
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

GERGONNE

Statique. Démonstration d'un théorème de M. Chasles

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 18 (1827-1828), p. 372-377

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1827-1828__18__372_0

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1827-1828, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

STATIQUE.
Démonstration d'un théorème de M. CHASLES;

Par M. GERGONNE.

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

SOIENT, suivant les notations reçues (x', y', z') , (x'', y'', z'') , (x''', y''', z''') , des points de l'espace invariablement liés entre eux, mais libres d'ailleurs de toute gêne étrangère, auxquels soient appliquées, dans des directions quelconques, des forces P' , P'' , P''' ,, dont les composantes parallèles aux axes supposés rectangulaires soient respectivement (X', Y', Z') , (X'', Y'', Z'') , (X''', Y''', Z''') ,

Soient, en outre (t, u, v) , (t', u', v') , deux points de l'espace invariablement liés aux premiers, auxquels soient appliqués des forces Q, Q' , dont les composantes parallèles aux axes soient respectivement (T, U, V) , (T', U', V') .

Pour que le système de ces deux dernières forces puisse remplacer, comme équivalent, le système de toutes les autres, il faudra qu'on ait, comme l'on sait,

$$\left. \begin{aligned} T+T' &= \Sigma(X') ; \\ U+U' &= \Sigma(Y') ; \\ V+V' &= \Sigma(Z') ; \end{aligned} \right\} (1)$$

$$\left. \begin{aligned} Tu + T'u' = \Sigma(X'y') , \\ Uv + U'v' = \Sigma(Y'z') , \\ Vt + V't' = \Sigma(Z'x') ; \end{aligned} \right\} (2) \quad \left. \begin{aligned} T\varphi + T'\varphi' = \Sigma(X'z') , \\ Ut + U't' = \Sigma(Y'x') , \\ Vu + V'u' = \Sigma(Z'y') ; \end{aligned} \right\} (3)$$

d'où l'on voit que le problème se présente sous une forme indéterminée, puisqu'il n'offre que *neuf* équations seulement pour déterminer *douze* inconnues. Mais on sait qu'un problème, dans lequel le nombre des inconnues surpasse le nombre des équations, et quelquefois impossible; nous avons donc besoin de prouver que celui qui nous occupe n'est point dans ce cas.

Des équations (2) et (3) on tire

$$\left. \begin{aligned} t = \frac{V'\Sigma(Y'x') - U'\Sigma(Z'x')}{UV' - VU'} , \\ u = \frac{T'\Sigma(Z'y') - V'\Sigma(X'y')}{VT' - TV'} , \\ v = \frac{U'\Sigma(X'z') - T'\Sigma(Y'z')}{TU' - UT'} ; \end{aligned} \right\} (4) \quad \left. \begin{aligned} t' = - \frac{V\Sigma(Y'x') - U\Sigma(Z'x')}{UV' - VU'} , \\ u' = - \frac{T\Sigma(Z'y') - V\Sigma(X'y')}{VT' - TV'} , \\ v' = - \frac{U\Sigma(X'z') - T\Sigma(Y'z')}{TU' - UT'} ; \end{aligned} \right\} (5)$$

or, il résulte de la forme de ces valeurs que, pourvu qu'on n'ait aucune des équations comprises dans la double égalité

$$\frac{T}{T'} = \frac{U}{U'} = \frac{V}{V'} \quad \text{ou} \quad \frac{T'}{T} = \frac{U'}{U} = \frac{V'}{V} ,$$

aucune d'elles ne sera infinie. Mais cette double égalité peut encore être écrite comme il suit:

$$\frac{T}{T'} + 1 = \frac{U}{U'} + 1 = \frac{V}{V'} + 1 \quad \text{ou} \quad \frac{T'}{T} + 1 = \frac{U'}{U} + 1 = \frac{V'}{V} + 1$$

c'est-à-dire,

$$\frac{T+T'}{T'} = \frac{U+U'}{U'} = \frac{V+V'}{V'} \quad \text{ou} \quad \frac{T+T'}{T} = \frac{U+U'}{U} = \frac{V+V'}{V}$$

ou enfin (1)

$$\frac{\Sigma(X')}{T'} = \frac{\Sigma(Y')}{U'} = \frac{\Sigma(Z')}{V'} \quad \text{ou} \quad \frac{\Sigma(X')}{T} = \frac{\Sigma(Y')}{U} = \frac{\Sigma(Z')}{V} ;$$

donc, pourvu que l'on choisisse soit les trois composantes T, U, V , soit les trois composantes T', U', V' , de telle sorte qu'elles ne soient pas proportionnelles à $\Sigma(X'), \Sigma(Y'), \Sigma(Z')$, ce qu'on peut toujours faire d'une infinité de manières différentes, aucune des valeurs (4) et (5) ne sera infinie; de manière que le système proposé peut, en effet, d'une infinité de manières différentes, être remplacé par deux forces.

Cela posé, les équations des directions des deux forces Q, Q' sont respectivement

$$\frac{x-t}{T} = \frac{y-u}{U} = \frac{z-v}{V} , \quad \frac{x-t'}{T'} = \frac{y-u'}{U'} = \frac{z-v'}{V'} ;$$

d'après quoi, si l'on représente par p la longueur de la perpendiculaire commune à ces deux forces, et par θ l'angle qu'elles forment, on trouvera facilement

$$p = \frac{(UV' - VU')(t - t') + (VT' - TV')(u - u') + (TU' - UT')(v - v')}{\sqrt{(UV' - VU')^2 + (VT' - TV')^2 + (TU' - UT')^2}},$$

$$\text{Sin.} \theta = \frac{\sqrt{(UV' - VU')^2 + (VT' - TV')^2 + (TU' - UT')^2}}{\sqrt{(T^2 + U^2 + V^2)(T'^2 + U'^2 + V'^2)}},$$

on a d'ailleurs

$$QQ' = \sqrt{(T^2 + U^2 + V^2)(T'^2 + U'^2 + V'^2)},$$

donc

$$pQQ'\text{Sin.} \theta = (UV' - VU')(t - t') + (VT' - TV')(u - u') + (TU' - UT')(v - v');$$

or, les équations (4) et (5) donnent, en ayant égard aux équations (1),

$$(UV' - VU')(t - t') = \Sigma(Y)\Sigma(Z'x') - \Sigma(Z')\Sigma(Y'x'),$$

$$(VT' - TV')(u - u') = \Sigma(Z')\Sigma(X'y') - \Sigma(X')\Sigma(Z'y'),$$

$$(TU' - UT')(v - v') = \Sigma(X')\Sigma(Y'z') - \Sigma(Y')\Sigma(X'z');$$

en substituant donc il viendra

$$pQQ'\text{Sin.} \theta = \Sigma(X')\{\Sigma(Y'z') - \Sigma(Z'y')\} + \Sigma(Y')\{\Sigma(Z'x') - \Sigma(X'z')\} \\ + \Sigma(Z')\{\Sigma(X'y') - \Sigma(Y'x')\};$$

or, le second membre de cette dernière équation est constant, puis-

qu'il ne se compose que des données du problème ; donc , le premier doit l'être également ; or , ce premier membre est (pag. 250) le sextuple du volume d'un tétraèdre dont deux arêtes opposées seraient les droites qui représentent les forces Q et Q' tant en intensité qu'en direction ; donc le volume de ce tétraèdre est constant , quelles que soient les deux résultantes Q et Q' ; on a donc cet élégant théorème :

THÉORÈME. Des forces , en nombre quelconque , appliquées dans des directions quelconques à des points invariablement liés entre eux , mais libres d'ailleurs de toute gêne étrangère , peuvent d'une infinité de manières différentes être remplacées par le système de deux forces. Dans tous les systèmes de deux forces qui peuvent leur être substitués , comme équivalens , le tétraèdre construit sur les droites qui représentent les deux résultantes , tant en intensité qu'en direction , considérées comme arêtes opposées , a un volume constant.

Peut-être pourrait-on parvenir à ce théorème sans aucun calcul , par la considération des couples ; mais pour cela il faudrait chercher , au risque de ne pas trouver , tandis que nous étions assurés à l'avance que , si le théorème était vrai , notre analyse nous y conduirait inévitablement. Nous ne voyons pas d'ailleurs ce que le calcul , et surtout un calcul où l'on n'a , pour ainsi dire , que la peine d'écrire , pourrait avoir de si désagréable , pour qu'on apportât un si grand soin à l'éviter.

Il faudrait bien se garder de renverser ce théorème et de croire que , si deux tétraèdres sont équivalens , des forces représentées en intensité et en direction par deux arêtes opposées de l'un , pourront être remplacées par deux autres forces , représentées en intensité et en direction par deux arêtes opposées de l'autre. On ne saurait même se permettre de remplacer des forces représentées en intensité et en direction par deux arêtes opposées d'un tétraèdre , par des forces représentées en intensité et en direction par deux autres arêtes opposées de ce même tétraèdre ; on prouve très-sim-

plement, par des considérations purement géométriques, qu'il faudrait encore joindre à ces dernières deux forces appliquées aux deux extrémités de l'une des deux arêtes restantes parallèles à son opposée, de directions contraires, et représentées en intensité par cette arête opposée.

Nous remarquerons encore qu'il n'est pas exact de dire, comme on a coutume de le faire, que l'équation

$$\Sigma(X')\{\Sigma(Y'z')-\Sigma(Z'y')\}+\Sigma(Y')\{\Sigma(Z'x')-\Sigma(X'z')\}+\Sigma(Z')\{\Sigma(X'y')-\Sigma(Y'x')\}=0$$

exprime que le système a une résultante unique ; cette équation exprime proprement que le volume du tétraèdre, dont deux arêtes opposées représentent les deux résultantes en intensité et en direction, est nul, et que, conséquemment, ces deux résultantes sont dans un même plan où elles pourraient fort bien former un couple. Pour que le système ait une résultante unique qui ne soit pas nulle, il faut que cette équation ait lieu sans qu'on ait à la fois

$$\Sigma(X')=0, \quad \Sigma(Y')=0, \quad \Sigma(Z')=0.$$

Nous aurions pu déduire de notre analyse les conditions d'équilibre dans un système libre, de forme invariable, mais cela eût été moins simple que ce que nous avons donné à la pag. 14 de notre IX.^e volume où nous avons été assez heureux pour parvenir directement, sans calcul, et de la manière la plus symétrique, aux six équations d'équilibre dans l'espace, sans même être obligés de supposer connues les conditions d'équilibre des forces situées dans un même plan.