ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

GERGONNE

Analyse algébrique. Démonstration de la règle de Descartes, d'après M. Gauss

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 18 (1827-1828), p. 352-359
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1827-1828__18__352_1>

ANALYSE ALGÉBRIQUE.

Démonstration de la Règle de Descartes, *d'après M. Gauss ;*

Par M. GERGONNE.

LA démonstration de la *règle de Descartes*, sur les signes des racines des équations, donnée par Segner, et adoptée par la plupart des auteurs de traités élémentaires, ne laisse sans doute rien à désirer du côté de la rigueur, mais elle est d'une exposition assez pénible, de sorte qu'on ne parvient pas, sans quelque peine, à la faire bien comprendre aux commençans. En outre, la manière dont on en brusque la conclusion, dans les traités d'analyse, semblerait la rendre inexacte ou du moins incomplète. A la vérité les professeurs habiles savent fort bien suppléer en cet endroit au laconisme des auteurs; mais, malheureusement les professeurs ne sont pas tous habiles, et d'ailleurs les personnes qui s'instruisent dans les livres, sans le secours d'aucun maître, ne sauraient guère suppléer d'elles-mêmes aux omissions qu'elles y rencontrent.

Dans la dernière livraison du Journal allemand de M. Crelle (tom. III, pag. 1.re), M. Gauss a donné une démonstration nouvelle du théorème de Descartes, qui n'est sujette à aucun de ces inconvéniens; c'est, pour le fond, cette démonstration que nous nous proposons de reproduire ici, en n'y faisant que quelques changemens légers qui nous ont paru propres à rendre l'exposition plus claire et plus briève encore. Nous croyons faire en cela une chose d'autant plus agréable à MM. les Professeurs de nos écoles, que la démonstration de la règle de Descartes fait actuellement partie du programme des connaissances exigées des aspirans à l'Ecole polytechnique.

Soit une équation en x d'un degré quelconque dont toutes les racines soient supposées connues. Soit fait le produit des facteurs binomes qui répondent tant aux racines imaginaires de cette équation qu'à ses racines négatives, et soit représenté ce produit par X. Soient en outre $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ les racines positives de cette équation; l'équation sera conséquemment

$$X(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots\ldots=0\,. \qquad (1)$$

Soit ordonné le produit X suivant les puissances descendantes de x. Soit alors Mx^m son premier terme que nous pouvons toujours supposer positif. Soit $-Nx^n$ son premier terme négatif; soit $+Px^p$

le premier terme positif qui se présente à la suite de celui-là; soit $-Qx^q$ le premier terme négatif qui le suit, et ainsi du reste. Soit $\pm Ux^u$ le premier des termes consécutifs qui ont tous le même signe jusqu'au dernier inclusivement; et soit $\pm V$ ce dernier terme, on aura ainsi

$$X=Mx^m+\dots-Nx^n-\dots+Px^p+\dots-Qx^q-\dots\pm Ux^u\pm\dots\pm V; \quad (2)$$

M, N, P, Q, ... U, V étant des nombres positifs quelconques, et m, n, p, q, ... u des nombres entiers continuellement décroissans.

Si l'on multiplie le polynome X par $x-\alpha$, et qu'on ordonne le produit par rapport à x, le premier terme du produit sera Mx^{m+1}. Il est manifeste, en outre, que le terme en x^{n+1} sera négatif, que le terme en x^{p+1} sera positif, que le terme en x^{q+1} sera négatif, et ainsi de suite. Quant au terme en x^{u+1}, son signe sera le même que celui du terme en x^u dans X, et le dernier terme sera $\mp\alpha V$; de sorte qu'on aura

$$X(x-\alpha)=Mx^{m+1}\dots-N'x^{n+1}\dots+P'x^{p+1}\dots-Q'x^{q+1}\dots\pm U'x^{u+1}\dots\mp\alpha V; \quad (3)$$

N', P', Q', ... U' étant des nombres positifs quelconques.

Quant aux termes intermédiaires, sous entendus, leurs signes dépendront, dans chaque cas particulier, de la valeur numérique des coefficiens; mais, quels qu'ils soient, on voit que, tandis que parvenu au terme $-Nx^n$ de (2), on avait rencontré une seule variation; on en aura rencontré une au moins, quand on sera parvenu au terme $-N'x^{n+1}$ de (3); que, tandis que parvenu au terme $+Px^p$ de (2), on avait rencontré deux variations; on en aura rencontré deux au moins, quand on sera parvenu au terme $+P'x^{p+1}$ de (3); que, tandis que parvenu au terme $-Qx^q$ de (2), on avait rencontré trois variations; on en aura rencontré trois au moins, quand on sera parvenu au terme $-Q'x^{q+1}$ de (3), et ainsi de suite; de sorte que, parvenus au terme $\pm U'x^{u+1}$ de (3), on aura rencontré autant de variations au moins qu'on en avait rencontré dans (2), lorsqu'on était parvenu au terme $\pm Ux^u$; mais comme le signe du dernier terme $\mp\alpha V$ de (3) est contraire à celui du terme $\pm U'x^{u+1}$, tandis que le signe du dernier terme $\pm V$ de (2) est semblable à celui du terme $\pm Ux^u$, il s'ensuit que, finalement, parvenu au dernier terme de (3), on aura rencontré tout au moins une variation de plus qu'on n'en avait rencontré dans (2) lorsqu'on était parvenu à son dernier terme, c'est-à-dire, en d'autres termes, que dans $X(x-\alpha)$ il y a tout au moins une variation de plus qu'il ne s'en trouve dans X.

Par une raison tout à fait semblable, il y aura tout au moins dans $X(x-\alpha)(x-\beta)$ une variation de plus qu'on n'en rencontre dans $X(x-\alpha)$, et par suite deux de plus que n'en offre X; il y aura de même dans $X(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ tout au moins une variation de plus qu'il ne s'en trouve dans $X(x-\alpha)(x-\beta)$, et, par suite, tout au moins trois de plus que n'en renferme X, et ainsi de suite; de sorte que, finalement, le premier membre de la proposée (1) devra offrir au moins autant de variations que cette équation a de racines positives.

Si la proposée n'avait ni racines négatives ni racines imaginaires, cela reviendrait à supposer $X=1$, et la proposition à laquelle nous venons de parvenir subsisterait dans toute sa force.

Soit présentement une équation en x, de degré quelconque, ayant aussi ou du moins pouvant avoir des racines négatives et des racines imaginaires. Supposons cette équation complète ou du moins rendue telle, si elle ne l'est pas, par la restitution des termes qui manquent, affectés du coefficient zéro, auquel on pourra donner d'ailleurs quel signe on voudra.

Soit ensuite changé, dans cette équation, les signes de tous les termes de rangs pairs, il en résultera une transformée qui, d'après ce qui précède, aura au moins autant de variations que de racines positives; mais les racines de cette équation transformée ne sont autre chose que celle de la proposée prise en signes contraires; donc on pourra dire aussi que cette transformée aura au moins autant de variations que la proposée aura de racines négatives. D'un autre côté, il est visible qu'à chaque variation de la transformée, répondra une permanence dans la proposée, et *vice versâ*; de telle sorte que le nombre des permanences de la proposée sera précisément égal au nombre des variations de la transformée, d'où il suit que la proposée devra offrir au moins autant de permanences de signes qu'elle aura de racines négatives.

En rapprochant cette proposition de celle qui a été démontrée en premier lieu, on aura donc ce théorème :

THÉORÈME. Une équation ne saurait avoir plus de racines positives qu'elle n'offre de variations, ni plus de racines négatives qu'elle n'offre de permanences de signes.

Supposons présentement que les racines de la proposée soient toutes réelles, et soient r le nombre de ses racines positives et r' le nombre de ses racines négatives; soient de plus s le nombre de ses variations et s' le nombre de ses permanences de signes; on aura

$$r+r'=s+s'\;; \qquad (4)$$

et, d'après ce qui vient d'être démontré, on ne pourra admettre ni $r>s$ ni $r'>s'$; les seules hypothèses admissibles seront donc

$$r=s\,, \qquad r'=s'\,,$$

$$r<s\,, \qquad r'<s'\,,$$

or, il n'y a que les deux de la première ligne dont la combinaison puisse vérifier l'équation (4); d'où il suit qu'elles seront seules conformes à la vérité. On a donc cet autre théorème :

THÉORÈME. Lorsque les racines d'une équation sont toutes réelles, le nombre de ses racines positives est précisément égal au nombre de ses variations, et le nombre de ses racines négatives égal au nombre de ses permanences de signes.

Supposons présentement que l'équation ne soit pas complète; des termes consécutifs pourront manquer en plusieurs endroits, et ces termes consécutifs pourront être en nombre pair en quelques endroits, et nombre impair en d'autres ; en outre, les séries de termes consécutifs manquant, pourront manquer tantôt entre des termes effectifs de mêmes signes et tantôt entre des termes effectifs de signes contraires.

Cela posé, soit α le nombre des séries de termes consécutifs manquant en nombre pair, entre deux termes effectifs de même signe, et soient $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_\alpha$, les nombres de termes dont se composent ces diverses séries ;

Soit β le nombre des séries de termes consécutifs manquant, en nombre impair, entre deux termes effectifs de même signe, et soient $b_1, b_2, b_3, \ldots\ldots b_\beta$, les nombres de termes dont se composent ces diverses séries ;

Soit γ le nombre des séries de termes consécutifs manquant, en nombre pair, entre deux termes effectifs de signes contraires, et soient $c_1, c_2, c_3, \ldots\ldots c_\gamma$, les nombres de termes dont se composent ces diverses séries.

Soit enfin δ le nombre des séries de termes consécutifs manquant, en nombre impair, entre deux termes effectifs de signes contraires, et soient $d_1, d_2, d_3, \ldots\ldots d_\delta$, les nombres de termes dont se composent ces diverses séries.

Soient en outre V et P les nombres de variations et de permanences qu'offrent les diverses séries de termes effectifs et consécutifs de l'équation que nous supposons du $m.^{\text{ième}}$ degré.

En considérant qu'en général k termes manquant consécutivement, font manquer $k+1$ tant variations que permanences, on aura

$$m=V+P+\left\{\begin{array}{l} \alpha+a_1+a_2+a_3+\ldots\ldots+a_\alpha \\ +\beta+b_1+b_2+b_3+\ldots\ldots+b_\beta \\ +\gamma+c_1+c_2+c_3+\ldots\ldots+c_\gamma \\ +\delta+d_1+d_2+d_3+\ldots\ldots+d_\delta \end{array}\right\} \qquad (5)$$

Si nous restituons les termes qui manquent, affectés du coefficient zéro, en donnant à ce coefficient, dans chacun d'eux, le signe qui peut rendre le nombre des variations le moindre possible, il est visible que le nombre total de ces variations sera seulement

$$V+\gamma+\delta\ ;$$

et telle sera aussi conséquemment la limite que le nombre des racines réelles positives ne pourra dépasser.

Si, au contraire, nous restituons les termes qui manquent, affectés du coefficient zéro, en donnant à ce coefficient, dans chacun d'eux, le signe qui peut rendre le nombre des permanences le moindre possible, il est visible que le nombre total de ces permanences sera seulement

$$P+\alpha+\delta\ ;$$

et telle sera aussi conséquemment la limite que le nombre des racines réelles négatives ne pourra dépasser.

Le nombre total des racines réelles, tant positives que négatives de la proposée sera donc, au plus,

$$V+P+\alpha+\gamma+2\delta\ ;$$

le nombre de ses racines imaginaires sera donc au moins

$$m-V-P-\alpha-\gamma-2\delta\ ,$$

ou bien, en mettant pour $m-V-P$ sa valeur donnée par l'équation (5),

$$\left\{\begin{array}{r} a_1+a_2+a_3+\dots\dots\dots+a_\alpha \\ +b_1+b_2+b_3+\dots\dots\dots+b_\beta \\ +c_1+c_2+c_3+\dots\dots\dots+c_\gamma \\ +d_1+d_2+d_3+\dots\dots\dots+d_\delta \end{array}\right\}+(\beta-\delta)\ ,$$

ce qui donne ce théorème :

THÉORÈME. Le nombre des racines imaginaires d'une équation incomplète est au moins égal au nombre des termes dont elle est dépourvue, augmenté de l'excès du nombre des séries de nombres impairs de termes consécutifs manquant, entre deux termes effectifs de même signe, sur le nombre des séries de nombres impairs de termes consécutifs manquant, entre deux termes effectifs, de signes contraires.

On trouvera, à la pag. 382 du XVI.e vol. du présent recueil et à la pag. 68 de celui-ci, quelques autres conséquences de la règle de Descartes.