ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

BOBILLIER

Philosophie mathématique. Démonstration nouvelle de quelques propriétés des lignes du second ordre

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 18 (1827-1828), p. 359-367

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1827-1828__18__359_1>

PHILOSOPHIE MATHÉMATIQUE.

Démonstration nouvelle de quelques propriétés des lignes du second ordre ;

Par M. Bobillier, professeur à l'Ecole des arts et métiers de Châlons-sur-Marne.

Nous nous proposons, dans ce qu'on va lire, d'appliquer la méthode de recherche dont nous avons déjà fait l'essai dans un précédent article (pag. 320), à la démonstration de quelques propriétés connues des lignes du second ordre. C'est en examinant, en effet, comment cette méthode conduit à la découverte des vérités déjà connues, qu'on pourra juger de ce qu'on peut en espérer dans la recherche des vérités bien plus nombreuses et plus importantes qui restent encore à découvrir.

1. Soient A, B, A', B' quatre fonctions linéaires quelconques en x et y, et soient $A=0$, $B=0$, les équations des deux côtés

d'un même angle d'un quadrilatère simple; soient $A'=0$, $B'=0$, les équations des côtés respectivement opposés. Convenons, pour abréger, de représenter simplement par A, B, A', B' les côtés consécutifs, et par (A, B), (B, A'), (A', B'), (B', A) les sommets consécutifs.

En représentant par a et b deux constantes indéterminées, dont une peut même être choisie d'une manière tout à fait arbitraire, l'équation du second degré

$$aAA'+bBB'=0\,, \qquad (1)$$

sera visiblement l'équation commune à toutes les lignes du second ordre circonscrites au quadrilatère dont il s'agit; car elle sera satisfaite, quels que soient a et b, par les quatre systèmes d'équations du premier degré qui donnent les sommets, et il est de plus évident que cette équation (1) est la seule équation du second degré qui puisse satisfaire à cette condition.

2. Supposons, pour un moment, que le quadrilatère soit inscriptible au cercle; l'équation du cercle circonscrit ne pourra être que de la forme

$$\alpha AA'+\beta BB'=0\,. \qquad (2)$$

Supposons, en outre, que l'on ait choisi pour les axes des coordonnées, sur lesquels nous n'avons point encore statué, les deux droites rectangulaires qui divisent en deux parties égales les quatre angles formés par les deux côtés opposés A et A', il est manifeste que, dans cette hypothèse, le produit AA' ne renfermera pas de terme en xy; mais l'équation (2) d'un cercle, rapporté à des axes rectangulaires, ne doit point renfermer de terme de cette sorte; donc, il ne se trouvera pas non plus dans le produit BB'; donc, l'équation (1) de la conique, rapportée aux mêmes axes, ne renfermera pas non plus le terme en xy; donc enfin les axes des coordonnées seront respectivement parallèles à ses diamètres principaux. On a donc ce théorème :

3. *THÉORÈME. Un cercle tracé sur le plan d'une conique coupant cette courbe en quatre points ; si l'on joint ces quatre points deux à deux par deux cordes, les droites qui diviseront en deux parties égales les quatre angles formés par ces deux cordes, seront respectivement parallèles aux diamètres principaux de la courbe.*

Il est clair que si deux angles ont un côté commun, et que les droites qui les divisent en deux parties égales soient parallèles, ces angles seront égaux et correspondans, et que conséquemment leurs côtés, non communs, seront aussi parallèles ; on peut donc, de ce théorème, conclure le suivant :

4. *THÉORÈME. Si tant de cercles qu'on voudra, coupant une même conique aux deux mêmes points, la coupent en outre en deux autres points, les cordes qui, dans ces différens cercles, joindront ces deux autres points d'intersection seront toutes parallèles entre elles.*

Si l'on conçoit que les deux points communs à tous ces cercles et à la courbe se rapprochent continuellemment, jusqu'à se confondre, ce dernier théorème se changera dans le suivant :

5. *THÉORÈME. Si tant de cercles qu'on voudra touchent tous une même conique au même point et la coupent en outre en deux autres points ; les cordes qui, dans ces différens cercles, joindront leurs deux intersections avec la courbe, seront toutes parallèles entre elles.*

C'est de ce dernier théorème que M. Plucker a déduit (*Annales*, tom. XVII, pag. 71) la construction du cercle osculateur d'une conique en un quelconque de ses points. Il n'est, comme l'on voit, qu'un cas particulier du précédent.

6. Retournons à notre équation (1), dans laquelle nous supposerons présentement la courbe rapportée à deux axes quelconques. Si nous voulons obtenir les intersections de cette courbe avec l'axe des x, il faudra faire, dans cette équation, $y=0$. Supposons qu'alors

les fonctions A, B, A', B' prennent respectivement la forme $px+g$, $qx+h$, $p'x+g'$, $q'x+h'$; cette équation deviendra ainsi

$$a(px+g)(p'x+g')+b(qx+h)(q'x+h')=0\ ;$$

c'est-à-dire,

$$(pp'a+qq'b)x^2+\{(pg'+p'g)a+(qh'+q'h)b\}x+(gg'a+hh'b)=0\ ;$$

ou, pour abréger,

$$(Pa+Qb)x^2+(Ra+Sb)x+(Ta+Ub)=0\ ;$$

d'où il suit qu'en représentant par m et μ les distances des deux intersections à l'origine, on aura

$$m+\mu=-\frac{Ra+Sb}{Pa+Qb}\ , \qquad m\mu=+\frac{Ta+Ub}{Pa+Qb}\ .$$

Pour deux autres coniques circonscrites au même quadrilatère, et données par les équations

$$a'AA'+b'BB'=0\ , \qquad a''AA'+b''BB'=0\ ,$$

on aura semblablement

$$m'+\mu'=-\frac{Ra'+Sb'}{Pa'+Qb'}\ , \qquad m'\mu'=+\frac{Ta'+Ub'}{Pa'+Qb'}\ ;$$

$$m''+\mu''=-\frac{Ra''+Sb''}{Pa''+Qb''}\ , \qquad m''\mu''=+\frac{Ta''+Ub''}{Pa''+Qb''}\ ;$$

d'où

$$m'\mu'-m''\mu''=-\frac{(PU-QT)(a'b''-b'a'')}{(Pa'+Qb')(Pa''+Qb'')}$$

et par suite

$$(m+\mu)(m'\mu'-m''\mu'')=\frac{PU-QT}{(Pa+Qb)(Pa'+Qb')(Pa''+Qb'')}(Ra+Sb)(a'b''-b'a'')\ ;$$

ou, pour abréger,

$$(m+\mu)(m'\mu'-m''\mu'')=V(Ra+Sb)(a'b''-b'a'')\ ,$$

on trouvera de même

$$(m'+\mu')(m''\mu''-m\mu)=V(Ra'+Sb')(a''b-b''a)\ ,$$

$$(m''+\mu'')(m\mu-m'\mu')=V(Ra''+Sb'')(ab'-ba')\ ;$$

d'où on conclura, sur-le-champ,

$$(m+\mu)(m'\mu'-m''\mu'')+(m'+\mu')(m''\mu''-m\mu)+(m''+\mu'')(m\mu-m'\mu')=0\ ;$$

équation qui exprime (*Annales*, tom. XVII, pag. 183) que les six points d'intersection sont en involution. En remarquant donc que l'axe des x est ici une transversale quelconque, et en invoquant le principe des polaires réciproques, on aura ces deux théorèmes :

7. *THÉORÈME. Trois coniques circonscrites à un même quadrilatère coupent toute droite en six points qui forment une involution* (*).

7. *THÉORÈME. Les six tangentes menées d'un même point quelconque à trois coniques inscrites à un même quadrilatère forment un faisceau en involution.*

On peut prendre pour une des coniques le système de deux côtés opposés du quadrilatère, ou bien on peut prendre pour deux des coniques les deux systèmes de côtés opposés. On peut enfin pren-

(*) C'est l'élégant théorème de M. Sturm (*Annales*, tom. XVII, pag. 182).
J. D. G.

die pour les trois coniques les deux systèmes des côtés opposés avec les deux diagonales; de là, et par la théorie des polaires réciproques, on conclura les théorèmes suivans :

8. *THÉORÈME. Toute droite est coupée par deux coniques qui se coupent en quatre points et par les deux cordes qui joignent ces quatre points deux à deux en six points qui forment une involution.*

8. *THÉORÈME. Les quatre tangentes menées d'un même point quelconque à deux coniques et les deux droites menées du même point aux points de concours de leurs deux paires de tangentes communes, forment un faisceau en involution.*

9 *THÉORÈME. Les six points d'intersection des quatre côtés d'un quadrilatère et d'une conique qui lui est circonscrite avec une droite quelconque, forment une involution* (*).

9. *THÉORÈME. Les droites menées d'un même point quelconque aux quatre sommets d'un quadrilatère et les deux tangentes menées du même point à une conique inscrite, forment un faisceau en involution.*

10. *THÉORÈME. Les six droites que déterminent quatre points d'un même plan coupent toute transversale en six points qui forment une involution.*

10. *THÉORÈME. Les droites menées d'un même point quelconque d'un plan aux six points que déterminent quatre droites tracées sur ce plan, forment un faisceau en involution* (**).

(*) C'est le théorème de Desargues (*Annales*, tom XVII, pag. 181).

(**) Ce théorème et celui qui le précède se trouvent consignés dans un mémoire manuscrit de M. Sturm, dont nous avons publié deux extraits dans notre XVII.e volume, et que son étendue ne nous a pas permis de publier en entier; mais l'auteur, qui n'a pas songé à les déduire de son théorème général ou de celui de Desargues, en donne des démonstrations directes.

J. D. G.

On ne doit pas perdre de vue, dans tout ceci, que si deux des six points ou deux dès six droites, non conjugués l'un à l'autre, se confondent accidentellement avec leurs conjugués respectifs, auquel cas le nombre des points ou des droites se réduira à quatre seulement, on aura alors une section ou un faisceau harmonique.

11. Reprenons l'équation

$$aAA'+bBB'=0\,, \qquad (1)$$

que l'on peut considérer généralement comme l'équation commune à toutes les coniques passant par les quatre mêmes points donnés par les systèmes d'équations

$$\left\{\begin{array}{l}A=0\,,\\B=0\,;\end{array}\right.\quad\left\{\begin{array}{l}A'=0\,,\\B'=0\,;\end{array}\right.\quad\left\{\begin{array}{l}A=0\,,\\B'=0\,;\end{array}\right.\quad\left\{\begin{array}{l}A'=0\,,\\B=0\,;\end{array}\right.$$

il est visible que l'on satisfera aussi à l'équation (1) quels que soient γ et γ', par chacun des deux systèmes d'équations

$$\left\{\begin{array}{l}\gamma A+bB=0\,,\\\gamma B'+aA'=0\,;\end{array}\right.\qquad\left\{\begin{array}{l}\gamma' A+bB'=0\,,\\\gamma' B+aA'=0\,;\end{array}\right.$$

puisque l'élimination, soit de γ entre les deux premières, soit de γ' entre les deux autres, fait retomber sur l'équation (1). Donc les deux premières, ainsi que les deux dernières appartiennent à deux droites qui se coupent sur la courbe; mais les deux premières appartiennent respectivement à deux droites qui passent par les points (A, B), (A', B'), tandis que les deux dernières appartiennent à deux droites qui passent respectivement par les points (A, B'), (A', B); donc les deux premières sont celles de deux cordes menées de l'un quelconque des points de la courbe aux deux points (A, B), (A', B'), tandis que les deux dernières sont celles de deux cordes menées d'un autre point également quelconque de la courbe aux deux points (A, B'), (A', B).

On peut donc considérer ces quatre cordes, et les deux côtés opposés A, A' du quadrilatère, comme les côtés d'un hexagone quelconque inscrit, et alors les couples de côtés respectivement opposés de cet hexagone seront donnés par les couples d'équations

$$\left\{\begin{array}{l} A=0\ , \\ A'=0\ , \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \gamma A+bB=0\ , \\ aA'+\gamma' B=0\ , \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} aA'+\gamma B'=0\ , \\ \lambda' A+bB'=0\ , \end{array}\right.$$

lesquelles détermineront aussi conséquemment les points de concours de ces couples de côtés opposés; or, il est visible que l'équation

$$\gamma\gamma' A-abA'=0\ ,$$

est également satisfaite par chacune de ces couples en particulier; donc, cette dernière équation est celle d'une droite qui contient les points de concours des directions des côtés opposés. De là, et par la théorie des polaires réciproque, on conclura ces deux théorèmes si connus et si féconds en belles conséquences :

12. *THÉORÈME. Dans tout hexagone inscrit à une conique, les points de concours des directions des côtés opposés appartiennent tous trois à une même droite.*

12. *THÉORÈME. Dans tout hexagone circonscrit à une conique, les droites qui joignent les sommets opposés concourent toutes trois en un même point.*

On ne doit pas perdre de vue, dans l'application de ces théorèmes, que les six mêmes points, pris sur une ligne du second ordre, peuvent être les sommets de *soixante* hexagones inscrits, et que les six mêmes tangentes à cette courbe peuvent être les côtés de *soixante* hexagones circonscrits, et que les deux théorèmes que nous venons de démontrer ont lieu également pour tous. Faute de cette attention, on pourrait prendre pour théorème nouveau, relatif à l'un de ces hexagones, un de nos théorèmes appliqué à un autre et transporté ensuite à celui-là ; tels seraient, par exemple, ces deux-ci :

Dans tout hexagone inscrit à une conique, le point de concours de deux côtés qui ne sont ni consécutifs ni opposés, le point de concours de leurs opposés respectifs et le point de concours des droites qui joignent les deux couples de sommets opposés qui déterminent les deux côtés restans, appartiennent tous trois à une même droite.

Dans tout hexagone circonscrit à une conique, la droite qui joint deux sommets qui ne sont ni consécutifs ni opposés, la droite qui joint leurs opposés respectifs et la droite qui joint les points de concours des deux couples de côtés opposés, qui déterminent les deux sommets restans, concourent toutes trois en un même point.

13. Si l'on suppose que les fonctions linéaires A, A', B, B' sont en x, y, z, on obtiendra, sans aucun nouveau calcul relativement aux angles tétraèdres gauches inscrits et aux quadrilatères gauches circonscrits à une surface réglée du second ordre, des théorèmes analogues à ceux que nous venons d'établir.

14. Si l'on suppose ensuite que ces fonctions, soit en x et y, soit x, y, z, au lieu d'être linéaires sont d'un même degré quelconque, supérieur au premier, on obtiendra des théorèmes généraux, soit sur le système de quatre courbes du même degré ou de même classe, comprises dans un même plan, soit sur le système de quatre surfaces du même degré ou de même classe, situées du manière quelconque dans l'espace.