscrits à une hyperbole équilatère qui s'appuyent sur une corde fixe, interceptent, sur un diamètre non transverse fixe, des portions qui sont vues sous des angles égaux de l'une des extrémités du diamètre perpendiculaire à celui-là.*

Si un angle invariable se meut de manière que l'un de ses côtés passe constamment par le foyer d'une parabole et que l'autre lui soit constamment tangent, son sommet décrira une tangente à la courbe. Cette tangente sera celle du sommet si l'angle invariable est droit.

Donc, *si un angle de grandeur invariable tourne sur son sommet, fixé en un point du périmètre d'une hyperbole équilatère, la corde mobile qui joindra le point où l'un de ses côtés rencontra cette courbe avec celui où l'autre coupe le diamètre non transverse perpendiculaire à celui qui va au sommet de l'angle, passera constamment par un même point fixe situé sur la courbe. Ce point fixe sera celui où la normale du sommet de l'angle coupe la courbe si l'angle invariable est droit.*

Ce théorème offre un moyen facile de construire tant de points qu'on voudra d'une hyperbole équilatère, lorsqu'on connaîtra son centre et deux de ses points. Soient O le centre et A, B les deux points donnés; en prolongeant AO d'une quantité OC=OA, le point C sera un nouveau point de la courbe. Soit menée la corde BC et soit D le point où elle est coupée par la perpendiculaire menée à AC par le point O; en menant AD, nous pourrons considérer l'angle CAD comme un angle mobile et invariable, ayant son sommet A en un point de la courbe cherché, et alors BC sera la corde mobile qui joindra le point C d'intersection de la courbe avec l'un AC des côtés de l'angle, au point D d'intersection de son autre côté AD avec le diamètre transverse OD, perpendiculaire au diamètre AC de son sommet. En faisant donc varier la position de l'angle autour de son sommet, le point D, ainsi que les deux droites AC et BD, varieront sans cesse, et ces deux droites donneront, par leur intersection C, tant de points de la courbe qu'on voudra.

On démontrera facilement que, pour déterminer les asymptotes, il faudra décrire sur AB un segment capable de l'angle invariable CAD; mener des droites du point B aux points où ce segment est coupé par OD, et enfin conduire par le centre O des parallèles à ces deux droites.

Parmi divers théorèmes que l'on peut démontrer à l'aide des considérations qui précèdent, le suivant mérite d'être particulièrement remarqué. On sait que toute circonférence circonscrite à un triangle dont les trois côtés sont tangens à une parabole, contient le foyer de cette courbe (*). Il en résulte que toute conique qui a pour foyer un point d'une hyperbole équilatère qui touche les trois côtés d'un triangle inscrit, touche aussi le diamètre non transverse perpendiculaire à celui de ce foyer. De là on peut conclure que les pieds des quatre perpendiculaires abaissées de l'un des points d'une hyperbole équilatère, sur les trois côtés d'un triangle inscrit et sur le diamètre non transverse perpendiculaire à celui de ce point, se trouvent sur une même circonférence; or, le pied de cette dernière perpendiculaire n'est autre chose que le centre de la courbe.

Donc, *si, de l'un quelconque des points d'une hyperbole équilatère, on abaisse des perpendiculaires sur les trois côtés d'un triangle inscrit, la circonférence qui passera par les pieds de ces perpendiculaires contiendra aussi le centre de l'hyperbole.*

(*) Voy. la pag. 45 du présent volume.

J. D. G.

Si l'on remarque présentement que, par quatre points donnés, on peut, en général, faire passer une hyperbole équilatère, on obtiendra ce nouveau théorème :

Quatre points étant donnés sur un plan ; si, de chacun d'eux, on abaisse des perpendiculaires sur les directions des trois côtés du triangle qui a ses sommets aux trois autres points, les circonférences, qui passeront par les pieds des perpendiculaires relatives à ces triangles, se couperont toutes quatre en un même point, centre de l'hyperbole équilatère contenant les quatre points donnés.

Il est visible que, si les quatre points donnés appartiennent à une même circonférence, les quatre circonférences dont il s'agit se réduiront à quatre droites concourant en un même point (*).

Voilà donc un procédé fort simple pour construire le centre d'une hyperbole équilatère, assujétie à passer par quatre points donnés. Une fois ce centre obtenu, on obtiendra tant d'autres points de la courbe qu'on voudra, par le procédé indiqué plus haut.

L'hyperbole équilatère étant à elle-même sa directrice, la polaire réciproque de l'avant-dernier théorème sera le suivant :

Si l'on circonscrit arbitrairement un triangle à une hyperbole équilatère et qu'on lui mène une tangente également arbitraire, en construisant ensuite, sur les droites qui joignent le centre de la courbe aux trois sommets du triangle, comme côtés de l'angle droit, trois triangles rectangles dans lesquels l'autre côté de l'angle droit soit dirigé de ce centre vers la tangente, et s'y termine, le cercle circonscrit au triangle formé par les hypothénuses de ces trois triangles passera par le centre de l'hyperbole.

Concevons présentement que le triangle inscrit à l'hyperbole équilatère, dont il a été question ci-dessus, ait deux de ses côtés parallèles aux asymptotes de la courbe, son troisième côté passera à l'infini, et nous aurons cet autre théorème :

(*) Voy. la pag. 45 du présent volume.

J. D. G.

Si un rectangle a ses côtés respectivement parallèles aux asymptotes d'une hyperbole équilatère, et deux sommets opposés sur cette courbe, la diagonale qui joindra les deux sommets restans passera par le centre de l'hyperbole.

Ce théorème, de nature projective, peut être ensuite généralisé comme il suit :

Si un parallélogramme a ses côtés respectivement parallèles aux deux asymptotes d'une hyperbole quelconque, et deux sommets opposés sur la courbe, la diagonale, joignant les deux côtés restans, contiendra le centre de l'hyperbole.

De là résulte un procédé fort simple pour déterminer le centre d'une hyperbole lorsqu'on en donne trois points et qu'on donne en outre des parallèles à ses deux asymptotes.

Soit P le point où se croisent les cordes d'une conique C vues de l'un O de ses points sous un angle droit, et soit D la droite polaire de ce point; en plaçant le centre du cercle directeur au point O, et représentant par C′ la polaire réciproque de C, par P′ celle du point P, et par D′ le pôle de D, il est visible que C′ sera une parabole qui aura P′ pour directrice et D′ pour foyer; par un raisonnement analogue à l'un des précédens, on pourra donc prouver que les pieds des perpendiculaires abaissées du point O, sur les trois côtés d'un triangle inscrit à C et sur la droite D, sont situés sur la même circonférence ; or, le dernier de ces points est invariable ;

Donc, 1.° *si, d'un point fixe, pris sur une conique, on abaisse des perpendiculaires sur les directions des côtés de tant de triangles inscrits qu'on voudra, les circonférences déterminées par les pieds des perpendiculaires relatives à ces différens triangles se couperont toutes au même point ;* 2.° *la perpendiculaire élevée de ce point à la droite qui le joint au point de départ des perpendiculaires, sera la polaire du point où se croisent toutes les cordes de la conique vues du premier de ces points sous un angle droit.*

Au lieu d'abaisser des perpendiculaires, on pourrait abaisser des obliques faisant, dans le même sens, des angles égaux quelconques.

Il est visible aussi que, si un angle mobile invariable tourne autour de son sommet fixé en O, et si l'on joint par des droites les points où ses côtés rencontrent respectivement la conique C et la droite D ; la droite mobile, obtenue par cette construction, passera constamment par un point fixe situé sur la conique C.

Si l'angle mobile est droit, le point fixe sera en outre sur la normale du point O.

De tout cela résultent deux nouveaux procédés pour décrire une conique assujétie à passer par cinq points donnés ; mais ils sont plus compliqués que les procédés connus.

En imaginant que le triangle inscrit se change en une tangente et une corde menée par le point de contact, on parvient aussi aisément à déduire de ceci un procédé pour mener une tangente à une conique.

Châlons, le 11 novembre 1828.

DYNAMIQUE.

Solution d'un problème de dynamique;

Par M. Le Barbier.

PROBLÈME. Une roue circulaire porte ; à sa circonférence, un canal annulaire, dont toutes les sections, suivant des plans conduits par l'axe de la roue, sont des cercles égaux, ayant leurs centres sur une circonférence située dans le plan de cette roue et concentrique avec elle.

La roue est mobile dans l'espace, mais de telle sorte que son centre coïncide constamment avec le sommet d'un cône droit fixe, dont l'axe est vertical; quelle doit tourner uniformément autour de ce cône, avec une vîtesse donnée, de manière à le toucher successivement, suivant toutes ses génératrices, et à n'avoir avec lui qu'un frottement du second genre.

Dans l'intérieur du canal, supporté par la roue, on a introduit une sphère pesante, de même diamètre que ce canal, ayant son centre de gravité à son centre de figure, et à laquelle on a imprimé une vîtesse quelconque; et l'on demande de déterminer les lois du mouvement du centre de cette sphère, en faisant d'ailleurs abstraction de la résistance de l'aire et du frottement, et en supposant d'ailleurs la sphère assez petite pour qu'il soit permis de regarder toute sa masse comme étant réunie à son centre?

Solution. Rien n'étant plus facile que de combiner le mouvement de translation, donné et uniforme, du canal dans l'espace avec le mouvement circulaire varié du centre de la sphère, dans l'intérieur de ce canal supposé fixe, occupons-nous d'abord uniquement de la recherche des lois de ce dernier mouvement. C'est déjà de la sorte que nous en avons usé récemment (pag. 285), en traitant un problème analogue à celui-ci.

Les données du problème sont ici :

1.° L'angle générateur du cône fixe qu'enveloppe constamment la roue dans sa révolution, angle que nous représenterons par α;

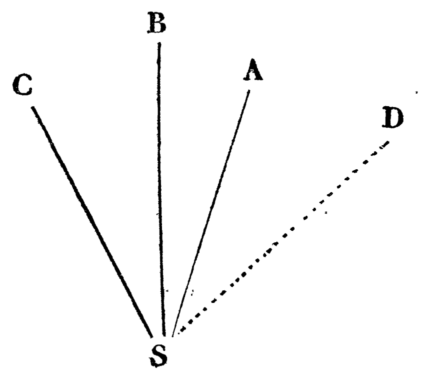
2.° La durée de cette révolution, que nous désignerons par T;

3.° Enfin, la distance constante du centre de la sphère mobile au sommet du cône, centre du mouvement du système; nous la représenterons par r.

En conséquence, le développement du cône sera un angle plan, exprimé par $2\varpi\text{Sin.}\alpha$; c'est cet angle que décrira la ligne de contact, sur le plan de la roue, pendant la durée d'une révolution entière, puisqu'on suppose que le frottement est du second genre seulement; et, puisqu'on suppose que le mouvement de révolution est uniforme, le mouvement angulaire de la ligne de contact sur le plan de la roue, dans le temps t, sera $\frac{2\pi t \,\mathrm{Sin.}\,\alpha}{T}$.

La seule force accélératrice du système est la gravité que nous désignerons, à l'ordinaire, par g. Si, à l'époque t, on la décompose en trois autres forces, la première dirigée suivant le rayon vecteur du centre de la sphère mobile, la seconde perpendiculaire au plan de la roue et la troisième suivant la tangente menée par le centre de cette sphère, au cercle qu'elle tend à décrire ; les deux premières composantes seront détruites par la résistance du canal, tandis que la troisième aura son plein effet. La force accélératrice vraiment efficace, à l'époque t, sera donc seulement le produit de la gravité g par le cosinus tabulaire de l'angle que fera alors la verticale menée par le centre de la sphère mobile avec la tangente menée par le même point au cercle qu'elle tend à décrire. Cherchons donc l'expression de ce cosinus.

Soit S le sommet du cône, centre de la roue, et soient, sur cette roue, SA le rayon qui était en contact avec le cône à l'origine des temps, SB celui qui est en contact avec ce même cône à l'époque t,



et enfin SC le rayon vecteur du centre de la sphère à la même époque. Les rayons SB et SC varieront de situation, sur le plan de la roue, avec le temps t; mais le rayon SA, au contraire; emporté à la vérité dans l'espace, avec cette roue, sera fixe sur elle, et, en conséquence, ce sera à sa direction que nous rapporterons, à chaque instant, celle du rayon vecteur du point mobile.

Supposons, pour fixer les idées, que le mouvement de la roue autour du cône et celui de la sphère dans le canal s'exécutent de manière à faire croître les deux angles ASB et ASC avec le temps t; posons $Ang.\mathrm{ASC}=\theta$, puisque ASB est l'angle décrit par la ligne de contact sur le plan de la roue durant le temps t, nous aurons, comme nous l'avons remarqué ci-dessus, $Ang.\mathrm{ASB}=\dfrac{2\varpi t\,\mathrm{Sin}.\alpha}{T}$, d'où $Ang.\mathrm{BSC}=\theta-\dfrac{2\varpi t\,\mathrm{Sin}\,\alpha}{T}$; et si nous menons, dans le plan de la roue, le rayon SD, perpendiculaire à SC, nous aurons

$$Cos.\mathrm{BSD}=Sin.\mathrm{BSC}=Sin\left(\theta-\frac{2\varpi t\,\mathrm{Sin}.\alpha}{T}\right).$$

Considérons présentement l'angle trièdre dont les trois arêtes sont SB, SD et l'axe du cône; cet angle trièdre est rectangle suivant l'arête SB; or, l'axe du cône étant vertical, et le rayon SD étant parallèle à la tangente menée par le centre de la sphère, au cercle qu'elle tend à décrire, il s'ensuit que l'angle plan hypothénusal, de cet angle trièdre, est précisément égal à celui dont nous cherchons le cosinus; or, les deux autres angles plans de cet angle trièdre sont, d'une part, l'angle BSD, et de l'autre, l'angle α, générateur du cône; et, comme d'ailleurs, dans tout angle trièdre rectangle, le cosinus de l'angle plan hypothénusal est égal au produit des cosinus des deux autres, il s'ensuit que le cosinus cherché doit avoir pour expression

$$\mathrm{Cos}.\alpha\,\mathrm{Sin}.\left(\frac{2\varpi t\,\mathrm{Sin}.\alpha}{T}\right),$$

et que, conséquemment, la force accélératrice efficace, à l'époque t, sera

$$g\text{Cos.}\alpha\text{Sin.}\left(\theta - \frac{2\varpi t\text{Sin.}\alpha}{T}\right);$$

on aura donc pour l'équation différentielle du mouvement du centre de la sphère, dans le canal supposé immobile,

$$r\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = g\text{Cos.}\alpha\text{Sin.}\left(\theta - \frac{2\varpi t\text{Sin.}\alpha}{T}\right);$$

équation qui, en posant, pour abréger

$$g = mr, \tag{1}$$

deviendra

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = m\text{Cos.}\alpha\text{Sin.}\left(\theta - \frac{2\varpi t\text{Sin}\,\alpha}{T}\right). \tag{2}$$

En multipliant les deux membres de cette équation par

$$2\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} - \frac{2\varpi\text{Sin.}\alpha}{T}\right) \quad \text{ou} \quad 2\frac{\mathrm{d.}}{\mathrm{d}t}\left(\theta - \frac{2\varpi t\text{Sin.}\alpha}{T}\right),$$

elle deviendra

$$2\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} - \frac{2\varpi\text{Sin.}\alpha}{T}\right)\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = 2m\text{Cos.}\alpha.\frac{\mathrm{d.}}{\mathrm{d}t}\left(\theta - \frac{2\varpi t\text{Sin.}\alpha}{T}\right)\text{Sin.}\left(\theta - \frac{2\varpi t\text{Sin.}\alpha}{T}\right);$$

ou bien

$$\mathrm{d.}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} - \frac{2\varpi\text{Sin.}\alpha}{T}\right)^2 = -2m\text{Cos.}\alpha.\mathrm{d.}\text{Cos.}\left(\theta - \frac{2\varpi t\text{Sin.}\alpha}{T}\right);$$

d'où, en intégrant

$$\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} - \frac{2\varpi\text{Sin.}\alpha}{T}\right)^2 = A - 2m\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\left(\theta - \frac{1\varpi t\text{Sin.}\alpha}{T}\right),$$

A étant la constante arbitraire.

Pour la faire disparaître, admettons qu'à l'origine des temps l'angle θ soit égal à β, et qu'alors le centre de la sphère mobile ait reçu, dans le sens du mouvement, une impulsion capable de lui faire faire une révolution entière dans le canal, durant le temps τ; on devra alors avoir, en même temps,

$$t=0\,,\quad \theta=\beta\,,\quad \frac{d\theta}{dt}=\frac{2\varpi}{\tau}\;;$$

ce qui donne, en substituant,

$$4\varpi^2\left(\frac{1}{\tau}-\frac{\text{Sin.}\alpha}{T}\right)^2=A-2m\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\beta\,,$$

d'où, en retranchant de l'équation précédente

$$\left(\frac{d\theta}{dt}-\frac{2\varpi\text{Sin.}\alpha}{T}\right)^2$$

$$=4\varpi^2\left(\frac{1}{\tau}-\frac{\text{Sin}\,\alpha}{T}\right)^2+2m\text{Cos.}\alpha\left\{\text{Cos.}\beta-\text{Cos.}\left(\theta-\frac{2\varpi t\text{Sin.}\alpha}{T}\right)\right\}. \quad (3)$$

Posons, pour abréger,

$$\theta-\frac{2\varpi t\text{Sin.}\alpha}{T}=\omega \qquad (4)$$

d'où

$$\frac{d\theta}{dt}-\frac{2\varpi\text{Sin}\,\alpha}{T}=\frac{d\omega}{dt}\;;$$

il viendra, en substituant dans (3)

$$\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2=4\varpi^2\left(\frac{1}{\tau}-\frac{\text{Sin.}\alpha}{T}\right)^2+2m\text{Cos.}\alpha\text{Cos}\,\beta-2m\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\omega\;;$$

d'où

$$\frac{d\omega}{dt}=\sqrt{4\varpi^2\left(\frac{1}{\tau}-\frac{\text{Sin}\,\alpha}{T}\right)^2+2m\text{Cos}.\alpha\text{Cos}.\beta-2m\text{Cos}.\alpha\text{Cos}.\omega}\,. \quad (5)$$

Posons encore

$$x=\sqrt{4\varpi^2\left(\frac{1}{\tau}-\frac{\text{Sin}.\alpha}{T}\right)^2+2m\text{Cos}.\alpha\text{Cos}.\beta-2m\text{Cos}.\alpha\text{Cos}\,\omega}\,; \quad (6)$$

d'où, en différentiant,

$$dx=\frac{m\text{Cos}.\alpha.d\omega.\text{Sin}.\omega}{\sqrt{4\varpi^2\left(\frac{1}{\tau}-\frac{\text{Sin}\,\alpha}{T}\right)^2+2m\text{Cos}.\alpha\text{Cos}\,\beta-2m\text{Cos}.\alpha\text{Cos}.\omega}}\,;$$

multipliant cette équation par l'équation (5), on en conclura

$$\frac{dx}{dt}=m\text{Cos}.\alpha\text{Sin}.\omega\,; \quad (7)$$

mais de l'équation (6) on tire, en quarrant et transposant,

$$\text{Cos}.\omega=\frac{4\varpi^2\left(\frac{1}{\tau}-\frac{\text{Sin}.\alpha}{T}\right)^2+2m\text{Cos}.\alpha\text{Cos}.\beta-x^2}{2m\text{Cos}.\alpha},$$

d'où

$$\text{Sin}.\omega=\frac{\sqrt{4m^2\text{Cos}.^2\alpha-\left\{4\varpi^2\left(\frac{1}{\tau}-\frac{\text{Sin}.\alpha}{T}\right)^2+2m\text{Cos}.\alpha\text{Cos}.\beta-x^2\right\}^2}}{2m\text{Cos}.\alpha},$$

remarquant alors que la quantité sous le radical se décompose en deux facteurs, et posant, pour abréger,

$$\left.\begin{aligned}G&=2m(1+\text{Cos}.\beta)\text{Cos}.\alpha+4\varpi^2\left(\frac{1}{\tau}-\frac{\text{Sin}.\alpha}{T}\right)^2,\\ H&=2m(1-\text{Cos}.\beta)\text{Cos}.\alpha-4\varpi^2\left(\frac{1}{\tau}-\frac{\text{Sin}.\alpha}{T}\right)^2,\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

on aura

$$\text{Sin.}\omega = \frac{\sqrt{(G-x^2)(H+x^2)}}{2m\text{Cos.}\alpha}\ ; \qquad (9)$$

ce qui donnera, en substituant dans (7),

$$\mathrm{d}t = \frac{2\mathrm{d}x}{\sqrt{(G-x^2)(H+x^2)}}\ ; \qquad (10)$$

telle est donc l'équation qu'il faudrait intégrer pour obtenir la solution la plus générale du problème.

Afin de pouvoir poursuivre l'intégration, sans trop particulariser la solution, posons $H=0$, c'est-à-dire (1) et (8),

$$2\varpi g^2\left(\frac{1}{\tau}-\frac{\text{Sin.}\alpha}{T}\right)^2 = r(1-\text{Cos.}\beta)\text{Cos}\,\alpha\ ; \qquad (11)$$

ce qui peut arriver de bien de manières différentes, puisque nous n'établissons ainsi qu'une relation unique entre les cinq données arbitraires et indépendantes r, α, β, τ, T; il en résultera $G=4m\text{Cos.}\alpha$; de sorte que l'équation (10) deviendra

$$\mathrm{d}t = \frac{2\mathrm{d}x}{x\sqrt{4m\text{Cos.}\alpha - x^2}}\ ,$$

dont l'intégrale sera

$$t+B = \frac{1}{2\sqrt{m\text{Cos.}\alpha}}\,\text{Log.}\,\frac{\sqrt{4m\text{Cos.}\alpha - x^2}-2\sqrt{m\text{Cos.}\alpha}}{\sqrt{4m\text{Cos.}\alpha - x^2}+2\sqrt{m\text{Cos.}\alpha}}\ ; \qquad (12)$$

B étant une nouvelle constante arbitraire.

Dans l'hypothèse actuelle de $H=0$, l'équation (6) donne en quarrant

$$x^2 = 2m\text{Cos.}\alpha.(1-\text{Cos.}\omega)\ ,$$

d'où

$$\sqrt{4m\text{Cos.}\alpha - x^2} = \sqrt{2m\text{Cos.}\alpha(1+\text{Cos.}\omega)} = 2\text{Cos.}\tfrac{1}{2}\omega\sqrt{m\text{Cos.}\alpha}\ ;$$

en conséquence l'équation (12) deviendra

$$2(1+B)\sqrt{m\text{Cos.}\alpha} = \text{Log.}\frac{\text{Cos.}\frac{1}{2}\omega - 1}{\text{Cos.}\frac{1}{2}\omega + 1} = \text{Log.}\frac{\text{Cos.}\frac{1}{2}\left(\theta - \frac{2\varpi t\text{Sin.}\alpha}{T}\right) - 1}{\text{Cos.}\frac{1}{2}\left(\theta - \frac{2\varpi t\text{Sin.}\alpha}{T}\right) + 1},$$

Pour faire disparaître la constante B rappelons-nous qu'on doit avoir, en même temps, $t=0$ et $\theta=\beta$, ce qui donne, en substituant,

$$2B\sqrt{m\text{Cos.}\alpha} = \text{Log.}\frac{\text{Cos.}\frac{1}{2}\beta - 1}{\text{Cos.}\frac{1}{2}\beta + 1}\ ;$$

retranchant cette équation de la précédente, on aura

$$2t\sqrt{m\text{Cos.}\alpha} = \text{Log.}\left\{\frac{1+\text{Cos.}\frac{1}{2}\beta}{1-\text{Cos.}\frac{1}{2}\beta}\cdot\frac{1-\text{Cos.}\frac{1}{2}\left(\theta - \frac{2\varpi t\text{Sin.}\alpha}{T}\right)}{1+\text{Cos.}\frac{1}{2}\left(\theta - \frac{2\varpi t\text{Sin.}\alpha}{T}\right)}\right\};$$

ou bien

$$2t\sqrt{m\text{Cos.}\alpha} = \text{Log.}\frac{\text{Tang}^2\frac{1}{4}\left(\theta - \frac{2\varpi t\text{Sin.}\alpha}{T}\right)}{\text{Tang}^2\frac{1}{4}\beta} = 2\text{Log.}\frac{\text{Tang.}\frac{1}{4}\left(\theta - \frac{2\varpi t\text{Sin.}\alpha}{T}\right)}{\text{Tang.}\frac{1}{4}\beta}\ ;$$

c'est-à-dire,

$$t\sqrt{m\text{Cos.}\alpha} = \text{Log.}\frac{\text{Tang.}\frac{1}{4}\left(\theta - \frac{2\varpi t\text{Sin.}\alpha}{T}\right)}{\text{Tang}\frac{1}{4}\beta}\ ;$$

ce qui donne

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{4}\left(\theta - \frac{2\varpi t\text{Sin.}\alpha}{T}\right) = e^{t\sqrt{m\text{Cos.}\alpha}}.\text{Tang.}\tfrac{1}{4}\beta\ ,$$

et, par suite,

$$\theta = \frac{2\varpi t \operatorname{Sin.}\alpha}{T} + 4 \operatorname{Arc.}\left(\operatorname{Tang.} = e^{t\sqrt{m \operatorname{Cos.}\alpha}} . \operatorname{Tang.} \tfrac{1}{4}\beta\right). \quad (13)$$

Au moyen de cette équation on pourra, pour chaque instant, déterminer la situation du rayon vecteur du centre de la sphère mobile, sur le plan de la roue ; mais on ne pourra, que par tâtonnement, résoudre la question inverse, c'est-à-dire déterminer à quel instant ce rayon vecteur aura une situation donnée.

Cherchons présentement l'équation polaire de la surface conique décrite dans l'espace par le rayon vecteur du centre de la sphère mobile. Rapportons ce rayon vecteur au plan horizontal conduit par le sommet du cône et à la projection sur ce plan de la génératrice, suivant laquelle ce cône est touché par le plan de la roue à l'origine des temps. Soient φ l'angle que fait le rayon vecteur avec ce plan à l'époque t, et ψ l'angle que fait sa projection, sur ce plan, avec la projection de la génératrice dont il vient d'être question.

Considérons l'angle trièdre dont les arêtes sont l'axe du cône, le rayon vecteur dont il s'agit et la ligne de contact de ce cône avec le plan de la roue à l'époque t; cet angle trièdre est rectangle suivant cette dernière droite ; son angle plan hypothénusal est évidemment le complément de l'angle φ, et ses deux autres angles plans sont α et $\theta - \frac{2\varpi t \operatorname{Sin.}\alpha}{T}$; d'où il suit, en vertu du théorème rappelé ci-dessus, qu'on doit avoir

$$\operatorname{Sin.}\varphi = \operatorname{Cos.}\alpha \operatorname{Cos.}\left(\theta - \frac{2\varpi t \operatorname{Sin.}\alpha}{T}\right). \quad (14)$$

Quant à l'angle ψ, il est manifeste qu'il est la mesure de l'angle dièdre compris entre deux plans verticaux conduits par l'axe du cône, l'un passant par le rayon vecteur mobile et l'autre par la génératrice suivant laquelle le cône était touché par la roue à l'origine des temps. Cet angle est partagé en deux autres par le plan vertical qui passe par la ligne de contact qui répond à l'époque t ; l'un de ces deux-ci est évidemment $\frac{2\varpi t}{T}$, et quant à l'autre, c'est un des angles dièdres obliques de notre angle trièdre rectangle, en le représentant par ξ, on aura

$$\text{Cot.}\varphi\text{Cos.}\xi=\text{Tang.}\alpha \ ,$$

d'où

$$\xi=\text{Arc.}(\text{Cos.}=\text{Tang.}\alpha\text{Tang.}\varphi) \ ,$$

et conséquemment

$$\psi=\frac{2\varpi t}{T}+\text{Arc.}(\text{Cos.}=\text{Tang}\,\alpha\text{Tang.}\varphi) \ ; \qquad (15)$$

en joignant à ces équations l'équation (3), c'est-à-dire

$$\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}-\frac{2\varpi\text{Sin.}\alpha}{T}\right)^2$$

$$=4\varpi^2\left(\frac{1}{\tau}-\frac{\text{Sin.}\alpha}{T}\right)^2+2m\text{Cos.}\alpha\left\{\text{Cos}\,\beta-\text{Cos.}\left(\theta-\frac{2\varpi t\text{Sin.}\alpha}{T}\right)\right\}, \ (3)$$

et éliminant donc t et θ entre elle, l'équation résultante en φ et ψ sera l'équation polaire cherchée de la surface conique décrite par le rayon vecteur de la sphère mobile.

En raisonnant uniquement dans l'hypothèse $H=0$, déjà admise ci-dessus, l'équation (13) donne

$$\theta-\frac{2\varpi t\text{Sin.}\alpha}{T}=4\text{Arc.}\left\{\text{Tang.}=e^{t\sqrt{m\text{Cos.}\alpha}}.\text{Tang.}\tfrac{1}{4}\beta\right\} \ ;$$

mais l'équation (14) donne

$$\theta-\frac{2\varpi t\text{Sin.}\alpha}{T}=\text{Arc.}\left(\text{Cos.}=\frac{\text{Sin.}\varphi}{\text{Cos.}\alpha}\right) \ ;$$

égalant donc ces deux valeurs, afin d'éliminer θ, on aura

$$\text{Arc.}\left(\text{Cos.}=\frac{\text{Sin.}\varphi}{\text{Cos.}\alpha}\right)=4\text{Arc.}\left(\text{Tang.}=e^{t\sqrt{m\text{Cos.}\alpha}}.\text{Tang.}\tfrac{1}{4}\beta\right);$$

d'un autre côté, l'équation (15) donne

$$t=\frac{T}{2\varpi}\{\psi-\text{Arc}(\text{Cos.}=\text{Tang}\,\alpha\text{Tang.}\varphi)\}\;;$$

substituant donc cette valeur de t dans la précédente, on obtiendra, pour l'équation polaire de la surface conique décrite par le rayon vecteur du centre de la sphère mobile,

$$\text{Arc}\left(\text{Cos.}=\frac{\text{Sin.}\varphi}{\text{Cos.}\alpha}\right)=4\text{Arc}\left\{\text{Tang.}=e^{\frac{T\sqrt{m\text{Cos}\,\alpha}}{2\varpi}[\psi-\text{Arc}(\text{Cos.}=\text{Tang.}\alpha\text{Tang.}\varphi)]}\text{Tang.}\tfrac{1}{4}\beta\right\}.$$

Si l'on veut avoir l'équation de cette même surface conique en coordonnées rectangulaires, en prenant pour axe des z, l'axe même du cône, et pour axe des x, la projection sur le plan horizontal conduit par son sommet de la génératrice suivant laquelle il est touché par le plan de la roue à l'origine des temps; on remarquera que l'on a ainsi

$$\text{Sin}\,\varphi=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\;,\qquad \text{Tang}\,\varphi=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\psi=\text{Arc}\left(\text{Tang}=\frac{y}{x}\right)\;;$$

d'où, en substituant

$$\text{Arc}\left(\text{Cos.}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}.\text{Cos.}\alpha}\right)$$

$$=4\text{Arc}\left\{\text{Tang.}=e^{\frac{T\sqrt{m\text{Cos}\,\alpha}}{2\varpi}\left[\text{Arc}\left(\text{Tang}=\frac{y}{x}\right)-\text{Arc}\left(\text{Cos.}=\frac{z\text{Tang.}\alpha}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right]}.\text{Tang.}\tfrac{1}{4}\beta\right\}.$$

Si l'on veut enfin avoir la courbe à double courbure décrite dans l'espace par le centre de la sphère mobile, cette courbe sera donnée par cette dernière équation combinée avec l'équation

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$

de la sphère sur laquelle ce point est constamment situé.

On voit, par ce qui précède, que des problèmes de dynamique, fort simples en apparence, peuvent souvent conduire à des résultats d'une complication inattendue.

GÉOMÉTRIE APPLIQUÉE.

Note sur la théorie analytique du moiré;

Par un ABONNÉ.

SOIENT deux systèmes de lignes droites ou courbes, non consécutives, situées dans chaque système sur une surface plane ou courbe où elles se succèdent, non consécutivement, suivant une loi mathématique quelconque.

Imaginons ces deux systèmes de lignes placés, dans un situation quelconque, entre l'œil et un plan de projection, ils s'y projeteront suivant deux systèmes de droites ou de courbes planes, se succédant également les unes aux autres, non consécutivement, dans chaque système, suivant une loi mathématique déterminée.

Les lignes de chaque système croiseront, en général, les lignes de l'autre système, et les points où le croisement aura lieu appartiendront à un troisième système de courbes formant, ce qu'on appelle, un *moiré*, parce qu'on cherche à les imiter par la pression d'un cylindre, dans l'étoffe de soie appelée *moire*.

Or, les deux systèmes étant donnés de nature et de situation dans l'espace, ainsi que le plan de projection, on peut, pour une situation donnée de l'œil, demander quelles seront, sur ce plan, les courbes du moiré.

Ne nous proposant ici que de donner seulement une idée de la manière dont on peut attaquer ces sortes de problèmes, nous supposerons que les deux systèmes sont composés de droites parallèles équidistantes, situées dans des plans non parallèles.

Par l'œil, concevons trois droites, la première, que nous prendrons pour axe des z, parallèle à la commune section des plans des deux systèmes, et les deux autres que nous prendrons pour axes des x et des y, respectivement parallèles aux droites de ces deux systèmes. Il est aisé de voir qu'alors les deux couples d'équations

$$(1)\quad \begin{cases} x=a\,, \\ z=d+mg\,, \end{cases} \qquad\qquad (2)\quad \begin{cases} y=b\,, \\ z=e+nh\,, \end{cases}$$

dans lesquels m et n sont supposés des nombres entiers variables, positifs ou négatifs, pourront représenter respectivement les droites des deux systèmes.

Pour des valeurs déterminées quelconques de m et n, ces équations ne représentent que deux droites seulement, que nous considérerons comme correspondantes dans les deux systèmes; le rayon visuel qui passera à la fois par ces deux droites, ira percer le plan de projection au point où se croiseront leurs projections sur ce plan.

Soient prises pour les équations de ce rayon

$$x=Az\,, \qquad\qquad y=Bz\,; \qquad\qquad (3)$$

A et B étant deux coefficiens qu'il s'agira de déterminer. Il faudra exprimer, pour cela, que les quatre équations (1) et (3), ainsi que les quatre équations (2) et (3) ont lieu à la fois. Eliminant donc tour à tour x, y, z, d'abord entre les unes, puis entre les autres, il viendra

$$A(d+mg)=a\ , \qquad B(e+nh)=b\ ; \qquad (4)$$

tirant de là les valeurs de A et B, pour les substituer dans les équations (3), on aura, pour les équations générales du rayon visuel qui passe par deux droites correspondantes des deux systèmes, et va percer le plan de projection au point où se croisent les projections de ces droites sur ce plan,

$$(d+mg)x=az\ , \qquad (e+nh)y=bz\ ; \qquad (5)$$

On en déduirait les équations de tous les rayons visuels, passant par les autres droites correspondantes des deux systèmes, en y mettant successivement tous les nombres de la suite naturelle, positifs et négatifs, tant pour m que pour n, de sorte que, pour chacun, on aurait toujours

$$m=n\ . \qquad (6)$$

Si donc des équations (5) on tire les valeurs de m et n, pour les substituer dans cette dernière, l'équation résultante en x, y, z sera celle d'une surface conique, lieu de tous ces rayons. Or, les équations (5) donnent

$$m=\frac{az-dx}{gx}\ , \qquad n=\frac{bz-ey}{hy}\ ,$$

l'équation cherchée sera donc

$$\frac{az-dx}{gx}=\frac{bz-ey}{hy}\ ,$$

ou bien

$$hy(az-dx)=gx(bz-ey)\ ,$$

équation d'une surface conique du second ordre, passant par les trois axes des coordonnées.

Il est aisé de conclure de là que, dans le cas particulier qui nous occupe, *les courbes du moiré sont des sections coniques, passant toutes par les trois points où leur plan est percé par les parallèles conduites par l'œil à l'intersection des plans des deux systèmes de droites et à ces droites elles-mêmes.*

Il ne faut pas perdre de vue que cette conclusion suppose essentiellement que les lignes dont il s'agit sont rigoureusement droites, rigoureusement parallèles, rigoureusement équidistantes, et que les deux surfaces qui les contiennent sont rigoureusement planes et immobiles. C'est parce qu'il est extrêmement difficile, dans la pratique, de satisfaire exactement à toutes ces conditions que, même dans les cas les plus simples, les courbes du moiré présentent une si grande variété de formes.

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Démonstration de quelques théorèmes ;

Par M. P. R.

Un article inséré dans la *Correspondance* de M. Quetelet (tom. IV, pag. 205) nous a fait naître l'idée d'un petit supplément à l'article de la pag. 113 du XVIII.^{me} volume du présent recueil. Le voici :

THÉORÈME I. Si, par un point pris arbitrairement dans l'in-

térieur d'un triangle, on mène des parallèles à ses trois côtés, ces droites diviseront ce triangle en six parties, dont trois seront des triangles tels que l'aire du triangle proposé sera égale au quarré de la somme des racines quarrées des aires de ces trois là.

Démonstration. Soit Δ le triangle proposé; soient T, T', T'' les trois triangles intérieurs et P, P', P'' les trois parties qui sont des parallélogrammes respectivement opposés; on aura

$$\Delta=T+T'+T''+P+P'+P'' \ ;$$

mais on a (tom. XVIII, pag. 114)

$$P=2\sqrt{T'T''} \ , \qquad P'=2\sqrt{T'T''} \ , \qquad P''=2\sqrt{TT'} \ ;$$

donc

$$\Delta=T+T'+T''+2\sqrt{T'T''}+2\sqrt{T''T}+2\sqrt{TT'} \ ,$$

c'est-à-dire,

$$\Delta=(\sqrt{T}+\sqrt{T'}+\sqrt{T''})^2 \ ,$$

comme nous l'avions annoncé.

THÉORÈME II. *Si, par un point pris arbitrairement dans l'intérieur d'un tétraèdre, on conduit des plans parallèles à ses quatre faces, ces plans diviseront le tétraèdre en quatorze parties, dont quatre seront des tétraèdres tels que le volume du tétraèdre proposé sera égal au cube de la somme des racines cubiques des volumes de ceux-là.*

Démonstration, Soit Δ le tétraèdre proposé; soient T, T', T'' T''' les quatre tétraèdres intérieurs; les dix autres parties seront, savoir: quatre parallélipipèdes P, P', P'', P''', respectivement opposés, et six troncs de prismes quadrangulaires ayant une arête latérale nulle, et que nous désignerons par (pp'), (pp''), $(p'p'')$, $(p''p''')$, $(p'p''')$, (pp'''), suivant les parallélipipèdes entre lesquels ils se trouveront situés.

Cela posé, on aura

$$\Delta=T+T'+T''+T'''+P+P'+P''+P'''$$

$$+(pp')+(pp'')+(p'p'')+(p''p''')+(p'p''')+(pp''') \ ,$$

mais on a trouvé (*Annales*, tom. XVIII, pag. 122)

$$P=6\sqrt[3]{T'T''T'''} \ , \quad P'=6\sqrt[3]{TT''T'''} \ , \quad P''=6\sqrt[3]{TT'T'''} \ , \quad P'''=6\sqrt[3]{TT'T''} \ .$$

$$(pp')=3\sqrt[3]{T''^2T'''}+3\sqrt[3]{T''T'''^2} \ , \qquad (p''p''')=3\sqrt[3]{T^2T'}+3\sqrt[3]{TT'^2} \ ,$$

$$(pp'')=3\sqrt[3]{T'^2T'''}+3\sqrt[3]{T'T'''^2} \ , \qquad (p'p''')=3\sqrt[3]{T^2T''}+3\sqrt[3]{TT''^2} \ ,$$

$$(p'p'')=3\sqrt[3]{T'^2T''}+3\sqrt[3]{T'T''^2} \ , \qquad (pp''')=3\sqrt[3]{T'^2T''}+3\sqrt[3]{T'T''^2} \ ,$$

donc

$$\Delta=T+T'+T''+T'''+3\sqrt[3]{T^2T'}+3\sqrt[3]{TT'^2}+3\sqrt[3]{T^2T''}+3\sqrt[3]{TT''^2}$$

$$+3\sqrt[3]{T'^2T''}+3\sqrt[3]{T'T''^2}+3\sqrt[3]{T^2T'''}+3\sqrt[3]{TT'''^2}+3\sqrt[3]{T'^2T'''}$$

$$+3\sqrt[3]{T'T'''^2}+3\sqrt[3]{T''^2T'''}+3\sqrt[3]{T''T'''^2}+6\sqrt[3]{TT'T''}$$

$$+6\sqrt[3]{TT'T'''}+6\sqrt[3]{TT''T'''}+6\sqrt[3]{T'T''T'''} \ ;$$

c'est-à-dire,

$$\Delta=(\sqrt[3]{T}+\sqrt[3]{T'}+\sqrt{T''}+\sqrt[3]{T'''})^3 \ ,$$

comme nous l'avions annoncé.

Ces deux théorèmes, dont le premier avait déjà été remarqué en l'endroit cité, par M. Lobatto, peuvent au surplus être directement établis, d'une manière fort simple, par les considérations suivantes :

I. Les trois triangles T, T', T'' sont semblables au triangle Δ, et chaque côté de ce dernier est évidemment la somme de ses homologues dans les trois autres ; or, les côtés homologues des triangles semblables sont proportionnels aux racines quarrées de leurs aires; donc on doit avoir aussi

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{T}+\sqrt{T'}+\sqrt{T''} ,$$

et par suite

$$\Delta=(\sqrt{T}+\sqrt{T'}+\sqrt{T''})^2 .$$

II. Les quatre tétraèdres T, T', T'', T''' sont semblables au tétraèdre Δ, et chaque arête de ce dernier est évidemment la somme de ses homologues dans les trois autres ; or, les arêtes homologues des tétraèdres semblables sont proportionnelles aux racines cubiques de leurs volumes ; donc on doit avoir aussi

$$\sqrt[3]{\Delta}=\sqrt[3]{T}+\sqrt[3]{T'}+\sqrt[3]{T''}+\sqrt[3]{T'''} ,$$

et par suite

$$\Delta=(\sqrt[3]{T}+\sqrt[3]{T'}+\sqrt[3]{T''}+\sqrt[3]{T'''})^3 ;$$

A l'aide de ces considérations on reconnaîtra immédiatement la vérité des deux théorèmes que voici, et dont le premier est celui dont on s'occupe spécialement dans l'endroit cité de la correspondance. Il est surprenant qu'aucun des géomètres qui l'ont traité, n'ait songé à le ramener à des considérations aussi simples.

THÉORÈME III. Si, sur l'un des côtés d'un triangle, on prend arbitrairement n *points, et que, par chacun d'eux, on mène des parallèles à ses deux autres côtés, ces parallèles diviseront* *le triangle en* $\frac{n(n+1)}{2}$ *parallélogrammes, et en* $n+1$ *triangles, tels que l'aire du triangle proposé sera égale au quarré de la somme des racines quarrées des aires de ceux-là.*

THÉORÈME IV. Si, sur l'une des arêtes d'un tétraèdre, on prend arbitrairement n *points, et que, par chacun d'eux, on conduise des plans parallèles aux deux faces qui déterminent l'arête opposée, ces plans diviseront le tétraèdre en* $\frac{n(n+1)}{2}$, *troncs de pyramides quadrangulaires, et en* $n+1$ *tétraèdres tels que le volume du tétraèdre proposé sera égal au cube de la somme des racines cubiques des volumes de ceux-là.*

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problème de dynamique.

TOUT étant comme dans le problème de la pag. 359, avec cette différence seulement que la roue est exactement équilibrée autour de son centre, sommet du cône fixe, n'est sollicitée à se mouvoir que par le poids de la sphère introduite dans l'intérieur du canal; on demande de déterminer les circonstances du mouvement tant de cette sphère que de la roue?

Problèmes de géométrie.

I. A un triangle quelconque on en inscrit un autre dont les sommets sont les pieds des trois hauteurs du premier; à celui-ci on en inscrit un troisième, sous les mêmes conditions; au troisième, on en inscrit un quatrième, de la même manière, et ainsi de suite indéfiniment. Sur quelle ligne sont situés les points où se coupent les trois hauteurs de cette suite de triangles ?

II. A un triangle quelconque on inscrit un cercle, puis un triangle qui a ses sommets aux points de contact ; à ce second triangle on inscrit également un cercle, puis un triangle qui a ses sommets aux points de contact, en continuant ainsi indéfiniment. Sur quelle ligne sont situés les centres de tous ces cercles ?

III. On mène, dans un triangle quelconque, les droites qui divisent les angles en deux parties égales, et l'on fait des points où ces droites rencontrent les côtés opposés des sommets d'un second triangle ; on mène, dans celui-ci, les droites qui divisent les angles en deux parties égales, et l'on fait des points où ces droites rencontrent les côtés opposés, les sommets d'un troisième triangle, et ainsi de suite indéfiniment. Sur quelle ligne sont situés les points où se coupent, dans chaque triangle, les trois droites qui divisent les angles en deux parties égales.

Autre.

Y a-t-il, dans une ellipse, une corde mobile de grandeur constante, qui, dans son mouvement, enveloppe un cercle ; et s'il y existe une telle corde, quelle en est la longueur, et quel est le rayon du cercle qu'elle enveloppe ?

Théorèmes de géométrie.

Dans tout tétraèdre les perpendiculaires abaissées des sommets sur les plans des faces respectivement opposées, sont quatre génératrices d'un même mode de génération d'une même surface réglée du second ordre.

Autre.

Il est impossible de décrire, d'un seul trait de crayon, sans quitter le papier, ni revenir sur des lignes déjà tracées, un quadrilatère simple, avec ses deux diagonales.

FIN DU TOME DIX-NEUVIÈME.

TABLE

Des matières contenues dans le XIX.me volume des Annales.

ANALYSE ALGÉBRIQUE.

DYNAMIQUE.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

GÉOMÉTRIE APPLIQUÉE.

GÉOMÉTRIE DES COURBES.

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

GÉOMÉTRIE PURE.

GÉOMÉTRIE DE SITUATION.

HYDRODYNAMIQUE.

MÉTÉOROLOGIE.

OPTIQUE.

STATIQUE.

CORRESPONDANCE

Entre les questions proposées *et les* questions résolues.

Tome XVII,	pag. 155,	Problème I, II, résolus,	tome XIX, pages	175—181
	pag. 283,	Problème I.		339—349
Tom. XVIII,	pag. 184,	Problèmes.		——
	pag. 216,	Problème.		——
	pag. 252,	Problèmes I, II, III.		——
	pag. 302,	Théorèmes.		——
	pag. 339,	Théorèmes.		——
	pag. 378,	Théorèmes.		——
Tom. XIX,	pag. 36,	Problème.		——
	pag. 96,	Problème.		252—256

ERRATA

Pour le dix-neuvième volume des Annales.

PAGE 65, ligne 4 du texte, — *inscrits et circonscrits*; lisez: *inscrit et circonscrit.*

Deux dernières lignes, — même correction.

Pag. 66, ligne 14, même correction.

Avant dernière ligne, — couperont; *lisez:* toucheront.

Pag. 67, lignes 9 et 10, — placez ces mots: *dans les deux tétraèdres;* entre deux virgules.

Pag. 76, ligne 20, — tracés; *lisez*: tracé.

Pag. 106, ligne 3, — supprimez *fixes.*

Pag. 133, ligne 6 de la note, — placez une virgule après le mot *huitième*.

Pag. 135, ligne 7, en remontant, — supprimez la troisième virgule.

Pag. 161, ligne 6, en remontant, — *tangent*; lisez*: tangent conduit.*

Pag. 169, ligne 11, — *cône;* lisez*: cône du second ordre.*

Pag. 171, ligne 13, — même correction.

Pag. 173, lignes 7 et 13, en remontant, — même correction.

Pag. 174, ligne 4, en remontant, — même correction.

Pag. 285, ligne 7, en remontant, — mouvement; *lisez*: mouvement rectiligne.

Pag. 296, ligne 6, — *placez une virgule après le mot* membre.

Pag. 316, ligne 4, en remontant, — *même correction après le mot* axe.

Pag. 321, ligne 14, — *circonférence*; lisez; *circonférence d'un cercle.*

*Supplément à l'*Errata *du Tome XVIII.*me

Pag. 103, ligne 15, — $\left(u+\frac{E}{2B}\right)$; lisez: $\left(u+\frac{E}{2B}\right)^2$.

Pag. 106, à la note — *ajoutez:* voyez aussi *Annales*, tom. VII, pag. 229.

Pag. 371, ligne 2, — supprimez le mot *trois.*

AVIS au Relieur,

Sur le placement des Planches.

Planche unique.	Après la page 64.