ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

CHASLES

Géométrie pure. Mémoire sur les projections stéréographiques, et sur les coniques homothétiques

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 18 (1827-1828), p. 305-320

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1827-1828__18__305_0>

GÉOMÉTRIE PURE.

Mémoire sur les projections stéréographiques, et sur les coniques homothétiques;

Par M. CHASLES, ancien élève de l'Ecole polytechnique.

J'AI avancé, dans un précédent mémoire (pag. 277), que les propriétés des coniques semblables et semblablement disposées dans un même plan étaient tout-à-fait analogues à celles d'un système de cercles. Je me propose, dans ce qu'on va lire, de justifier cette assertion. J'en prendrai occasion de donner quelques développemens sur les projections stéréographiques dont l'emploi peut être d'un très-utile secours dans la géométrie. Ce sujet a déjà été traité, d'une manière fort élégante, par M. Dandelin, dans la *Correspondance mathématique et physique* du royaumes des Pays-Bas (*Annales*, tom. XVI, pag. 322); mais M. Dandelin n'a considéré uniquement que les projections stéréographiques des cercles de la sphère, tandis que ce qu'on lit dans la *Correspondance sur l'Ecole polytechnique* (tom. III, pag. 16, 1814), et le contenu de ma lettre à M. Hachette, insérée dans sa *Géométrie à trois dimensions* (1817), prouve que depuis long-temps j'ai envisagé la question d'un manière beaucoup plus générale, en considérant les projections stéréographiques des sections planes, faites dans une surface quelconque du second ordre.

1. Soient C, C' deux sections planes faites dans une surface du

second ordre. On sait que, par ces deux sections, on peut toujours faire passer deux surfaces coniques S, S′, qu'on peut aussi circonscrire à cette surface deux autres surfaces coniques Σ, Σ′ qui la touchent respectivement suivant les courbes C, C′, et que les sommets de ces quatre cônes appartiennent à une même droite, polaire conjuguée de l'intersection des plans des courbes C, C′.

On sait de plus que si, par le sommet de l'un des deux cônes S, S′ et par l'intersection des deux plans C, C′, on conduit un plan, ce plan aura pour polaire, dans ce même cône, la droite qui contient les quatre sommets, c'est-à-dire, en d'autres termes, que toutes les sections faites dans ce cône, parallèlement à ce plan, auront leurs centres sur cette droite.

Il est évident, en outre, que toutes les sections faites dans la surface du second ordre et dans l'un et l'autre des deux cônes S, S′, parallèlement au plan de l'une ou de l'autre des courbes C, C′ seront semblables à cette courbe et seront disposées de la même manière qu'elle ; d'où il résulte qu'elles seront aussi semblables et semblablement disposées entre elles.

Ces choses ainsi entendues, supposons que l'une des courbes C, C′, la courbe C′, par exemple, se réduise à un point P, ou, en d'autres termes, que son plan devienne un plan tangent en P à la surface du second ordre, il n'y aura plus alors qu'un seul S des deux cônes S, S′, lequel aura dès lors son sommet en ce même point P ; et tout plan parallèle au plan tangent en P, qui représente, dans ce cas particulier, le plan de la courbe C′, coupera encore le cône S et la surface du second ordre suivant deux courbes semblables et semblablement disposées.

Présentement, le plan qui passait par le sommet du cône S′ et par la commune section des deux courbes C, C étant devenu le plan tangent lui-même, et la droite polaire de ce plan, par rapport au cône S, qui contenait les quatre sommets, étant devenue celle qui joint le point P au sommet du cône circonscrit Σ, suivant la courbe C, ce sera actuellement cette dernière droite qui contiendra les centres de toutes les sections faites dans le cône S, parallèlement au plan tangent en P. On a donc ce théorème qu'on peut regarder comme fondamental.

2. *THÉORÈME. L'œil étant placé en un quelconque des points d'une surface du second ordre, et le plan du tableau étant parallèle au plan tangent à cette surface en ce point ;*

1.° *Toutes les courbes planes, tracées sur la surface du second ordre dont il s'agit, se projeteront sur le tableau suivant des courbes semblables et semblablement situées, tant entre elles que par rapport à l'intersection de la surface du second ordre avec le plan du tableau ;*

2.° *Les projections de ces diverses courbes, sur le plan du tableau, auront respectivement pour centres les projections, sur ce tableau, des sommets des cônes circonscrits à la surface du second ordre suivant ces mêmes courbes.*

J'avais publié la première partie de ce théorème en l'endroit cité de la *Correspondance*, et je donnai, dans l'ouvrage de M. Hachette, une démonstration analytique de la seconde, parce que cette démonstration convenait mieux à la destination qui lui était affectée.

3. Si l'on prend pour le sommet commun des cônes de projection, lieu de l'œil, l'une des extrémités de l'un des deux diamètres, lieux des centres des sections circulaires de la surface du second ordre dont il s'agit, les projections de toutes les courbes planes tracées à volonté sur cette surface, seront des cercles, comme dans la sphère, et les centres de ces cercles seront les projections des sommets des cônes circonscrits à cette surface suivant les courbes projetées.

Cette dernière propriété peut trouver une utile application dans le tracé des cartes géographiques ou uranographiques, parce qu'elle offre un moyen fort simple de déterminer les centres des cercles que l'on doit y tracer. Tout se réduit alors, en effet, à déterminer le sommet d'un cône circonscrit à la sphère suivant un cercle donné, et l'on sait que ce sommet se trouve sur le prolongement du rayon perpendiculaire au plan du cercle de contact, à une distance du centre de la sphère, troisième proportionnelle à la distance de ce centre au plan du cercle et au rayon de cette même sphère.

4. On sait qu'il existe, pour la sphère, une autre propriété bien précieuse aussi, dans le tracé des cartes, laquelle consiste en ce que *les projections stéréographiques de deux cercles se coupent sous le même angle que ces cercles eux-mêmes ;* mais cette propriété cesse d'avoir lieu pour une surface quelconque du second ordre ; ou, pour mieux dire, il n'y a, pour une telle surface, que trois directions de la corde commune pour lesquelles elle puisse avoir lieu. Elle tient, en effet, pour la sphère, comme l'a fait voir M. Dandelin à l'endroit cité, à ce que deux cercles qui se coupent sur une telle surface se coupent sous le même angle, en leurs deux intersections, attendu qu'en conduisant un plan diamétral perpendiculaire à la corde commune, tout se trouve égal de part et d'autre de ce plan. Mais, dans une surface quelconque du second ordre, le plan diamétral conjugué à la corde commune à deux sections planes étant mené, les tangentes aux deux courbes concourront bien deux à deux sur ce plan, également distant des sommets des deux angles ; mais les angles de ces tangentes ne seront égaux, pour toutes sections planes passant par les deux mêmes points, qu'autant que la corde qui les joindra sera perpendiculaire à son plan diamétral conjugué, c'est-à-dire, qu'autant que la corde commune sera parallèle à l'un des diamètres principaux, et que l'œil sera placé en un point du périmètre de la section principale qui contient les deux autres.

Dans tout ce qui va suivre, nous continuerons d'appeler coniques *homothétiques* des coniques semblables et semblablement disposées dans un même plan.

5. *THÉORÈME. Réciproquement, des coniques homothétiques étant tracées dans un même plan, en tel nombre qu'on voudra, on pourra toujours les considérer comme les projections stéréographiques d'autant de courbes planes tracées sur une même surface du second ordre ; et leurs centres seront alors les projections des sommets*

des cônes circonscrits à cette surface suivant ces mêmes courbes.

Démonstration. Soient, pour le prouver, C', C'', C''', ... les coniques homothétiques dont il s'agit. Sur leur plan, soit tracée arbitrairement une nouvelle conique C, qui leur soit homothétique, et par laquelle soit fait passer, aussi arbitrairement une surface S du second ordre; en conduisant un plan tangent à cette surface, parallèle à celui des coniques données C', C'', C''', ... son point de contact P sera celui où il faudra placer l'œil pour que ces coniques soient les projections stéréographiques d'une suite de courbes planes tracées sur cette surface.

En effet, par le point P et par trois des points du périmètre de l'une quelconque C' de ces coniques, soient menées trois droites; ces droites perceront la surface S en trois points qui appartiendront à une section plane de cette surface, dont la projection stéréographique sera, par ce qui précède (2), une conique homothétique avec C, et conséquemment avec C', dont le centre sera la projection stéréographique du sommet du cône circonscrit à S suivant cette section plane. Mais cette conique homothétique avec C' aura trois points communs avec elle; elle ne sera donc autre chose que C' elle-même, puisque deux coniques homothétiques ne sauraient se couper en plus de deux points.

Il suit de là, en particulier, que *tant de cercles qu'on voudra, tracés sur un même plan, peuvent toujours être considérés comme les projections stéréographiques d'un pareil nombre de sections planes faites dans une surface du second ordre, et leurs centres comme les projections stéréographiques des sommets des cônes circonscrits à cette surface, suivant ces mêmes sections planes* (*).

(*) Ce principe paraît ne pas être inconnu aux géomètres allemands. M. Plucker l'invoque formellement, à la pag. 47 du présent volume, et M. Steiner s'en appuye également dans le mémoire dont nous avons donné un extrait à la pag. 285 de notre XVII.e volume, pour transporter ses constructions planes sur des surfaces quelconques, du second ordre.

J. D. G.

6. Considérons les projections stéréographiques S, S′ de deux courbes planes Σ, Σ′, tracées arbitrairement sur une surface U du second ordre. Par les deux courbes Σ, Σ′ on peut faire passer deux cônes C, *c*; les projections de leurs sommets seront évidemment les points de concours des tangentes communes aux deux coniques homothétiques S et S′, si des tangentes communes peuvent leur être menées. Dans tous les cas, ce seront leurs deux *centres de similitude*, que nous désignerons par O et *o*.

Une arête quelconque de l'un des cônes C, *c* rencontre les deux courbes Σ, Σ′ en deux points pour lesquels les tangentes à ces courbes sont toutes deux situées dans le plan tangent mené au cône par cette même arête; ces tangentes, quelle que soit d'ailleurs l'arête que l'on considère sur le cône, se coupent donc en un point de l'intersection des plans des deux courbes Σ, Σ′; la projection de l'arête du cône passe par le centre de similitude O ou *o* des deux coniques homothétiques S, S′; et les tangentes aux deux courbes Σ, Σ se projètent suivant des tangentes à S, S′ aux points où elles sont coupées par la projection de l'arête du cône; ces deux dernières tangentes doivent donc concourir sur une droite fixe, projection de la commune section des plans de Σ, Σ′, corde commune à S, S′, si elles se coupent, et, dans tous les cas, leur *axe radical* ou *axe de symptose*.

7. Ainsi, *une sécante commune étant menée arbitrairement à deux coniques homothétiques, par l'un ou l'autre de leurs deux centres de similitude, les tangentes menées aux deux courbes, aux points non homologues où elles sont coupées par cette sécante, concourent constamment sur une même droite fixe, axe de symptose de deux courbes.*

Nous disons par deux points d'intersection non homologues, parce qu'autrement les tangentes seraient parallèles et ne seraient pas les projections des tangentes aux courbes Σ, Σ′.

Soient toujours O, *o* les deux centres de similitude directe et inverse des deux courbes homothétiques S, S′.

Deux arêtes du cône C rencontrent la courbe Σ en deux points a, b et la courbe Σ' en deux points a', b', et les droites ab, $a'b'$ se rencontrent en un point de la commune section des plans de Σ, Σ', puisqu'elles sont toutes deux dans un même plan qui est celui des deux arêtes. Les deux tangentes à Σ, aux points a, b, se rencontrent en un premier point et les deux tangentes à Σ', aux points a', b', se rencontrent en un second point; ces deux points seront sur une droite qui passera par le sommet du cône C, car elle sera l'intersection des plans tangens à ce cône suivant les deux arêtes dont il s'agit.

En faisant donc la projection, on obtiendra ce théorème :

8. *Si, par un des deux centres de similitude de deux coniques homothétiques, on conduit deux transversales rectilignes, telles que chacune d'elles coupe chaque courbe en deux points;*

1.° *La droite qui joindra deux des quatre points d'intersection des deux transversales avec l'une des courbes, et la droite qui joindra les deux points d'intersection non homologues avec l'autre courbe iront concourir en un point de l'axe de symptose des deux courbes;*

2.° *Le point de concours des tangentes menées à la première courbe par les deux premiers points, et le point de concours des tangentes menées à la seconde par les deux derniers, sont en ligne droite avec le centre de similitude d'où émanent les deux transversales.*

La réciproque de cette proposition sera également facile à établir.

L'axe de symptose de S, S' est, comme on le voit, la projection de la commune section des plans Σ, Σ'; c'est donc la corde commune lorsque les deux coniques se coupent.

Si, par un quelconque des points de l'axe de symptose des deux courbes S, S', on leur mène quatre tangentes, ces tangentes seront les projections des quatre tangentes menées aux deux courbes Σ, Σ' par un même point de l'intersection de leurs plans, lesquelles tangentes sont, deux à deux, dans l'un des deux plans tangens menés par le même point aux deux cônes C, c; en outre ce point sera le sommet d'une surface conique circonscrite à U, contenant les quatre tangentes, et par suite les quatre points de contact.

9. Donc, *si, par l'un quelconque des points de l'axe de symptose de deux coniques homothétiques, on mène quatre tangentes à ces courbes ;*

1.° *Deux points de contact, pris sur les deux courbes, seront toujours en ligne droite avec l'un des centres de similitude ;*

2.° *Par les quatre points de contact on pourra faire passer une conique homothétique avec les deux proposées, et cette dernière aura son centre sur l'axe de symptose des deux autres, au point de départ des quatre tangentes.*

Si l'on décrit une suite de coniques qui soient, par rapport aux deux proposées, dans le même cas que celle que nous venons de considérer en particulier, elles seront les projections des lignes de contact d'une suite de surfaces coniques circonscrites à U, ayant toutes leurs sommets à l'intersection des plans de Σ, Σ' ; et les plans de ces lignes de contact se couperont tous évidemment suivant la droite qui joindra les sommets P, p des deux cônes C, c.

10. Donc, *toutes les coniques homothétiques aux deux proposées, passant respectivement par les quatre points de contact des tangentes issues de divers points de leur axe de symptose, auront pour axe de symptose commun la droite qui contient les centres de similitude de ces deux-là.*

Si le point de départ des quatre tangentes est le point où l'axe de symptose des deux courbes coupe une de leurs tangentes communes, la conique homothétique passera par les deux points de contact de cette tangente commune; mais, parce que le centre de cette troisième conique se trouve en ce même point d'intersection, ces deux points de contact se trouveront aux extrémités d'un même diamètre.

11. Donc, *l'axe de symptose de deux coniques homothétiques*

est également distant des polaires, relatives aux deux courbes d'un même centre de similitude.

Considérons présentement, sur la surface U, trois courbes planes Σ, Σ', Σ''; leurs plans se couperont deux à deux suivant trois droites concourant en un même point. Si de ce point on mène des tangentes aux trois courbes, les six points de contact seront sur la ligne de contact du cône circonscrit qui aurait son sommet en ce point.

12. Donc, *les axes de symptose de trois coniques homothétiques, prises deux à deux, concourent tous trois en un même point,*

Et si, de ce point, on mène des tangentes aux trois courbes; les six points de contact seront sur une conique qui leur sera homothétique, et qui aura ce même point pour centre.

Soient C, c les deux cônes qui passent par Σ' et Σ''; soient C′ c' les deux cônes qui passent par Σ'' et Σ; et soient enfin C″, c'' les deux cônes qui passent par Σ et Σ'; on sait que les sommets de ces six cônes sont distribués trois à trois sur quatre droites.

13. Donc (6), *les six centres de similitude de trois coniques homothétiques, prises tour à tour deux à deux, sont distribués trois à trois aux intersections de quatre droites.*

En d'autres termes, ces points sont les six sommets d'un quadrilatère complet; or, on sait que, dans un tel quadrilatère, les milieux des trois diagonales sont en ligne droite; donc, le milieu de la distance entre les centres de similitude de S′ et S″, le milieu de l'intervalle entre les centres de similitude de S″ et S, et enfin le milieu de l'intervalle entre les centres de similitude de S et S′, sont trois points qui appartiennent à une même droite.

Si l'on mène un plan tangent arbitraire à l'un des deux cônes C, c, il coupera la surface U suivant une courbe tangente à la fois à Σ' et Σ''; les points de contact seront sur une arête de ce cône, et le sommet du cône circonscrit à la surface U, suivant cette courbe, sera sur l'une des deux courbes planes d'intersection des surfaces coniques circonscrites à U, suivant les courbes Σ' et Σ''.

14. Donc, *deux coniques étant homothétiques, si tant de coniques homothétiques avec elles qu'on voudra les touchent toutes deux;*

1.° *Les deux points de contact seront en ligne droite avec l'un des deux centres de similitude des deux proposées;*

2.° *Les centres de toutes ces coniques seront sur deux nouvelles coniques.*

La première partie de cette proposition résulte aussi fort simplement (13) de ce que les deux points de contact sont des centres de similitude.

Par chacune des quatre droites aux intersections desquelles se trouvent situés les sommets des six cônes C, c, C′, c', C″, c'' on peut mener aux trois cônes qui y ont leurs sommets deux plans tangens communs, lesquels couperont la surface U suivant deux courbes tangentes, à la fois, aux trois courbes Σ, Σ', Σ''; d'où il résulte que sur la surface U on peut, généralement parlant, tracer huit courbes planes telles que chacune d'elles touche à la fois les trois courbes Σ, Σ', Σ''.

Parmi ces huit courbes, considérons, en particulier, celles que déterminent les deux plans tangens conduits par la droite qui contient les sommets des trois cônes C, C′, C″; l'une de ces courbes touche les courbes Σ', Σ'' en deux points qui sont sur une même arête du cône C, et l'autre touche les deux mêmes courbes en deux points qui sont sur une autre arête de ce cône, d'où il suit que les quatre points de contact sont sur deux droites qui se coupent, et conséquemment dans un même plan, et que, par suite, la droite qui joint les deux points de contact sur Σ' et celle qui joint les deux points de contact sur Σ'' doivent se rencontrer en un même point de l'intersection des plans de ces deux courbes. Par une raison semblable, la droite qui joindra les deux points de contact sur Σ devra rencontrer les deux autres, et, comme elle n'est pas dans le même plan avec elles, elles devront concourir toutes trois au point de concours des plans des trois courbes Σ, Σ', Σ''.

Les tangentes à la courbe Σ, aux points où les deux courbes en question la touchent, devant être dans les plans de ces deux dernières, et toutes deux dans le plan de cette courbe Σ, doivent concourir en un point de l'intersection des deux plans, c'est-à-dire, en un point de la droite qui contient les sommets des trois cônes C, C', C'', et on n'en peut dire autant pour chacune des deux autres courbes Σ', Σ''.

15. Donc, 1.° *trois coniques homothétiques étant tracées dans un même plan, il existe, généralement parlant, huit coniques homothétiques avec elles qui les touchent toutes trois ;*

2.° *Ces huit coniques auront deux à deux pour axe de symptose l'un des quatre axes de similitude des trois proposées ;*

3.° *La droite qui joindra les points de contact de ces deux coniques avec chacune des trois proposées passera par le point de concours des axes de symptose de ces trois proposées ;*

4.° *Enfin, les tangentes en ces deux points de contact iront concourir en un point de l'axe de similitude, axe de symptose des deux coniques touchantes.*

Il résulte de cette dernière proposition que la droite qui joindra les deux points de contact avec l'une des deux proposées contiendra le pôle de l'un des quatre axes de similitude, et, comme elle doit en outre passer par le *centre radical*, point de concours des trois axes de symptose, elle se trouvera complètement déterminée.

16. Lors donc que, trois coniques homothétiques étant tracées dans un même plan, on demandera d'en décrire un quatrième qui, leur étant homothétique, les touche toutes trois, on construira d'abord le centre radical ou *centre de symptose*, et les quatre axes de similitude des trois proposées ; alors, en joignant le centre de symptose aux pôles de l'un des axes de similitude relatifs aux proposées par trois droites, ces droites les couperont respectivement aux six points de contact de deux des courbes résolvant le problème. En répétant donc cette construction pour chacun des qua-

tre axes de similitude, on obtiendra les huit solutions dont ce problème est susceptible (*).

Il pourrait se faire que, pour tout ou partie des quatre axes de similitude, les droites qui doivent déterminer les points de contact sur les trois proposées ne les rencontrassent pas toutes trois; alors le nombre des solutions s'en trouverait d'autant réduit, et, si cette circonstance avait lieu pour les quatre axes de similitude, le problème serait tout à fait impossible.

D'après la remarque qui a été faite ci-dessus (11), on peut remplacer ce procédé par celui qui suit, lequel évite la construction des axes de symptose.

17. Trois coniques homothétiques S, S', S'' étant données, pour déterminer en quels points l'une d'elles, S'' par exemple, doit être touchée par deux des huit coniques homothétiques avec celles qui les touchent toutes trois, on déterminera l'un des centres O de similitude de S' et S'', et un des centres O' de similitude de S et S''; les polaires de O et O', relatives à S'', se couperont en un point; les polaires de O relatives à S' et de O' relatives à S se couperont en un autre point, et la droite qui joindra ces deux points coupera S'' aux deux points de contact cherchés (**).

18. Rien ne sera plus aisé que de modifier ces constructions de

(*) En supposant que les trois coniques données sont des cercles, on obtiendra une nouvelle démonstration de la construction indiquée tom. XVII, pag. 309, laquelle, comme l'on voit, n'est qu'un cas particulier de celle-là.

J. D. G.

(**) C'est sous cette forme que nous avions présenté la construction relative à trois cercles, dans les *Mémoires de Turin*, pour 1814, où nous avions déjà observé qu'elle était applicable à des ellipses homothétiques; si nous avons introduit postérieurement (*Annales*, tom. VII, pag. 289) l'emploi du centre radical, c'est uniquement pour pouvoir rendre la construction applicable à trois cercles tracés sur une sphère.

J. D. G.

manière à les rendre propres au cas où quelqu'une des trois coniques données deviendrait une droite ou un point ; il suffira seulement de se rappeler les propositions suivantes, faciles à justifier ;

1.° *Les deux centres de similitude d'une conique et d'un point se confondent en un seul qui est ce point lui-même ; leur axe de symptose est une parallèle à la polaire de ce point, relative à la conique également distante de cette polaire et du point dont il s'agit ;*

2.° *Les deux centres de similitude d'une conique et d'une droite sont aux deux extrémités du diamètre de la conique conjugué à la droite ; leur axe de symptose est la droite elle-même ;*

3.° *Les centres de similitude de deux points sont deux harmoniques quelconques de ces deux points ; leur axe de symptose est la perpendiculaire sur le milieu de la droite qui les joint ;*

4.° *Les deux centres de similitude de deux droites parallèles se confondent en un seul situé à l'infini ; leur axe de symptose est une droite parallèle à leur direction et également distante de l'une et de l'autre.*

A ces principes il faudra joindra encore les suivans :

1.° *Le pôle d'une droite, par rapport à un point directeur, est ce point lui-même ; la polaire d'un point, par rapport à un point directeur, est une droite arbitraire menée par ce dernier point ;*

2.° *La polaire d'un point, par rapport à une droite directrice, est cette droite elle-même ; le pôle, par rapport à cette même directrice d'une droite qui lui est parallèle, est un quelconque des points de la directrice.*

A l'aide de ces diverses remarques on résoudra, pour les coniques homothétiques (17, 18), les dix problèmes que Viète, dans son *Appolonius Gallus*, s'est proposé de résoudre par rapport au cercle ; avec cette différence qu'au lieu de ramener tour à tour, comme le fait Viète, les plus difficiles aux plus faciles, on obtiendra une solution directe pour chacun d'eux.

En employant ensuite la considération des polaires réciproques, comme nous l'avons fait dans notre précédent mémoire, c'est-à-dire, en prenant le centre d'homologie pour centre de la conique directrice, on transportera ces constructions à des coniques quelconques; puis, par cette même théorie des polaires réciproques, employée ensuite comme on le fait ordinairement, on parviendra à doubler ces problèmes et leurs solutions. On obtiendra ainsi, par exemple, la solution des problèmes suivans :

PROBLÈME. Étant données une conique et deux tangentes à cette courbe, décrire une autre conique qui, touchant celle-là et ses deux tangentes, satisfasse en outre à deux autres conditions, prises parmi les suivantes; savoir :

De passer par deux points donnés ;

De toucher deux droites données ;

De passer par un point donné et de toucher une droite donnée ?

PROBLÈME. Étant donnés une conique et deux points de cette courbe, décrire une autre conique, tangente à celle-là, qui la coupe en ces deux points, et qui satisfasse en outre à deux autres conditions, prises parmi les suivantes ; savoir :

De toucher deux droites données ;

De passer par deux points donnés ;

De toucher une droite donnée et de passer par un point donné ?

Soient tant de sections planes Σ, Σ', Σ'', ... à la surface U qu'on voudra, faites par des plans qui se coupent suivant une même droite D; si, par un point pris arbitrairement sur cette droite, on leur mène des tangentes, les points de contact seront tous sur une conique dont le plan, quel que soit le point de départ des tangentes sur la droite D, passera par une droite fixe polaire conjuguée de cette droite D et lieu des sommets des surfaces coniques circonscrites à U, suivant les courbes Σ, Σ', Σ'', ...

19. Donc, *si plusieurs coniques homothétiques ont un même axe de symptose, et que, de l'un quelconque des point de cet axe on leur mène des tangentes, tous les points de contact de ces tangen-*

tes appartiendront à une même conique homothétique aux proposées et ayant pour centre le point de départ des tangentes.

Si l'on varie, sur l'axe de symptose, le point de départ des tangentes, les points de contact appartiendront à une série de coniques homothétiques entre elles et aux premières, ayant pour axe de symptose commun la droite qui contiendra les centres des premières.

Si la droite D ne perce pas la surface U, sa polaire la percera nécessairement en deux points, et ces points, qui seront les points de contact de cette surface avec les plans tangens, conduits par la droite D, pourront être considérés comme deux courbes infiniment petites comprises dans la série Σ, Σ', Σ'', ...

20. Donc, *si plusieurs coniques homothétiques ont un même axe de symptose sans se couper, les coniques, lieux des points de contact des tangentes émanées des divers points de leur axe de symptose, passeront toutes par les deux mêmes points fixes, et pourront être considérées comme deux coniques de la première série, réduites à des points.*

Chacun de ces points jouit de cette propriété que ses polaires, relatives aux coniques de la première série, se confondent toutes en une même droite passant par l'autre point fixe.

En effet, l'axe de symptose de l'un de ces points et de l'une quelconque de ces coniques est (11) à égale distance de ce point et de sa polaire relative à cette conique; or, cet axe de symptose est le même de quelque manière qu'on choisisse la conique, puisque toutes les coniques de la série ont par hypothèse un même axe de symptose; en outre, le second de ces deux points fait partie de cette série, et la polaire du premier, par rapport à ce second point, doit passer par ce point lui-même; donc, chacun de ces deux points a même polaire dans toutes ces courbes, et cette polaire passe par l'autre point.

21. Ces deux points jouissent encore de cette propriété que *les droites menées de l'un d'eux aux deux points de contact d'une*

tangente commune à deux des coniques de la première série, sont parallèles à deux diamètres conjugués de ces coniques, car nous savons (11) que l'axe de symptose de ces deux coniques coupe la tangente commune en un point également distant des deux points de contact, lequel point sera par conséquent le centre d'une conique homothétique aux proposées, passant par les deux points de contact et en outre par les deux points fixes; ces deux points de contact seront donc les extrémités d'un diamètre de la courbe, d'où il suit que les droites menées de l'un quelconque des points de la courbe, et conséquemment de l'un quelconque de nos deux points fixes, aux deux points de contact, seront parallèles à deux diamètres conjugués de cette courbe; elles seront donc également parallèles à deux diamètres conjugués des deux autres qui lui sont homothétiques.

En particulier, si les coniques sont des cercles, ces deux droites devront être perpendiculaires l'une à l'autre, comme nous l'avons déjà remarqué page 274 (n.° 12).